

УДК 536.248.2

*Н. И. Григорьева, В. Е. Накоряков***ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОВМЕСТНОМ
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСЕ ПРИ ПЛЕНОЧНОЙ АБСОРБЦИИ***Построены точные решения системы уравнений тепло-массопереноса при абсорбции пара жидкой пленкой. Получены выражения для основных характеристик процесса тепло-массопереноса.*

С абсорбцией паров жидким раствором связаны многочисленные процессы, применяемые в химии, холодильной технике и т. п. Характерной особенностью их является наличие совместного переноса тепла и абсорбируемого вещества в жидкости. Между тем в практике соответствующих инженерных расчетов обычно процессы переноса тепла и массы рассматриваются раздельно.

В данной работе на основе простой модели исследуется взаимное влияние процессов теплопередачи и диффузии при абсорбции на пленке.

Задача о совместном тепло-массопереносе при абсорбции чистого (без примеси газа) пара на пленке раствора, стекающего по вертикальной стенке, рассматривается в следующих предположениях:

- 1) стенка изотермическая, непроницаемая для абсорбируемого вещества;
- 2) толщина пленки δ постоянна;
- 3) течение жидкости ламинарное;
- 4) на границе раздела жидкость — пар имеет место состояние насыщения для системы абсорбируемое вещество — жидкий раствор;
- 5) волновые процессы в жидкости не влияют на тепло-массоперенос;
- 6) все физические параметры задачи (коэффициенты теплопроводности, диффузии и т. п.) постоянны в рассматриваемом диапазоне температур и давлений.

В качестве модели, описывающей состояние насыщения, выберем линейную зависимость концентрации от температуры

$$\bar{C} = d\bar{T} + b.$$

Коэффициенты d и b определяются давлением пара. Введем декартову систему координат (x', y') , ось x' которой совпадает по направлению со скоростью жидкости в пленке v , а начало координат лежит на твердой стенке. Примем, что в сечении $x' = 0$ температура жидкости T_0 и концентрация C_0 постоянны по сечению, причем C_0 меньше значения насыщения, соответствующего температуре T_0 , т. е. $C_0 < dT_0 + b$.

Решим задачу в предположении $v = \text{const}$. В безразмерной форме система уравнений, описывающая процесс тепло-массопереноса в пленке, и граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{Lu} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}; \end{cases} \quad (1)$$

$$T(0, y) = M_1 = 1 - \frac{T_{\text{ст}}}{T_0}; \quad (2)$$

$$C(0, y) = M_2 = 1 - \frac{dT_{\text{ст}} + b}{C_0}; \quad (3)$$

$$T(x, 0) = 0; \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad (5)$$

$$C(x, 1) = \frac{dT_0}{C_0} T(x, 1); \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = \frac{Ka}{Lu} \frac{C_0}{dT_0} \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=1}. \quad (7)$$

Здесь $Ka = r_a d / c_p$ — безразмерный комплекс — аналог критерия фазового превращения, так как $1/d$ имеет размерность температуры.

Условие (7) выражает тот факт, что все тепло, выделившееся при абсорбции, идет на нагревание жидкости путем теплопроводности.

Система уравнений (1) с граничными условиями (2) — (7) решается методом Фурье, т. е. решения представляются в виде разложений в ряды по собственным функциям:

$$T = \sum_n A_n X_n^{(1)}(x) Y_n^{(1)}(y), \quad (8)$$

$$C = \sum_n B_n X_n^{(2)}(x) Y_n^{(2)}(y). \quad (9)$$

Из системы уравнений (1) и граничных условий (4) и (5) получаем

$$Y_n^{(1)}(y) = \sin(k_n y); \quad Y_n^{(2)}(y) = \cos(\sqrt{Lu} k_n y), \quad (10)$$

$$X_n^{(1)}(x) = X_n^{(2)}(x) = \exp(-k_n^2 x), \quad (11)$$

где k_n — собственные значения.

Условия (6) и (7) дают следующие равенства:

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{dT_0}{C_0} \frac{Y_i^{(1)}(1)}{Y_i^{(2)}(1)}, \quad (12)$$

$$\frac{B_i}{A_i} = \frac{Lu}{Ka} \frac{dT_0}{C_0} \frac{Y_i^{(1)}(1)}{Y_i^{(2)}(1)}, \quad (13)$$

из которых следует трансцендентное уравнение для определения собственных значений k_n :

$$\frac{Y_n^{(1)}(1) Y_n^{(2)'}(1)}{Y_n^{(2)}(1) Y_n^{(1)'}(1)} = \frac{Lu}{Ka}$$

или

$$f(k_n) = \operatorname{tg}(k_n) \operatorname{tg}(\sqrt{Lu} k_n) + \frac{\sqrt{Lu}}{Ka} = 0. \quad (14)$$

Для вычисления коэффициентов разложений A_n, B_n получим соотношение ортогональности собственных функций.

Так как для $Y_i^{(1)}$ и $Y_j^{(1)}$ справедливы уравнения

$$Y_i''^{(1)} + k_i^2 Y_i^{(1)} = 0, \quad Y_j''^{(1)} + k_j^2 Y_j^{(1)} = 0 \quad (i \neq j),$$

то, умножая их соответственно на $Y_j^{(1)}$ и $Y_i^{(1)}$, вычитая полученные равенства одно из другого и интегрируя по y от 0 до 1 с использованием условия $Y_{i,j}^{(1)}(0) = 0$ (условие (4)), получим следующее равенство:

$$(k_i - k_j) \int_0^1 Y_i^{(1)} Y_j^{(1)} dy = Y_j'^{(1)}(1) Y_i^{(1)}(1) - Y_i'^{(1)}(1) Y_j^{(1)}(1). \quad (15)$$

Аналогичным образом, используя условие $Y_{i,j}^{(2)}(0) = 0$ (условие (5)), получим

$$\text{Lu} (k_i - k_j) \int_0^1 Y_i^{(2)} Y_j^{(2)} dy = Y_j'^{(2)}(1) Y_i^{(2)}(1) - Y_i'^{(2)}(1) Y_j^{(2)}(1). \quad (16)$$

Левую часть (16) умножим на

$$\frac{B_i}{A_i} \frac{B_j}{A_j} \frac{C_0}{dT_0} \frac{\text{Ka}}{\text{Lu}} \frac{C_0}{dT_0}.$$

Равенство сохранится, если, пользуясь соотношениями (12) и (13), первый

член правой части умножим на $\frac{Y_j^{(1)}(1) Y_i^{(1)}(1)}{Y_j^{(2)}(1) Y_i^{(2)}(1)}$, а второй на $\frac{Y_i'^{(1)}(1)}{Y_i'^{(2)}(1)} \times$
 $\times \frac{Y_j^{(1)}(1)}{Y_j^{(2)}(1)}$:

$$\frac{B_i}{A_i} \frac{B_j}{A_j} \frac{C_0}{dT_0} \text{Ka} \frac{C_0}{dT_0} (k_i - k_j) \int_0^1 Y_i^{(2)} Y_j^{(2)} dy = Y_j'^{(1)}(1) Y_i^{(1)}(1) -$$

$$- Y_i'^{(1)}(1) Y_j^{(1)}(1). \quad (17)$$

Сравнивая (15) и (17), получаем искомое соотношение ортогональности в виде

$$A_i A_j \int_0^1 Y_i^{(1)} Y_j^{(1)} dy - B_i B_j \text{Ka} \frac{C_0^2}{d^2 T_0^2} \int_0^1 Y_i^{(2)} Y_j^{(2)} dy = 0. \quad (18)$$

Из начальных условий (2), (3) и соотношения (18) следуют выражения для A_n , B_n :

$$A_n = \frac{M_1 \int_0^1 Y_n^{(1)} dy - M_2 \text{Ka} \frac{C_0}{dT_0} \frac{Y_n^{(1)}(1)}{Y_n^{(2)}(1)} \int_0^1 Y_n^{(2)} dy}{\int_0^1 Y_n^{2(1)} dy - \text{Ka} \frac{Y_n^{2(1)}(1)}{Y_n^{2(2)}(1)} \int_0^1 Y_n^{2(2)} dy},$$

$$B_n = \frac{dT_0}{C_0} \frac{Y_n^{(1)}(1)}{Y_n^{(2)}(1)} A_n.$$

После вычисления интегралов с использованием выражений (10) окончательно получаем

$$A_n = \left\{ 4 \left[\left(1 - \frac{T_{\text{ст}}}{T_0} \right) (1 - \cos k_n) - \left(1 - \frac{dT_{\text{ст}} + b}{C_0} \right) \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{Ka}{\sqrt{Lu}} \frac{C_0}{dT_0} \sin k_n \operatorname{tg} \sqrt{Lu} k_n \right] / \left[(2k_n - \sin 2k_n) - \right. \\ \left. - \frac{Ka}{\sqrt{Lu}} \frac{\sin^2 k_n}{\cos^2 \sqrt{Lu} k_n} (2\sqrt{Lu} k_n + \sin 2\sqrt{Lu} k_n) \right] \right\}, \quad (19)$$

$$B_n = \frac{dT_0}{C_0} \frac{\sin k_n}{\cos \sqrt{Lu} k_n} A_n. \quad (20)$$

Полученные таким образом решения позволяют вычислить все характеристики процесса тепломассопереноса: потоки тепла и массы через поверхность пленки, поток тепла через твердую стенку, средние по сечению значения температуры и концентрации:

$$Q_{\tau n} = \frac{g_{\tau} \delta}{\lambda T_0} \Big|_{y=\delta} = \sum_n A_n \exp(-k_n^2 x) Y_n^{(1)}(1) = \\ = \sum_n A_n \exp(-k_n^2 x) k_n \cos k_n; \quad (21)$$

$$Q_{\tau \text{ст}} = \frac{g_{\tau} \delta}{\lambda T_0} \Big|_{y=0} = \sum_n A_n \exp(-k_n^2 x) Y_n^{(1)}(0) = \\ = \sum_n A_n \exp(-k_n^2 x) k_n; \quad (22)$$

$$Q_m = \frac{g_m \delta}{\rho D C_0} \Big|_{y=\delta} = \sum_n B_n \exp(-k_n^2 x) Y_n^{(2)}(1) = \\ = - \sum_n B_n \exp(-k_n^2 x) \sqrt{Lu} k_n \sin \sqrt{Lu} k_n; \quad (23)$$

$$T_{\text{cp}} = \frac{\bar{T}_{\text{cp}}}{T_0} = \frac{1}{\delta T_0} \int_0^{\delta} \bar{T} dy = \frac{T_{\text{ст}}}{T_0} - \\ - \sum_n \frac{A_n}{k_n} \exp(-k_n^2 x) (\cos k_n - 1); \quad (24)$$

$$C_{\text{cp}} = \frac{\bar{C}_{\text{cp}}}{C_0} = \frac{1}{\delta C_0} \int_0^{\delta} \bar{C} dy = \frac{dT_{\text{ст}} + b}{C_0} + \frac{1}{\sqrt{Lu}} \times \\ \times \sum_n \frac{B_n}{k_n} \exp(-k_n^2 x) \sin k_n \sqrt{Lu}. \quad (25)$$

Таким образом, все характеристики процесса тепломассопереноса внутри пленки определяются четырьмя критериями Lu , Re , Pr , Ka и параметрами, характеризующими начальное состояние пленки (T_0 , C_0 , $T_{\text{ст}}$, d , b).

Соотношения (14), (19) — (25) были использованы для конкретных расчетов.

При получении численных результатов в каждом случае проверялась практическая сходимость соответствующих разложений. Так, например, при получении результатов, представленных на рис. 1, 2, суммировалось 30, 40 и 50 членов рядов. Оказалось, что все характеристики, вычисленные с использованием 40 и 50 членов, совпадают с точностью до 10^{-5} .

Для $Lu=1$ корни уравнения (14) выражаются в явном виде:

$$k_n = \text{arctg} \sqrt{-\frac{1}{Ka}} + \pi(n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

Для $Lu \neq 1$ уравнение (14) надо решать численно. Для упрощения решения рассматривался случай, когда \sqrt{Lu} равен целому числу. Тогда

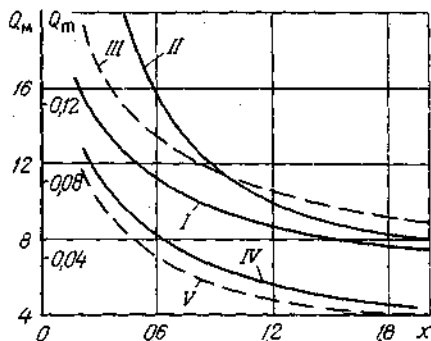
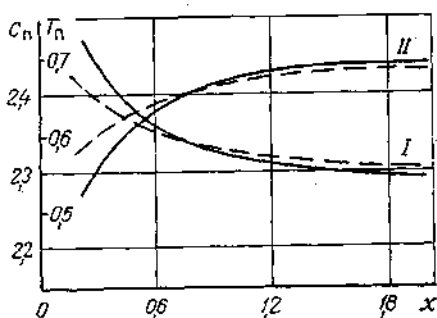


Рис. 1. Зависимость температуры и концентрации на поверхности пленки от x : I — температура; II — концентрация. Сплошная линия — точное решение, штриховая — приближенное [1]. $x = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{x'}{\delta}$

Рис. 2. Изменение безразмерных потоков тепла и массы вдоль пленки: I — поток тепла через твердую стенку (точное решение); II — поток тепла через поверхность пленки (точное решение); III — поток тепла через пленку (приближенное решение [1]); IV — поток массы через поверхность пленки (точное решение); V — поток массы через поверхность пленки (приближенное решение [1])

$f(k_n)$ — периодическая функция с периодом π , и поэтому для определения всех корней достаточно решить уравнение (14) на интервале $[0, \pi]$.

На рис. 1, 2 приводятся некоторые результаты расчетов для параметров, характерных для бромистолитиевых абсорберов, и показано сравнение точных решений с приближенными, полученными нами в [1].

Обозначения

T — температура; $T = (T - T_{ст})/T_0$ — безразмерная температура; C — концентрация абсорбируемого вещества в растворе (массовая доля); $T_{ст}$ — температура стенки; d, b — константы, определяющие состояние насыщения на границе раздела жидкость — пар; $C = (C - dT_{ст} - b)/C_0$ — безразмерная концентрация; $y = y'/\delta$; $x = x'/v\delta^2 = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{x'}{\delta}$;

$Lu = a/D$ — число Льюиса; $\text{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля; $\text{Re} = V\delta/\nu$ — число Рейнольдса; a — коэффициент температуропроводности; D — коэффициент диффузии; g_a — теплота абсорбции; c_p — удельная теплоемкость; λ — теплопроводность; ν — вязкость; ρ — плотность раствора; g_t, g_m — размерные потоки тепла и массы соответственно; $T_{ср}, C_{ср}$ — средние по сечению пленки значения температуры и концентрации; $Q_{т в}, Q_{т ст}$ — безразмерные потоки тепла через поверхность пленки и через твердую стенку; Q_m — безразмерный поток массы через поверхность пленки.

Nomenclature

T , temperature; T , dimensionless temperature; \bar{C} , absorbed substance concentration in the solution (mass fraction); $T_{ст}$, wall temperature; d , b , constants for a saturation state at the liquid-vapour interface; C , dimensionless concentration; Eu , Lewis number; Pr , Prandtl number; Re , Reynolds number; a , thermal diffusivity; D , diffusion coefficient; r_a , absorption heat; c_p , specific heat; λ , thermal conductivity; ν , viscosity; ρ , solution density; g_T , g_M , dimensional heat and mass flows, respectively; $T_{ср}$, $\bar{C}_{ср}$, film cross section-mean temperature and concentration; $Q_{тп}$, $Q_{тст}$, dimensionless heat fluxes through the film surface and the solid wall; Q_M , dimensionless mass flow through the film surface.

Figure Captions

Fig. 1. Temperature and concentration at the film surface vs x : *I*, temperature; *II*, concentration. Solid line, exact solution; dashed line, approximate solution [1].

Fig. 2. Variation of dimensionless heat and mass flows along the film: *I*, heat flux through the solid wall (exact solution); *II*, heat flux through the film surface (exact solution); *III*, heat flux through the film (approximate solution [1]); *IV*, mass flow through the film surface (exact solution); *V*, mass flow through the film surface (approximate solution [1]).

Summary

Exact solutions in the form of eigenfunction series expansions are obtained for the system of diffusion and heat conduction equations with interrelated boundary conditions that describe heat and mass transfer in liquid film absorption. Based on these solutions, the expressions are derived for the main heat and mass transfer characteristics.

Литература

1. Накоряков В. Е., Григорьева Н. И. ИФЖ, 32, № 3, 1977.