ЯНВАРЬ 1968 г., ТОМ IV, № 1

УДК 517.946

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Т. И. ЗЕЛЕНЯК

Рассмотрим задачу

$$u_t = a(x, u, u_x) u_{xx} + b(x, u, u_x), \tag{1}$$

$$\alpha (u_x + \varphi(u)) + \beta u|_{x=0} = \gamma (u_x + \psi(u)) + \delta u|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3}$$

Предположим, что $a(x, u, u_x) \geqslant a_0 > 0$, где a_0, α, β, γ, δ — постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1$; a, b, φ, ψ, u_0 — трижды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Вопросы существования и единственности решений задачи (1), (2) при некоторых дополнительных ограничениях изучались рядом авторов. Обзор результатов, полученных для этой задачи, содержится в [1 — 3].

Предполагая ограниченность решения этой задачи в некоторой норме, мы докажем сходимость его к стационарному (не зависящему от времени) решению, выясним возможный порядок сходимости, а также вопросы устойчивости стационарных решений. Стабилизация решений краевых задач для параболических уравнений изучалась в [4, 5]. В работе [4] формулируется теорема о стабилизации для решений первой краевой задачи в многомерном случае. Вопросам устойчивости стационарных решений посвящены работы [6—13, 19, 20]. Мы докажем, что из асимптотической устойчивости в первом приближении вытекает существование решения в целом по начальным данным, мало отличающимся от стационарного решения, и его ассимптотическая устойчивость.

Свойство стабилизации решений в рассматриваемом нами случае является следствием хорошо известной в вариационном исчислении связи между краевой задачей для уравнения второго порядка и некоторым функционалом.

Лемма 1. *Пусть решение задачи Коши для уравнения*

$$y'' = -\frac{b(x, y, y')}{a(x, y, y')}, \quad y|_{x=x_0} = y_0, \; y'|_{x=x_0} = y_1 \tag{4}$$

определено для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$, $-\infty < y_0 < \infty$, $-\infty < y_1 < \infty$. *Тогда существуют функции* $\rho(x, y, y') > 0$, $\Phi(x, y, y')$ *такие, что для любого решения* $u(t, x)$ *задачи (1)—(3), для которого непрерывны* u, u_x, u_{xx}; $u_{xt} \in L_2$, *выполнено равенство*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \Phi(x, u, u_x)\, dx = \int_0^1 \rho\, u_t^2\, dx. \tag{5}$$

Доказательство. Построим функции Φ, ρ, и (5) перепишем в виде

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \right) u_t dx + \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} u_t \Big|_0^1 = \int_0^1 \rho u_t^2 \, dx. \tag{6}$$

В качестве Φ, ρ можно взять функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} u_x - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} u_{xx} \equiv \rho a u_{xx} + \rho b \tag{7}$$

при условии

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} u_t \Big|_0^1 = 0. \tag{8}$$

В (7) и (8) дифференцирование по ξ, η означает, очевидно, дифференцирование по второму и третьему аргументу соответственно с подстановкой вместо ξ, $\eta = u$, u_x. Уравнения (7), (8) будут выполняться, если потребовать тождественно по x, ξ, η выполнения равенств:

$$L\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \eta \equiv \rho(x, \xi, \eta) b(x, \xi, \eta), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \equiv -\rho a, \tag{10}$$

$$u_t \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_{\substack{x=0 \\ \alpha[\eta+\varphi(\xi)]+\beta\xi=0}} = u_t \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \Big|_{\substack{x=1 \\ \gamma[\eta+\psi(\xi)]+\delta\xi=0}} = 0. \tag{11}$$

Из (10) получаем

$$\Phi = -\int_0^\eta (\eta - v) \rho(x, \xi, v) a(x, \xi, v) \, dv +$$
$$+ z_1(x, \xi) + \eta z_2(x, \xi) = \Phi_1(x, \xi, \overset{\eta}{\cancel{v}}) + z_1 + \eta z_2. \tag{12}$$

Подставляя полученное выражение в (9), получим

$$L\Phi_1 + L(z_1 + \eta z_2) = \int_0^\eta v \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho a) \, dv + \int_0^\eta \frac{\partial}{\partial x} (\rho a) \, dv +$$
$$+ z_{1_\xi} - z_{2_x} \equiv \rho b. \tag{13}$$

Дифференцируя (13) по η, получим

$$\eta a \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} - b \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \left[\eta \frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial \eta} \right] \rho = 0. \tag{14}$$

Выпишем уравнения характеристик для (14):

$$\frac{d\xi}{dx} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dx} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{d\rho}{dx} = -\frac{\eta a_\xi + a_x - b_\eta}{a} \rho. \tag{15}$$

В силу предположения леммы общее решение системы (15) определено для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет вид

$$\xi = A_1(x, C_1, C_2), \quad \eta = A_2(x, C_1, C_2), \tag{16}$$

$$\rho = C_3 \exp\left(-\int_0^x R(x,\ C_1,\ C_2)\,dx\right), \tag{16}$$

где C_i — произвольные постоянные, а

$$R(x,\ C_1,\ C_2) = \eta\, a_\xi + a_x - b_\eta\Big|_{\substack{\xi = A_1(x, C_1, C_2) \\ \eta = A_2(x, C_1, C_2)}}. \tag{17}$$

Общее решение уравнения (14) имеет, таким образом, вид

$$\rho = \exp\left(-\int_0^x R_1(y,\ \xi,\ \eta, x)\,dy\right)\ \Psi\left(B_1(\xi,\ \eta,\ x),\ B_2(\xi,\ \eta,\ x)\right),$$

$$R_1(y,\ \xi,\ \eta,\ x) = R(y,\ B_1,\ B_2),\ \xi = A_1(x,\ B_1,\ B_2),\ \eta = A_2(x,\ B_1,\ B_2),$$

а Ψ — произвольная функция. Положим $\Psi \equiv 1$ и подставим выражение для ρ в (12). Уравнение (10) при таком выборе Φ_1, ρ и произвольных z_1 и z_2, очевидно, удовлетворяется. Так как ρ — решение уравнения (14), то $L\Phi_1 - \rho b \equiv -\rho b|_{\eta=0}$. Выбирая теперь z_i так, чтобы

$$z_{1_\xi} - z_{2_x} \equiv \rho b|_{\eta=0}, \tag{18}$$

и подставляя их в (12), получим функцию Φ, которая вместе с ρ удовлетворяет (9). Выберем z_2 так, чтобы удовлетворялись равенства (11). В случае $\alpha = 0$ ($\gamma = 0$), если u_t непрерывна, то $u_t|_{x=0} = 0$ ($u_t|_{x=1} = 0$) и (11) удовлетворяется. В случае $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ положим

$$z_2(x,\ \xi) = (1 - x)\int_0^{-\frac{\beta\xi - \alpha\varphi(\xi)}{\alpha}} \rho(x,\ \xi,\ v)\, a(x,\ \xi,\ v)\, dv + x\int_0^{-\frac{\delta\xi - \gamma\psi(\xi)}{\gamma}} \rho\, a dv. \tag{19}$$

(В случае $\alpha \neq 0$, $\gamma = 0$ второе слагаемое в (19) отбрасываем). Подставляя полученное выражение в (18), находим z_1.

Лемма доказана.

Приведем некоторые простые вспомогательные утверждения, необходимые в дальнейшем.

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — решение задачи*

$$\mathcal{L}u = u_{xx} + a(x)u_x + b(x)u = f,$$

$$Z_1 u = \alpha u_x + \beta u|_{x=0} = \theta_1,\ Z_2 u = \gamma u_x + \delta u|_{x=1} = \theta_2,\ \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1$$

и $\int_0^1 uvdx = 0$, *где* $\mathcal{L}v = 0$, $Z_i v = 0$ $(i = 1,\ 2)$. *Тогда существует константа* K, *зависящая от* $\sup|a|$, $\sup|b|$, α, β, γ, δ *и наименьшего по модулю ненулевого собственного числа, такая, что*

$$\|u\|_{W_2^2} \leqslant K\left[\|f\|_{L_2} + |\theta_1| + |\theta_2|\right].$$

Доказательство. Если любое $v \equiv 0$, доказательство очевидно. Пусть $v \neq 0$, $\int v^2 dx = 1$. Пусть u_1 — решение задачи $u_{1_{xx}} - n^2 u_1 = 0$, $Z_i u_1 = \theta_i$ при достаточно большом n. Тогда $\|u_1 - v\int u_1 v dx\|_{W_2^2} \leqslant K_1\{|\theta_1| + |\theta_2|\}$, где K_1 зависит лишь от α, β, γ, δ.

Полагая $w = u - u_1 + v\int u_1 v dx$, имеем: $\int w v\, dx = 0$; $\mathcal{L}w = f - \mathcal{L}u_1$, $Z_1 w = Z_2 w = 0$. Теперь, очевидно

$$\|w\|_{W_2^2} \leqslant K_2 \|f - \mathcal{L}u_1\|_{L_2} \leqslant K\{\|f\|_{L_2} + |\theta_1| + |\theta_2|\},$$

где K_2 зависит от величин, указанных в лемме, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $\lambda(\mu)$ — наименьшее по модулю ненулевое собственное число задачи*

$$\mathcal{L}_\mu u = (a(x, \mu) u_x)_x + b(x, \mu) u = \lambda u,$$

$$\alpha u_x + \rho(\mu) u|_{x=0} = \gamma u_x + \delta(\mu) u|_{x=1} = 0, \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0,$$

$$\gamma^2 + \delta^2 \neq 0, \ a(x, \mu) \geqslant a_0 > 0,$$

a, b, ρ, δ — непрерывные функции x, μ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\mu_0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$. Пусть нуль является собственным числом этой задачи при любом μ. Тогда существует такое $\rho > 0$, что для всех μ выполняется неравенство

$$|\lambda(\mu)| \geqslant \rho.$$

Доказательство. Рассмотрим $u(x, \mu)$ решение задачи $\mathcal{L}_\mu u = 0$; $u(0, \mu) = 1$, $u_x|_{x=0} = -\dfrac{\beta(\mu)}{\alpha}$ (предположим, для определенности, $\alpha \neq 0$). $u(x, \mu)$ очевидно непрерывно по μ и является собственной функцией, соответствующей нулевому собственному числу.

Пусть $v(x, \mu)$ есть решение задачи

$$\mathcal{L}_\mu v = \lambda(\mu) v, \ v(0, \mu) = 1, \ v_x|_{x=0} = -\frac{\beta(\mu)}{\alpha}.$$

Очевидно, что $\int\limits_0^1 u(x, \mu) v(x, \mu)\, dx = 0$. Если теперь $\lambda(\mu_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $\mu_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar{\mu}$, то

$$u(x, \mu_k) \to u(x, \bar{\mu}), \ v(x, \mu_k) \to v_1(x, \bar{\mu})$$

и по непрерывности $\int\limits_0^1 u(x, \bar{\mu}) v_1(x, \bar{\mu})\, dx = 0$. С другой стороны,

$$\mathcal{L}_\mu v_1(x, \bar{\mu}) = 0, \ v_1(0, \bar{\mu}) = 1, \ v_{1x}|_{x=0} = -\frac{\beta(\bar{\mu})}{\alpha},$$

т. е. $u(x, \bar{\mu}) \equiv v_1(x, \bar{\mu})$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть для $0 \leqslant t \leqslant T$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_t^\infty \left(\int\limits_0^1 u_t^2\, dx \right) dt \leqslant K e^{-t}.$$

Тогда для $0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T$ имеем

$$J(t, \tau) = \int\limits_0^1 |u(x, t) - u(x, \tau)|\, dx \leqslant \sqrt{K} \, \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e} - 1} \, e^{-\frac{t}{2}}.$$

Доказательство. Пусть $|t - \tau| \leqslant 1$. Тогда

$$J(t, \tau) \leqslant \int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^\tau |u_t|\, dt \right) dx \leqslant \sqrt{\int\limits_0^1 \left(\int\limits_t^\tau |u_t|\, dt \right)^2 dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(\tau - t) \int\limits_0^1 \int\limits_t^\tau |u_t|^2 dt dx} \leqslant \sqrt{K} \, e^{-\frac{t}{2}}. \tag{20}$$

Пусть $|t - \tau| > 1$. Положим $N = [\tau - t]$, тогда

$$J(t, \tau) \leqslant \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^1 dx \left| \int_{t+i}^{t+i+1} u_t\, dt \right| + \int_0^1 \left| \int_{t+N}^{\tau} u_t dt \right| dx.$$

Применяя к каждому слагаемому неравенство (20), получим

$$J(t, \tau) \leqslant \sqrt{K} \sum_{i=0}^{N-1} e^{-\frac{t+i}{2}} + \sqrt{K}\, e^{-\frac{t+N}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{K} \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} e^{-\frac{t}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (1) — (3), удовлетворяющее условию $\|u(t, x)\|_{C_{2+\alpha}(0,1)} \leqslant K$, где K постоянная не зависящая от t. Тогда существует стационарное решение $v(x)$ такое, что*

$$\|u(t, x) - v(x)\|_{C_2} \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать выполненными условия леммы 1, так как изменяя значения a, b для $|u| \geqslant 2K$, $|u_x| \geqslant 2K$, придем к задаче с ограниченными a, b, b/a во всей плоскости u, u_x. Пользуясь леммой, получим существование предела

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 \Phi(x, u, u_x)\, dx = B. \tag{21}$$

В силу ограниченности u в норме $C_{2+\alpha}(0, 1)$ для любой последовательности $t_i \underset{i\to\infty}{\to} \infty$ найдем подпоследовательность t_{i_k} такую, что $u(x, t_{i_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{C_2} w(x)$. Нетрудно доказать, используя метод, предложенный в [6] для линейного уравнения с нелинейными граничными данными, и априорные оценки из [14—16], что при наших предположениях существует на каждом конечном интервале решение $v(x, t)$ задачи (1) — (3) такое, что $v(x, 0) = w(x)$, причем в силу непрерывной зависимости решения от начальных данных

$$u(x, t_{i_k} + t) \underset{k\to\infty}{\to} v(x, t) \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant \delta$$

и некоторого $\delta > 0$. Теперь нетрудно видеть, что

$$\int_0^1 \Phi(x, v, v_x)\, dx \equiv B,$$

т. е. $\frac{\partial v}{\partial t} \equiv 0$, а это значит, что каждый частичный предел для $u(x, t)$ является стационарным решением. Остается доказать теперь, что все частичные пределы совпадают. Считая $\alpha \neq 0$, рассмотрим функцию $u(0, t)$. Очевидно, что если существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} u(0, t) = C$, то все частичные пределы совпадают, так как каждый из них является решением задачи Коши для уравнения

$$w'' = -\frac{b}{a},\ w(0) = \mu,\ w'(0) = \frac{-\beta\mu - \alpha\varphi(\mu)}{\alpha},$$

где μ — соответствующий частичный предел функции $u(0, t)$. Таким образом, если $u(x, t)$ не имеет предела, то частичные пределы $u(x, t)$ образуют однопараметрическое семейство стационарных решений $w(\mu, x)$, причем $w(\mu, 0)=\mu$ (если $\alpha=0$, то в качестве параметра выбираем $w_x|_{x=0}$).

Пусть $\mu_1=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, u(0, t)$, $\mu_2=\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, u(0, t)$. Очевидно, что $|\mu_i|\leqslant K$, $\dfrac{\partial w(\mu, x)}{\partial\mu}$ в силу предположений о a и b существует и является решением задачи

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{a}\Big|_{u=w} z+\frac{\partial}{\partial u_x}\frac{b}{a}\Big|_{u=w} z_x=0, \tag{22}$$

$$\alpha\left(z'+\varphi'(w)z\right)+\beta z\big|_{x=0}=\gamma\left(z'+\psi'(w)z\right)+\delta z|_{x=1}=0. \tag{23}$$

Так как $\dfrac{\partial w}{\partial\mu}\Big|_{x=0}=1$, то $\dfrac{\partial w}{\partial\mu}\not\equiv 0$ и, следовательно, нуль является собственным числом задачи (22), (23).

Пусть теперь $\mu_2<\mu_0<\mu_1$, $\|w(\mu_0, x)-w(\mu_1, x)\|_{L_2}\geqslant\delta>0$, $\|w(\mu_0, x)-w(\mu_2, x)\|_{L_2}\geqslant\delta>0$, где δ — некоторая постоянная. Очевидно, что

$$\inf_{\mu_2\leqslant\mu<\mu_1}\|u(x, t)-w(\mu, x)\|_{L_2}=\inf_{\mu}\theta(\mu, t)\underset{t\to\infty}{\to}0.$$

При фиксированном t функция $\theta(\mu, t)$ дифференцируема по μ и если указанный inf достигается во внутренней точке $\mu(t)$ интервала $[\mu_1, \mu_2]$, то $\dfrac{\partial\theta}{\partial\mu}\Big|_{\mu=\mu(t)}=0$, т. е.

$$\int_0^1\left[w(x, \mu)-u(x, t)\right]\frac{\partial w}{\partial\mu}\,dx=0\ \left(\mu=\mu(t)\right).$$

Задачу (1), (2) перепишем теперь в следующем виде:

$$\frac{1}{a}u_t+A(x, u, u_x)=(u-w)_{xx}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{b}{a}\Big|_{u=w}(u-w)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial u_x}\frac{b}{a}\Big|_{u=w}(u-w)_x, \tag{24}$$

где

$$|A(x, u, u_x)|\leqslant N(t)\|u-w\|_{C_1},\quad N(t)\underset{t\to\infty}{\to}0;$$

граничные условия для $(u-w)$ имеют вид

$$\alpha\left[(u-w)_x+\varphi'(w)(u-w)\right]+\beta(u-w)|_{x=0}=R_1(t),$$
$$\gamma\left[(u-w)_x+\psi'(w)(u-w)\right]+\delta(u-w)|_{x=1}=R_2(t), \tag{25}$$

где

$$|R_i(t)|\leqslant N(t)\|u-w\|_C,\ N(t)\underset{t\to\infty}{\to}0,\quad w=w(\mu(t), x),$$

Так как $(u-w)$ ортогонально решению однородной задачи, то нетрудно видеть, используя лемму 2, что

$$\|u-w\|_{W_2^2(0,1)}\leqslant C\{N(t)\|u-w\|_{C_1}+\|(u-\cancel{w})_t\|_{L_2}\},$$

где, по лемме 3, C может быть выбрано одной и той же для всех $\mu_1<\mu<\mu_2$. Таким образом, для t достаточно больших и таких, что $\inf\theta(\mu, t)$ достигается для $\mu_2<\mu<\mu_1$ (обозначим множество таких t через П)

$$\|u-w\|_{W_2^2}\leqslant K_1\|u_t\|_{L_2}, \tag{26}$$

где K_1 — некоторая константа.

Далее

$$\left|\int_0^1 (\Phi(x, u, u_x) - \Phi(x, w, w_x))\,dx\right| \leqslant \int_0^1 \left| \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\right|_{\theta_1,\theta_2} (u-w)^2 + $$
$$+2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial u_x}\Big|_{\theta_1,\theta_2} (u-w)(u-w)_x +$$
$$+\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_x^2}\Big|_{\theta_1,\theta_2} (u-w)_x^2\Big|\,dx \leqslant A\,\|u-w\|_{w_2^1(0,1)} \qquad (27)$$

с некоторой константой A, которая может быть выбрана не зависящей от t и w.

Пусть теперь $t\in\Pi$. Тогда, выбрав в (27) в качестве w функцию, на которой достигается $\inf\limits_{\mu}\theta(\mu, t)$, получим, используя (26):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[B - \int_0^1 \Phi\,dx\right] \leqslant -\frac{1}{AK_1}\int_0^1 [B-\Phi]\,dx. \qquad (28)$$

Неравенство (28) справедливо, таким образом, для $t\in\Pi$ и достаточно больших.

Пусть теперь $u(x, t_i)\to w(x, \mu_0)$, где $\mu_2<\mu_0<\mu_1$,

$$\|w(x, \mu_0) - w(x, \mu_2)\|_{L_2} \geqslant \delta,\ \|w(x, \mu_0) - w(x, \mu_1)\|_{L_2} \geqslant \delta.$$

Выберем i настолько большим, чтобы для всех $t\geqslant t_i$

$$\sqrt{\left[B-\int_0^1 \Phi\,dx\right]} \leqslant \frac{\sqrt{e}-1}{\sqrt{e}}\,\frac{\delta\sqrt{\rho_0}}{16K},\quad \|u(x, t_i) - w(x, \mu_0)\|_{L_2} \leqslant \frac{\delta}{8},$$

где $\rho(x, u, u_x)\geqslant\rho_0>0$.

Положим

$$\bar t = \inf_{t\geqslant t_i}\{t,\ \|u(x, t) - w(x, \mu_k)\|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant \|u(x, t) - w(x, \mu_0)\|_{L_2}\},\quad \text{где } k=1, \text{ либо } k=2\}.$$

В силу выбора i имеем, очевидно, $\bar t > t_i$.

На промежутке t_i, $\bar t$ по доказанному выше выполняется неравенство (28), т. е.

$$\left[B-\int_0^1 \Phi\,dx\right] = \int_t^\infty dx\int_0^1 \rho\,u_t^2\,dx \leqslant \left[B-\int_0^1 \Phi\,dx\right]_{t=t_i} e^{-\frac{1}{AK_1}(t-t_i)},$$

и по лемме 4

$$\int_0^1 |u(x, t) - u(x, \tau)|\,dx \leqslant \sqrt{\left[B-\int_0^1 \Phi\,dx\right]_{t=t_i}}\ \times$$
$$\times\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\,e^{-\frac{1}{AK_1}(t-t_i)}}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, окончательно получаем

$$\int_0^1 |u(x, t) - u(x, t_i)|^2\,dx \leqslant$$

ра-
ют

$$\leqslant 2K \int_0^1 |u(x,\ t) - u(x,\ t_i)|\, dx \leqslant \frac{\delta}{8}. \tag{29}$$

Если $\bar{t}$ конечно, то из (29) получаем

$$\|u(x,\ \bar{t}) - w(x,\ \mu_0)\|_{L_2} \leqslant \|u(x,\ \bar{t}) - u(x,\ t_i)\|_{L_2} + \\ + \|u(x,\ t_i) - w(x,\ \mu_0)\|_{L_2} \leqslant \frac{\delta}{4}. \tag{30}$$

Далее

$$\|u(x,\ \bar{t}) - w(x,\ \mu_k)\|_{L_2} \geqslant \|w(x,\ \mu_k) - w(x,\ \mu_0)\|_{L_2} - \\ - \|w(x,\ \mu_0) - u(x,\ \bar{t})\|_{L_2} \geqslant \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3}{4}\delta. \tag{31}$$

Сопоставляя неравенства (30) и (31) легко заключить, что $\inf \|u(x,\ \bar{t}) - w(x,\ \mu)\|_{L_2}$ не может достигаться при $\mu = \mu_k$ $(k = 1,\ 2)$, откуда следует, что $\bar{t} = \infty$ и, следовательно, (29) верно для всех $t > t_i$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $u(x,\ t)$ *— решение задачи* (1) — (3), $\|u(x,\ t) - v(x)\|_{C_2} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, *причем выполнено одно из условий:*

А) Нуль не является собственным числом задачи (22), (23)

$$Nu = u_{xx} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{b}{a}\right)\Big|_{u=v} u + \frac{\partial}{\partial u_x}\left(\frac{b}{a}\right)\Big|_{u=v} u_x = \lambda u,$$

$$\alpha\left(u_x + \varphi'(v)\, u\right) + \beta\, u|_{x=0} = \gamma\left(u_x + \psi'(v)\, u\right) + \delta\, u|_{x=1} = 0.$$

Б) Если $v(x) = v(x,\ \mu_0)$, *где* $v(x,\ \mu)$ *— однопараметрическое семейство стационарных непрерывных по* μ *решений, определенных для* $\mu_2 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$, *то* $\mu_2 < \mu_0 < \mu_1$.

Тогда существуют константы C, $g > 0$ *такие, что*

$$\int_0^1 |u(x,\ t) - v(x)|^2\, dx \leqslant Ce^{-gt}. \tag{32}$$

Теорема 2 вытекает из рассуждений, изложенных при доказательстве теоремы 1. Если выполнено условие А или условие Б, то для $t \geqslant T$, где T достаточно большое, выполнена оценка (28) и, следовательно, (32).

Покажем, что теорему 2 улучшить, вообще говоря, нельзя.

Пример 1.

$$u_t = u_{xx} - (u^2 + u_x^2)\sin x + u, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Решением этой задачи является функция $u = \dfrac{\sin x}{1+t}$. Если $v(x)$ — стационарное решение, то

$$v_{xx} + v = (v^2 + v_x^2)\sin x, \quad v|_{x=0} = v|_{x=\pi} = 0$$

и выполнено условие разрешимости

$$\int (v^2 + v_x^2)\sin^2 x dx = 0, \quad \text{т. е. } v \equiv 0.$$

Линиаризованная в окрестности нуля задача $w_{xx} + w = \lambda w$ имеет нуль собственным числом.

Пример 2.

$$u_t = u_{xx} + f(u),\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0,\ f(u) = \begin{cases} -u^2 & u \geqslant 0, \\ 0 & u \leqslant 0. \end{cases}$$

Решением является функция $u = \dfrac{1}{t+1},\ u \underset{t\to\infty}{\to} 0.$

Стационарные решения $w = \mu$ образуют однопараметрическое семейство, причем $\mu \leqslant 0$. Наше стационарное решение соответствует граничному значению параметра.

Пример 3.

$$u_t = u_{xx} + f(u),\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0,\ f(u) = \begin{cases} -u^2 & u > 0, \\ u^m \sin\dfrac{1}{u} & u \leqslant 0, \end{cases}$$

а m — некоторое натуральное число. И в этом случае $u = \dfrac{1}{t+1} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, хотя стационарные решения w_k не образуют однопараметрического семейства, но $w_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, т. е. не выполнены условия А и Б. Приведенные примеры исчерпывают все возможные случаи нарушения условий А и Б.

Представляет интерес то обстоятельство, что условия теоремы 2 могут выполняться и в том случае, если $v(x)$ неустойчиво. В [7] рассмотрена задача

$$u_t = u_{xx} + \lambda(Q - u)e^u,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,\ u|_{t=0} = u_0(x),$$

причем доказано существование начальных данных, отличных от стационарного решения, и таких, что $u(x, t) \underset{t\to\infty}{\to} v(x)$, причем $v(x)$ неустойчиво, а Q и λ можно выбрать так, чтобы линеаризованный в окрестности $v(x)$ соответствующий оператор не имел нуль собственным числом.

Теорема 2 применима, как легко проверить, и в этом случае. Самым простым примером экспоненциальной сходимости к неустойчивому решению являются, впрочем, линейные задачи.

Определение. Стационарное решение $v(x)$ назовем устойчивым, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что из $\|u_0 - v(x)\|_{C_{2+\alpha}} \leqslant \varepsilon$ вытекает существование дважды непрерывно дифференцируемого решения $u(x, t)$ задачи (1) — (3), причем

$$\int | u(x, t) - v(x)|^2\, dx \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Докажем, что из устойчивости в первом приближении, т. е. из отрицательности спектра задачи (22), (23), вытекает устойчивость. Без ограничения общности можем считать $v \equiv 0$. Для определенности рассмотрим граничные условия

$$u_x|_{x=0} = \varphi(u),\ u|_{x=1} = 0. \tag{33}$$

По осцилляционной теореме Гантмахера — Крейна [17], используя наше предположение, можем установить существование функции $z(x)$ такой, что $Nz \leqslant -\delta,\ z \geqslant \delta,\ z \leqslant \widetilde{M},\ z_x - \varphi'(0)z \leqslant -\delta$, где $\widetilde{M}$, $\delta > 0$ — постоянные; N определен формулой (22).

Введем новую функцию $w = \dfrac{u}{z}$ в задаче (1), (3), (33). Получим

$$w_t = \frac{1}{z}\left[a(x, z\ \ w, (zw)_x)(z_{xx}w + 2z_x w_x + zw_{xx}) + \right.$$

$$+ b(x,\ z\ w,\ (zw)_x)\big] = \tilde{a}(x,\ w,\ w_x)\ \big[w_{xx} + f(x;\ w,\ w_x)\big], \tag{34}$$

$$w_x z + z_x w|_{x=0} = \varphi(zw)|_{x=0},\ w|_{x=1} = 0. \tag{35}$$

Разлагая f в окрестности $w=0$, $w_x=0$ в ряд Тэйлора, получим

$$f = \frac{\partial f}{\partial w}\bigg|_{w=0} w + \frac{\partial}{\partial w_x} f\bigg|_{w=0} w_x + R(x,\ w,\ w_x),$$

где для $|w| \leqslant 1$, $|w_x| \leqslant 1$ имеем

$$|R(x,\ w,\ w_x)| \leqslant K\ \{|w|^2 + |w_x|^2\}$$

с некоторой постоянной K.

Уравнение для w можем переписать теперь в виде

$$w_t = \tilde{a}(x,\ w,\ w_x)\left\{w_{xx} + \frac{\partial f}{\partial w_x}\bigg|_{w=0} w_x + \frac{Nz}{z}\ w\right\} + R_1(x,\ w,\ w_x), \tag{36}$$

причем w удовлетворяет граничным условиям:

$$w|_{x=1} = 0,\ w_x + \left(\frac{z_x}{z} - \varphi'(0)\right) w\ \bigg|_{x=0} = \left(\frac{\varphi(zw)}{z} - \varphi'(0)\right) w\ \bigg|_{x=0} = \Psi(w)|_{x=0}, \tag{37}$$

где для $|w| \leqslant 1$, $|w_x| \leqslant 1$ имеем $|R_1| \leqslant K_1\{|w|^2 + |w_x|^2\}$, $|\Psi(w)| \leqslant K_1 |w|^2$ с некоторой постоянной K_1.

Положим теперь

$$\tilde{\Psi}(w) = \begin{cases} \Psi(w) & |w| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2},\ |w_x| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ \Psi(\varepsilon) & |w| \geqslant \varepsilon_0,\ \ |w_x| \geqslant \varepsilon_0, \end{cases} \qquad \tilde{A} = \begin{cases} \tilde{a} & |w| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2},\ |w_x| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ M & |w| \geqslant \varepsilon_0,\ \ |w_x| \geqslant \varepsilon_0, \end{cases}$$

$$\tilde{R}_1 = \begin{cases} R_1(x,\ w,\ w_x) & |w| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2},\ \ |w_x|\ \varepsilon\ \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ R_1(\varepsilon_0,\ \varepsilon_0,\ x) & |w| \geqslant \varepsilon_0,\ \ |w_x| \geqslant \varepsilon_0, \end{cases}$$

для остальных значений аргументов продолжаем $\tilde{\Psi}$, $\tilde{A}$, $\tilde{R}_1$ с сохранением гладкости и таким образом, чтобы $|\tilde{R}_1| \leqslant K_1 \varepsilon_0^2$, $|\tilde{\Psi}| \leqslant K_1 \varepsilon_0^2$, $a_0 \leqslant \tilde{A} \leqslant M$, где $M = \sup\limits_{|w|\leqslant 1,\ |w_x|\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1} \tilde{a}$, ε_0 выберем в дальнейшем. Используя метод из [6] и априорные оценки, легко доказать разрешимость задачи

$$w_t = \tilde{A}\ \left\{w_{xx} + \frac{Nz}{z}\ w + \frac{\partial f}{\partial w_x}\bigg|_{w=0} w_x\right\} + \tilde{R}_1, \tag{38}$$

$$w_x + \left(\frac{z_x}{z} - \varphi'(0)\right) w\ \bigg|_{x=0} = \tilde{\Psi}(w)|_{x=0},\ w|_{x=1} = 0, \tag{39}$$

$$w|_{t=0} = \frac{u_0}{z}. \tag{40}$$

Покажем теперь, что если $\left\|\frac{u_0}{z}\right\|_{C_{2+\alpha}} \leqslant \varepsilon$ при достаточно малом ε, то $\|w\|_{C_1}$ мало, т. е. что решение задачи (38) — (40) совпадает с искомым решением задачи (36) — (37).

В силу свойств функции z можем применить принцип максимума: если w достигает положительного максимума в точке x_0, t_0, где $0 < x_0 < 1$, $t_0 >$

>0, то, очевидно, в этой точке имеем $0 \leqslant -\tilde{A} \dfrac{\delta}{z} w + \tilde{R}|_{w_x=0}$, т. е. $w \leqslant \leqslant \dfrac{z}{\delta} \dfrac{\tilde{R}}{\tilde{A}}\Big|_{w_x=0}$; если теперь $w \geqslant \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, то $\dfrac{\tilde{R}}{\tilde{A}} \leqslant \dfrac{2K_1 \varepsilon_0^2}{a_0}$ и при $\varepsilon_0 < \dfrac{a_0}{2K_1} \dfrac{\delta}{\tilde{M}}$ получаем противоречие. Если же $w \leqslant \varepsilon_0/2$, то $1 \leqslant \dfrac{2K_1 w\tilde{M}}{a_0 \delta}$ и при $\varepsilon_0 < < \dfrac{a_0 \delta}{2K_1 \widetilde{M}}$ получаем противоречие.

Далее, если положительный максимум достигается при $x=0$, то $\dfrac{\widetilde{M}}{\delta} \tilde{\Psi}(w)|_{x=0} \leqslant -w|_{x=0}$ и для $w \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ получаем $w \leqslant K_1 w^2 \dfrac{\widetilde{M}}{\delta}$, что опять приводит к противоречию для $\varepsilon_0 < \dfrac{1}{2K_1} \dfrac{\delta}{\widetilde{M}}$.

Таким образом, если выбрать $\varepsilon_0 = \min \left\{\dfrac{a_0 \delta}{2K_1 \tilde{M}}, \dfrac{\delta}{2K_1 \tilde{M}}\right\}$, то положительный максимум и отрицательный минимум могут достигаться лишь при $t=0$. Следовательно, если $\left|\dfrac{u(x,\ 0)}{z}\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, то

$$\sup_{x,t} \left|\frac{u(x,\ t)}{z}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Также, как и в [16], можно получить теперь оценку $\|w(x,\ t)\|_{C_1} \leqslant C$, где C зависит от a_0, K_1, ε, причем $C(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$. Следовательно, при достаточно малом ε и $\|u_0\|_{C_{2+\alpha}} \leqslant \varepsilon$ соответствующее решение задачи (1) — (3) существует и $\|u(x,\ t)\|_{C_1} \leqslant C(\varepsilon)$. Видоизменяя теперь несколько доказательство теоремы 1, пользуясь тем, что в окрестности нуля нет стационарных решений, можно доказать, что $\int |u(x,\ t)|^2 dx \underset{t \to \infty}{\to} 0$.

Из приведенных нами рассуждений следует, в частности, что критерий устойчивости, полученный в [7] для уравнения $u_t = u_{xx} + f(u,\ u_x)$, переносится также на уравнения $u_t = a(u,\ u_x) u_{xx} + f(u,\ u_x)$. Критерий устойчивости в первом приближении решений задачи (1) — (3) получен Э. Н. Руденко.

Также, как и в [7], этот критерий связан с построением стационарного решения путем нахождения соответствующих ему начальных данных.

Таким образом, осцилляционные теоремы приводят к простым критериям устойчивости стационарных решений. При конструировании этих решений при помощи метода Ньютона, конечно разностных методов, а также при помощи решения задачи Коши можем получить ответ на вопрос о их устойчивости без каких-либо существенных дополнительных вычислений. Метод прогонки, в частности, приводит всегда к устойчивым решениям.

Заметим, что аналоги применяемых нами критериев отрицательности спектра в случае несамосопряженного уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = \lambda u,$$

$$\frac{du}{dn} + \sigma u|_{\Gamma} = 0$$

получены в работе [18]; для данных Дирихле, независимо—в дипломной работе В. П. Праваторова. Из этих результатов, в частности, вытекает вещественность самого правого собственного числа.

Литература

1. Олейник О. А., Кружков С. Н. УМН, **16**, в. 5, 115—155, 1961.
2. Ладыженская О. А. Труды IV Всесоюзного математического съезда, 1. Пленарные доклады. Л., Изд. АН СССР, 1963, стр. 134—157.
3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. «Наука», 1967.
4. Альбер С. И. ДАН СССР, **156**, № 4, 727—730, 1964.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А. ДАН СССР, **111**, № 1, 12—15; № 2, 273—275, 1956.
6. Friedman A. Partial Differential equations of Parabolic Type. Prentice—Hall, 1964.
7. Зеленяк Т. И. Дифференциальные уравнения, **3**, № 1, 19—29, 1967.
8. Westphal H. Math. Z., 51, 690—695, 1949.
9. Prodi C. Acad Naz. Lincei., (8), 10, 1952.
10. Mlak W. Ann. Polon. Math., 3, 1957.
11. Narasimhan R. J. Rat. Mech Analys., 3, 303—313, 1954.
12. Худяев С. И. ДАН СССР, **154**, № 4, 787—790, 1964.
13. Горьков Ю. П. ДАН СССР, **157**, № 3, 509—512, 1964.
14. Солонников В. А. Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, т. XXXIII, 1965.
15. Камынин Л. И., Масленникова В. Н. Сибирский матем. журнал, т. VII, № 1, 83—128, 1966.
16. Кружков С. Н. ДАН СССР, **170**, № 3, 501—504, 1966.
17. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.—Л., 1950.
18. Protter M. H., Weinberger H. F. Bull. Amer. Math. Soc., **72**, 2, 1966.
19. Peterson L. D., Clair G. Maple. J. of Math. Analysis and application, v. 14, № 2, 221—242, 1966.
20. Lakshmikantham V. J. of Math. Analysis and application, v. 9, № 2, 234—251, 1964.

Поступила в редакцию
7 февраля 1967 г.

Институт математики
СО АН СССР