

Свойства непрерывных функций.

п. I. Лемма о сохранении знака.

Пусть  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и

$$y_0 = f(x_0) \neq 0. \quad (1)$$

Тогда существует  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$f(x) f(x_0) > 0, \quad (2)$$

если

$$|x - x_0| < \varepsilon. \quad (3)$$

Иными словами: существует  $\varepsilon$  - окрестность точки  $x_0$ , в которой функция сохраняет знак.

Доказательство.

Длз Предположим, для определенности, что  $y_0 > 0$ .

Положим

$$\delta = \frac{y_0}{2}. \quad (4)$$

По определению непрерывности, имеется  $\varepsilon > 0$ , такое, что из

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad (5)$$

следует

$$|f(x) - y_0| < \delta. \quad (6)$$

Из (6) находим

$$\frac{y_0}{2} < f(x) < \frac{3y_0}{2}. \quad (7)$$

Утверждение доказано. Оно справедливо и при  $y_0 < 0$ .

п. 2. Теорема о промежуточном значении. Теорема о нуле  
непрерывной функции.

Пусть  $f(x)$  непрерывна в сегменте  $[a, b]$  и  
 $f(a) \cdot f(b) < 0.$  (1)

Тогда найдется  $x_0$ .

$$a < x_0 < b \quad (2)$$

такое, что

$$f(x_0) = 0, \quad (3)$$

то есть непрерывная на сегменте функция, принимающая на его концах значения противоположного знака обращается в нуль во внутренней точке сегмента.

Доказательство.

Разделим отрезок  $[a, b]$  пополам точкой  $c$ .  
 Если  $f(c) \neq 0$ , то из отрезков  $[a, c]$ ,  $[c, b]$  один обладает тем же свойством, что и  $[a, b]$ , т.е. в его концах  $f(x)$  принимает значения противоположного знака. Обозначим этот отрезок через  $[a_1, b_1]$ . Продолжая аналогично дальше, получим последовательность вложенных отрезков

$[a_i, b_i]$ .

Если в какой-либо точке деления функция  $f(x)$  обращается в нуль, теорема доказана. Если это не так, то отрезки  $[a_i, b_i]$  обладают свойством:

$$f(a_i) \cdot f(b_i) < 0. \quad (4)$$



Последовательность  $[a_i, b_i]$  определяет точку  $x_0$ , удовлетворяющую условию (2). Докажем, что  $f(x_0) = 0$ . Если  $f(x_0) \neq 0$  по лемме о сохранении знака, найдется  $\varepsilon$ -окрестность  $x_0$ , в которой функция сохраняет знак. При  $n$  достаточно большом  $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . В силу (4)  $f(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  функция не сохраняет знака. Следовательно  $f(x_0) = 0$ . Теорема доказана.

Теорема о промежуточном значении:

Если функция определена на сегменте  $[a, b]$  и на концах его принимает значения  $A = f(a)$ ,  $B = f(b)$ ,  $A < B$ , то она на сегменте принимает любое промежуточное значение, то есть, если

$$A < C < B, \quad (5)$$

то найдется  $c$ , такое, что

$$a < c < b, \quad (6)$$

$$f(c) = C. \quad (7)$$

Образую новую функцию

$$g(x) = f(x) - C. \quad (8)$$

Ясно, что  $g(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и удовлетворяет условию

$$g(a) < 0, \quad g(b) > 0. \quad (9)$$

$g(x)$  удовлетворяет условию теоремы, и, следовательно, найдется  $c$ , удовлетворяющее условию (6), такое, что  $g(c) = 0$ . Отсюда следует (7). Утверждение доказано.

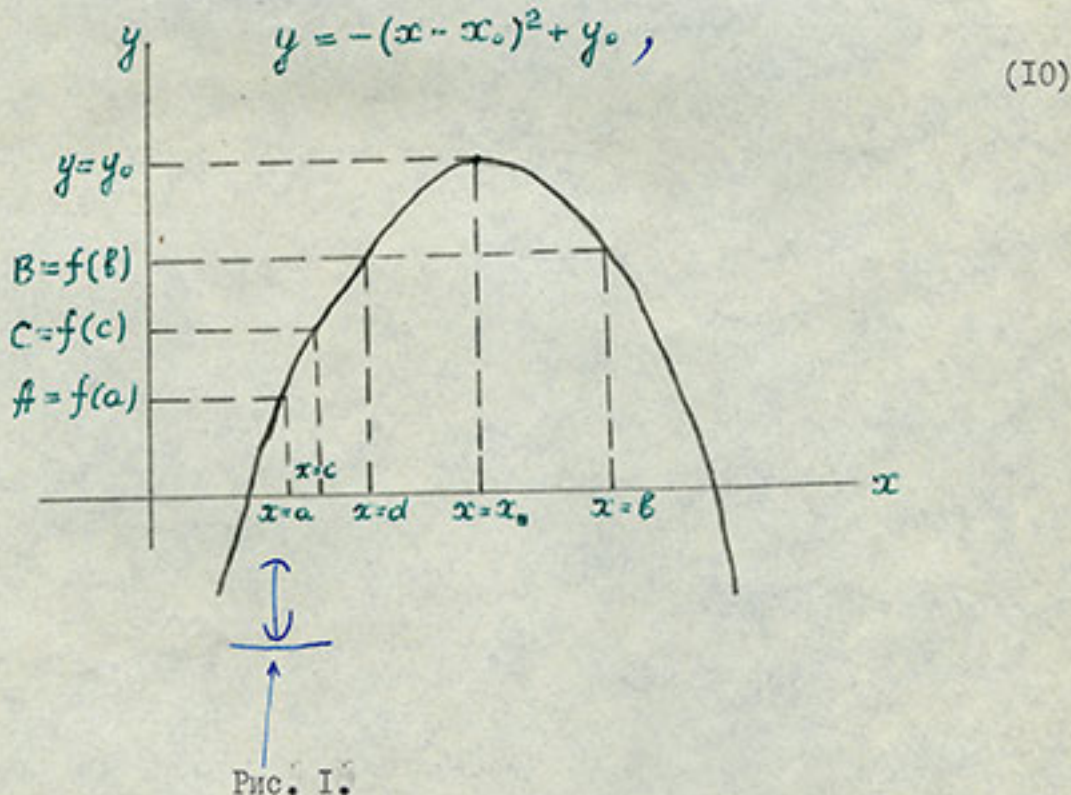
Замечание 1. Предположение  $A < B$  несущественно.

Утверждение справедливо и при  $A > B$ .

Замечание 2. Теорема о промежуточном значении, конечно, несправедлива для разрывных функций как показывает пример ступенчатой функции из лекции 20.

Замечание 3. Теорема о промежуточном значении не означает, что функция принимает на сегменте только промежуточные значения.

Рассмотрим, например, функцию (см. рис. I)



изображаемую перевернутой квадратичной параболой с вершиной в точке  $x_0, y_0$ .

Выбирая точки  $a, b$ , как указано на рисунке, мы видим, что промежуточные значения  $C$  принимаются в точках  $c \in (a, d)$  в точках интервала  $(d, b)$  принимаются значения вне сегмента  $[A, B]$



— 48 —

Отсюда следует, что найдется такое число  $a > 0$ , что при  $|x| \geq a$  \*  $g(x) > 0$  и справедливы неравенства:

$$P_3(a) = g(a) a^3 > 0,$$

(6)

$$P_3(-a) = g(-a) (-a)^3 < 0.$$

Задача 4а

п. 3. Вещественный <sup>корень</sup> ~~корень~~ многочлена третьей степени с вещественными коэффициентами.

Рассмотрим многочлен третьей степени

$$P_3(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_i$  - вещественные числа.

Докажем, что  $P_3(x)$  имеет вещественный корень  $x_0$ :

$$P_3(x_0) = 0. \quad (2)$$

Для определенности мы можем считать, что  $a_0 > 0$ .

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{P_3(x)}{x^3} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3}. \quad (3)$$

Эта функция определена в области  $G$ :

$$-\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty \quad (4)$$

и непрерывна в каждой точке  $G$ .

Нетрудно видеть, что

$$g(x) \rightarrow a_0 \text{ при } |x| \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Это означает, что найдется такое  $x_0 > 0$ , что при  $|x| \geq x_0$   $g(x) > 0$ .

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} P_3(x_0) &= g(x_0) x_0^3 > 0 \\ P_3(-x_0) &= g(-x_0) (-x_0)^3 < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

По теореме о непрерывной функции  
Отсюда следует существование корня  $x_0 \in (-x_0, x_0)$ :

$$P_3(x_0) = 0.$$

Утверждение доказано.

(2)

NB  
Доказать.

см 4а



Совершенно аналогично доказывается существование вещественного корня у многочлена нечетной степени.

п. 4. Корни полинома третьей степени.

Найдем корни полинома  $P_3(x)$  из (3.1), в котором положим для простоты,  $a_0 = 1$ .

Сделаем замену

$$x = y + h \quad (1)$$

с неизвестным  $h$ . После подстановки (1) в (3) находим

$$P_3(x) = P_3(y+h) = y^3 + (3h+a_1)y^2 + (3h^2+2ha_1+a_2)y + P_3(h). \quad (2)$$

Подберем  $h$  так, чтобы

$$(3h+a_1) = 0. \quad (3)$$

Тогда приходим к приведенной форме уравнения:

$$P_3(y+h) = Q_3(y) = y^3 + py + q, \quad (4)$$

где

$$p = 3h^2 + 2ha_1 + a_2, \quad q = P_3(h), \quad h = -\frac{a_1}{3}. \quad (5)$$

Мы свели задачу к нахождению корней полинома  $Q_3(y)$  (приведенная форма). Представим  $y$  в виде суммы двух неизвестных величин:

$$y = u + v. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) и приравнявая нулю, получаем:

$$(u^3 + v^3) + (3uv + p)(u+v) + q = 0. \quad (7)$$

Мы получили одно уравнение для двух величин  $u$ ,  $v$ . Пользуясь произволом в нашем распоряжении, полагаем

$$3uv + p = 0. \quad (8)$$

Тогда из (7) следует

$$u^3 + v^3 + q = 0. \quad (9)$$

Система уравнений (8), (9) относительно  $u$ ,  $v$  содержит только симметричные функции от  $u$ ,  $v$  и может быть сведена к уравнениям ~~(в радикалах)~~. Из уравнений (8), (9) следует:

$$u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \quad (10)$$

$$u^3 + v^3 = -q. \quad (11)$$

Возводя обе части (11) в квадрат и вычитая учетверенное уравнение (10), получим

$$(u^3 - v^3)^2 = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3. \quad (12)$$

Отсюда следует

$$u^3 - v^3 = \pm 2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}. \quad (13)$$

Наконец, разрешая (11), (13) относительно  $u^3$ ,  $v^3$ , находим

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad (14)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}. \quad (15)$$

Так как  $y = u + v$  выражается через  $u$ ,  $v$  симметрично, а выбор в формулах (14), (15) верхней и соответственно нижней пары знаков означает только переход  $u$  в  $v$  и обратно, то мы можем, для определенности, выбрать пару знаков, положив:



$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad (16)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}. \quad (17)$$

Итак, мы свели уравнение

$$Q_3(y) = y^3 + py + q = 0 \quad (18)$$

к двум двучленным уравнениям (16), (17). ~~т.е. мы можем решить~~ *мы будем говорить, что*  
уравнение (18) ~~(в радикалах)~~ *сведено к уравнению в радика-*  
Опираясь на наше исследование корней из 1. (см. лекцию № 17) *лах.*  
и теорему о существовании вещественного корня вещественного *много-*  
члена третьей степени, исследуем корни двучленного кубического  
уравнения:

$$z^3 = a. \quad (19)$$

Если  $a$  — вещественное положительное число, то имеется веществен-  
ный (положительный) корень  $z_1 > 0$  уравнения (19). Мы его обо-  
значим  $\sqrt[3]{a}$  и называем арифметическим значением корня.

Если  $a < 0$ , то имеется отрицательный вещественный корень  $z_1 < 0$ , равный

$$z_1 = -\sqrt[3]{|a|}. \quad (20)$$

Остальные корни представляются в виде

$$z_2 = z_1 \varepsilon_2, \quad z_3 = z_1 \varepsilon_3, \quad (21)$$

где

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \frac{\cos 2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\cos 4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \quad (22)$$

суть корни уравнения  $z^3 = 1$ .

Если

$$a = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \rho > 0 \quad (23)$$

есть произвольное комплексное число, то корни уравнения (I9) представляются в виде:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[3]{p} \left( \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right), \\ Z_2 &= Z_1 \cdot \varepsilon_2, \\ Z_3 &= Z_1 \cdot \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\sqrt[3]{p}$  есть арифметическое значение корня кубического из  $p > 0$ .

Перейдем к уравнениям (I6), (I7)

Здесь возможны два основных случая в зависимости от того, являются **правые** части уравнений (I6), (I7) вещественными или комплексными.

Предположим, что

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0. \quad (25)$$

Тогда правые части (I6), (I7) вещественны и корни (I6), (I7) имеют вид

$$u_1, u_2 = u_1 \cdot \varepsilon_2, \quad u_3 = u_1 \cdot \varepsilon_3; \quad (26)$$

$$v_1, v_2 = v_1 \cdot \varepsilon_2, \quad v_3 = v_1 \cdot \varepsilon_3; \quad (27)$$

где  $u_1, v_1$  - вещественные корни уравнений (I6), соответственно (I7).

Корни  $y$  уравнения (I8) представляются суммами  $u_i + v_j$  во всевозможных комбинациях:

$$y = u_i + v_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Из этих комбинаций мы отбираем те, которые удовлетворяют условию (8):



$$u_i \cdot v_j = -\frac{p}{3} \quad (29)$$

Отсюда следует, что  $u_i, v$  должны быть или вещественными, или комплексными, но дающими в произведении вещественное число.

Принимая во внимание, что  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  — комплексно сопряженные и в <sup>45</sup>произведении дают 1, получаем следующие комбинации

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1, \\ y_2 &= u_2 + v_3, \\ y_3 &= u_3 + v_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Корень  $y_1$  является вещественным,

$y_2, y_3$  — комплексными.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -\tau \leq 0. \quad (31)$$

Тогда правые части уравнений (I6), (I7) комплексно сопряженные.

~~формы~~

В случае, когда  $\tau = 0$  правые части (I6), (I7) вещественные и равны, т.е. также сопряженные.

Положим

$$-\frac{q}{2} + \sqrt{-\tau} = -\frac{q}{2} + i\sqrt{\tau} = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (32)$$

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{-\tau} = -\frac{q}{2} - i\sqrt{\tau} = \rho (\cos \varphi - i \sin \varphi). \quad (33)$$

Тогда для  $u_i, v_i$ , получаем представления:

$$u_1 = \sqrt[3]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right), \quad u_2 = u_1 \varepsilon_2, \quad u_3 = u_1 \varepsilon_3; \quad (34)$$

$$v_1 = \sqrt[3]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi}{3} - i \sin \frac{\varphi}{3} \right), \quad v_2 = v_1 \varepsilon_2, \quad v_3 = v_1 \varepsilon_3. \quad (35)$$

Попрежнему справедливы формулы (30), но теперь  $u_1, u_1'$  - комплексно сопряженные, так же как  $u_2, u_2'$ ;  $u_3, u_3'$ .

Отсюда следует, что все три корня  $y_1, y_2, y_3$  - вещественные.

Итак, мы нашли явные алгебраические выражения для корней уравнения третьей степени и попутно показали, что всегда имеется один вещественный корень.

#### п. 5. Корни уравнения $n$ - ой степени.

Указанный чисто алгебраический способ нахождения корней общего уравнения третьей степени принадлежит итальянскому математику Кардану ( $\rightarrow$ ). Его ученик Феррари нашел формулу решения в радикалах общего уравнения 4-й степени. Дальнейшие поиски решения общего уравнения 5-й степени и выше степеней были бесплодными, пока норвежский математик Абель не доказал, что уравнение 5-й степени, за исключением частных случаев, не разрешимо в радикалах.

Наконец, французский математик Галуа ~~нашел~~ <sup>нашел</sup> критерий разрешимости в радикалах для произвольного уравнения  $n$  - ой степени и доказал, что как правило, уравнение  $n$  - ой степени не разрешимо в радикалах. Практически это обстоятельство не играет роли, т.к. уже для уравнений 4-й степени удобнее пользоваться приближенными методами определения корней, не связанными с формулами решения в радикалах.

Однако, теоретически, проблема Галуа, то есть проблема различения разрешимых (в радикалах) и не разрешимых алгебраических уравнений, не потеряла своего значения и сейчас. Дело в том, что в основе теории Галуа лежит метод исследования



свойств конечных групп, который может быть перенесен на другие объекты.

Так, например, решая вопрос о том, интегрируется ли, в определенном смысле, система дифференциальных уравнений, мы приходим к задачам теории групп, весьма близким к теории Галуа.

Интересующимся читателям мы рекомендуем популярное изложение теории Галуа в монографии М.М.Постникова "Теория Галуа".

Свойства многочленов.п. I. Комплексно сопряженные корни вещественного многочлена.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами  $a_i$  :

$$\operatorname{Im} a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Справедлива

Лемма о сопряженных значениях.

Если  $z$ ,  $\bar{z}$  — два комплексно сопряженных числа,  $P_n(z)$  — вещественный полином (I), то  $P_n(z)$ ,  $P_n(\bar{z})$  — комплексно сопряжены:

$$P_n(\bar{z}) = \overline{P_n(z)}. \quad (3)$$

Доказательство:

Представим  $z, \bar{z}$  в тригонометрической форме

$$z = x + iy = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (4)$$

$$\bar{z} = x - iy = \rho [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = \rho [\cos \varphi - i \sin \varphi]. \quad (5)$$

Подставляя  $z$  в (I) и пользуясь формулой Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (6)$$

получаем

$$P_n(z) = A + iB, \quad (7)$$

где



$$A = \operatorname{Re} P_n(z) = a_0 \rho^n \cos n\varphi + a_1 \rho^{n-1} \cos(n-1)\varphi + \dots + a_{n-1} \rho \cos \varphi + a_n, \quad (7)$$

$$B = \operatorname{Im} P_n(z) = a_0 \rho^n \sin n\varphi + a_1 \rho^{n-1} \sin(n-1)\varphi + \dots + a_{n-1} \rho \sin \varphi + a_n. \quad (8)$$

Аналогично, подставляя (5) в (I), и принимая во внимание, что  $\cos \theta$  есть четная, а  $\sin \theta$  нечетная функция  $\theta$  т.е. выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos \theta, \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta \end{aligned} \quad (9)$$

находим:

$$P_n(\bar{z}) = A - iB. \quad (10)$$

Лемма доказана.

Как следствие из доказанной леммы имеем:

Если  $z$  есть корень  $P_n(z)$ , то  $\bar{z}$  есть также корень  $P_n(\bar{z})$ .

Действительно, если

$$P_n(z) = A + iB = 0, \quad (11)$$

то отсюда следует

$$A = 0, \quad B = 0. \quad (12)$$

Но тогда

$$P_n(\bar{z}) = A - iB = 0. \quad (13)$$

Утверждение доказано.

п.2. Степенные функции с целым положительным показателем.

Рассмотрим простейшие многочлены вида:

$$y = x^n, \quad (I)$$

где  $n$  - натуральное число ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Функции (I) мы будем называть также степенными функциями с целым положительным показателем. Установим некоторые свойства этих функций.

I. Область  $X$  определения функций (I) есть вся вещественная ось:

$$X = (-\infty, \infty). \quad (2)$$

Область  $Y$  значений функций (I) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} n=0, & \quad Y = \{y=1\}; \\ n=2k+1, & \quad Y = (-\infty, \infty), k=0, 1, 2, \dots; \\ n=2k, & \quad Y = [0, \infty), k=1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (3)$$

2.  $y = x^{2k}$  ( $k=0, 1, \dots$ ) есть четная функция  $x$  :

$$y(-x) = y(x). \quad (4)$$

В этом случае график симметричен относительно оси  $x$  .

$y = x^{2k+1}$  ( $k=0, 1, \dots$ ) есть нечетная функция  $x$  :

$$y(-x) = -y(x). \quad (5)$$



В этом случае график симметричен относительно начала координат (см.рис.1).

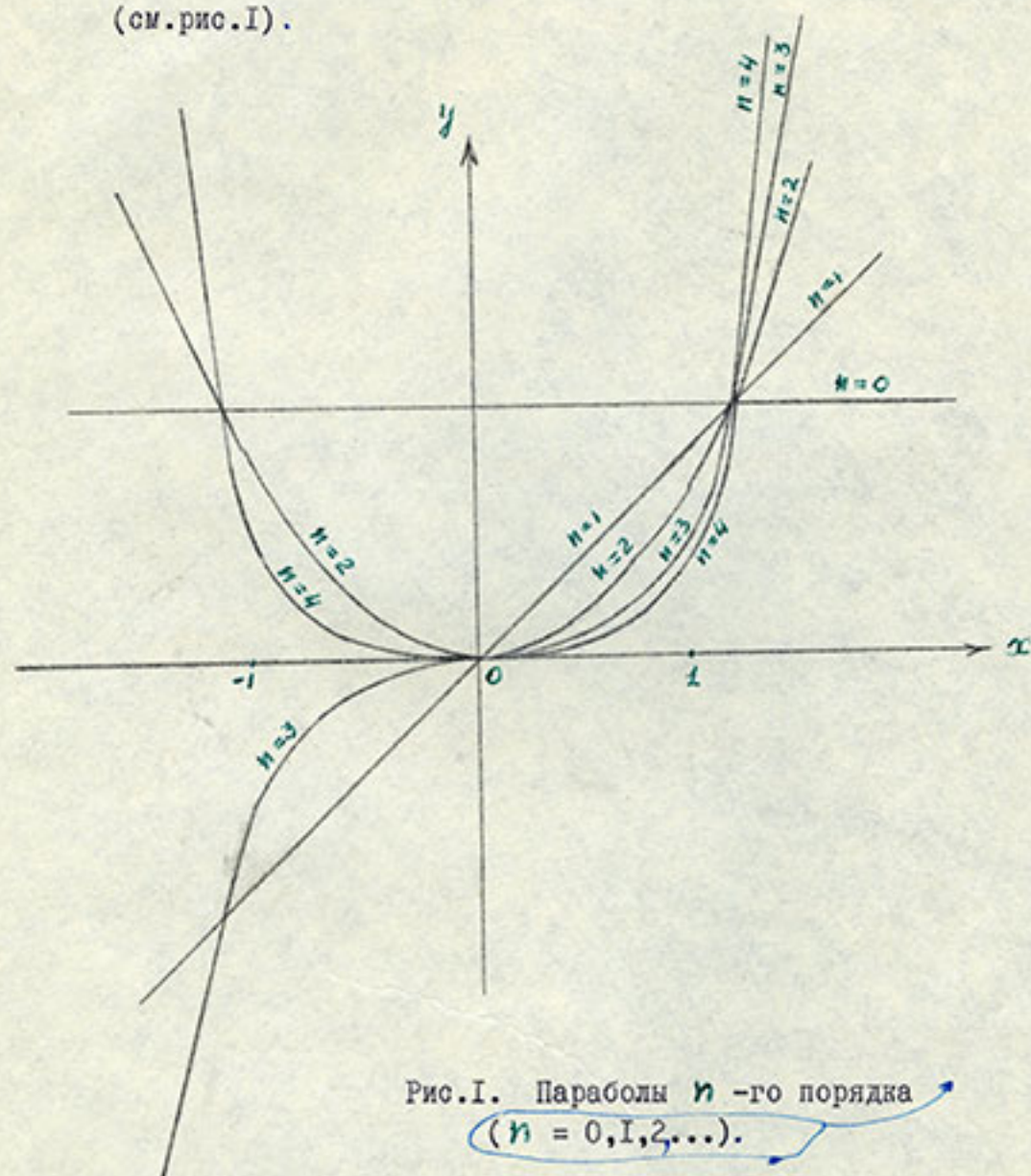
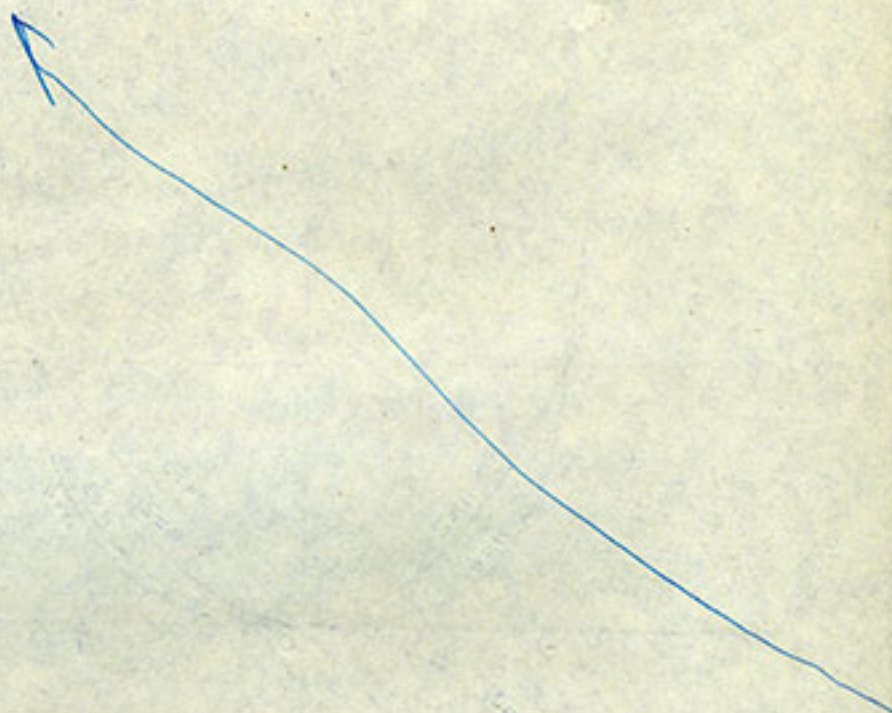


Рис.1. Параболы  $n$ -го порядка  
( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

3. Функции  $y = x^{2k+1}$  во всей области существования  $x$  и функции  $y = x^{2k}$  в полуинтервале  $[0, \infty)$  удовлетворяют условию:

$$(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) > 0, \quad y_i = y(x_i); \quad i = 1, 2; \quad x_2 \neq x_1 \quad (5)$$

функции монотонно возрастающие или монотонно  
убывающие, мы будем также называть  
строго монотонными.





т.е. большим значениям аргумента отвечают большие значения функции. Функции  $y(\tilde{x})$  удовлетворяющие условию (5), в области  $\mathcal{U}$  называются монотонно возрастающими в области  $\mathcal{U}$ . Функции  $y = x^{2k}$  в полуинтервале  $(-\infty, 0]$  удовлетворяют условию

$$(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) < 0, \quad y_i = y(x_i), \quad x_2 \neq x_1, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Функции  $y(x)$ , удовлетворяющие условию (6) в области  $\mathcal{U}$ , называются монотонно убывающими в области  $\mathcal{U}$ . Если вместо условия (5) выполняется более слабое:

$$(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \geq 0, \quad y_i = y(x_i), \quad x_2 \neq x_1, \quad i = 1, 2; \quad (5')$$

То функция  $y(x)$  называется монотонно не убывающей.

Если вместо (6) выполняется более слабое условие

$$(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \leq 0, \quad y_i = y(x_i), \quad x_2 \neq x_1, \quad i = 1, 2; \quad (6')$$

То функция  $y(x)$  называется монотонно не возрастающей.

### п.3. Многочлены второй степени.

Рассмотрим многочлен второй степени

$$y = P_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2. \quad (I)$$

Совокупность функций  $P_2(x)$  зависит от трех параметров  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и образует трехпараметрическое семейство функций. Покажем, что уравнение квадратичной параболы (I) с помощью преобразования сдвига может быть приведено к каноническому виду. Для определенности положим  $a_0 > 0$ .

Нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$y = P_2(x) = a_0(x - x_0)^2 + y_0, \quad (2)$$

где

$$x_0 = -\frac{a_1}{2a_0}, \quad y_0 = \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_0}. \quad (3)$$

Вводя новые переменные

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0. \quad (4)$$

т.е. применяя преобразования сдвига (см.рис.2), получаем каноническое уравнение параболы 2-го порядка

$$y' = a_0 x'^2. \quad (5)$$

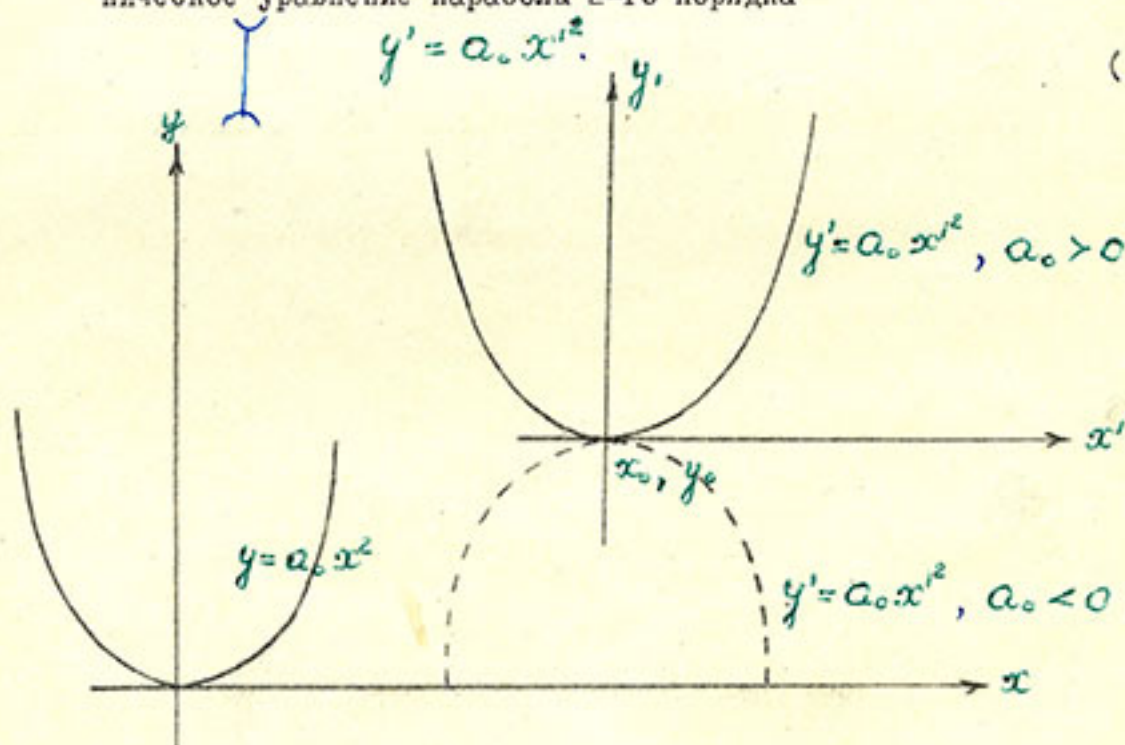


Рис.2. График параболы второго порядка.



Таким образом, осью симметрии параболы (I) является прямая

$$x = x_0 = -\frac{a_1}{2a_0}, \quad (6)$$

а вершиной - точка  $x_0, y_0$ .

В случае  $a_0 < 0$  ветви параболы обращены вниз (см. рис. 2).

Параболы  $y = a_0 x^2$ ,  $y' = a_0 x'^2$  отличаются только положением и при преобразовании сдвига накладываются одна на другую. Таким образом, трехпараметрическое семейство парабол (I), геометрически, с точностью до преобразования сдвига, зависит только от одного параметра  $a_0$ .

#### п. 4. Интерполяционная формула Лагранжа для многочлена 2-й степени.

Рассмотрим задачу: провести квадратичную параболу через заданные три точки  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ . Иными словами определить многочлен  $P_2(x)$ , принимающий в точках  $x_i$  значения  $y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Задача сводится к решению системы трех линейных уравнений

$$a_0 x_i^2 + a_1 x_i + a_2 = y_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (I)$$

в которой неизвестными являются коэффициенты  $a_0, a_1, a_2$ .

Покажем, что система (I) имеет единственное решение.

Определитель системы (I) имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Определитель такого рода называется определителем Вандермонда.

Вычисляя  $\Delta$  по правилу, указанному в лекции <sup>№ 10</sup> находим

$$\Delta = x_2 x_3 (x_2 - x_3) + x_1 x_3 (x_3 - x_1) + x_1 x_2 (x_1 - x_2) =$$

$$= -(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \neq 0.$$
(3)

Следовательно, решение (I) дается по формулам Крамера:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$
(4)

Мы укажем другой, более элегантный способ решения задачи (I).  
Присоединим к (I) равенство

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = y.$$
(5)

Уравнения (I), (5) представляют собой систему четырех ~~линей-~~ линейных уравнений относительно трех неизвестных  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ . Система (I), (5) является переопределенной и допускает решение при условии



$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x^2 & x & 1 & y \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Определитель (6) представляется через определители 3-го порядка разложением по элементам четвертого столбца:

$$\Delta = -y_1 \begin{vmatrix} x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Применяя формулу (3) к каждому из определителей 3-го порядка в правой части (7), разрешая (7) относительно  $y$  находим

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3. \quad (8)$$

Формула (8) дающая решение поставленной задачи, называется формулой Лагранжа.

## п. I. Формула Лагранжа.

На прошлой лекции мы решили задачу: провести параболу  $y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$  через три заданные точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ,  $x_1 < x_2 < x_3$ . (I)

Уравнение искомой параболы имеет вид:

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)} y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3. \quad (2)$$

Рассмотрим внимательно структуру этой формулы.

Множители при  $y_j (j=1, 2, 3)$  являются полиномами второй степени, они принимают значения 1 или 0 при  $x=x_j (j=1, 2, 3)$  (1 при  $x=x_i$ , 0 при  $x=x_j, j \neq i$ ). Отсюда следует, что

$$y(x_i) = y_i. \quad (3)$$

Симметрия формулы (2) позволяет решать следующую задачу:

Даны точки  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n+1} \quad (4)$$

и в этих точках заданы значения функции  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ .

Найти полином  $n$ -ой степени  $P_n(x)$ , принимающей в заданных  $x_i$  заданные значения  $y_i$ .

Решение дается формулой:

$$y = P_n(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} y_2 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\dots(x_{n+1}-x_n)} y_{n+1}. \quad (5)$$



Здесь  $Q_1(x), \dots, Q_{n+1}(x)$  — многочлены от  $x$   $n$ -ой степени, определяемые, по аналогии с формулой (2), выражениями:

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_{n+1})}, \quad i=1, \dots, n+1. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n+1. \quad (7)$$

Введем понятие символа Кронекера  $\delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ ;  
 $m$  — любое натуральное число.

Символ Кронекера  $\delta_{ij}$  есть матрица, определяемая соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 0, & i \neq j, \\ \delta_{ij} &= 1, & i = j, \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Учитывая (8), равенство (7) можно представить в виде

$$Q_i(x_j) = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, n+1. \quad (9)$$

Из формулы (9) и представления (5) следует

$$y(x_i) = y_i. \quad (10)$$

Таким образом, формула (5) решает поставленную задачу.

Представление (5) называется **формулой Лагранжа**.  
Формула Лагранжа полезна в различных расчетах как интерполяционная формула для произвольной функции  $f(x)$ .

Задачу можно поставить следующим образом. Пусть в точках  $x = x_i (i=1, \dots, n+1)$ ,  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$  заданы значения функции

$$y_i = f(x_i), \quad i=1, \dots, n+1 \quad (11)$$

но не известны значения функции в других точках. Предположим, что в сегменте  $[x_1, x_{n+1}]$   $f(x)$  может быть представлена полиномом  $n$ -ой степени. Тогда формула

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) Q_i(x), \quad (12)$$

где  $Q_i(x)$  берутся из (6), позволяет определить  $f(x)$  во всех точках сегмента  $[x_1, x_{n+1}]$ .

Формула (12) называется интерполяционной формулой Лагранжа. Формулой (12) можно пользоваться также для определения  $f(x)$  вне сегмента  $[x_1, x_{n+1}]$ . В этом случае она является формулой экстраполяции.

Заметим, что интерполяционная формула Лагранжа (5) остается справедливой и для комплексных полиномов. Задача может быть поставлена следующим образом. Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$  различные  $(n+1)$  точки комплексной плоскости. Требуется найти комплексный полином  $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ , принимающий в точках  $z_i$  заданные значения  $w_i$ :

$$P_n(z_i) = w_i, \quad i=1, \dots, n+1. \quad (13)$$

Решение задачи задается формулами:

$$P_n(z) = \sum_{i=1}^n Q_i(z) w_i, \quad (14)$$

$$Q_i(z) = \frac{(z-z_1) \dots (z-z_{i-1})(z-z_{i+1}) \dots (z-z_{n+1})}{(z_i-z_1) \dots (z_i-z_{i-1})(z_i-z_{i+1}) \dots (z_i-z_{n+1})} \quad (15)$$



вполне аналогичным формулам (5), (6)

п. 2. Единственность интерполяционного полинома Лагранжа.

Возникает вопрос о единственности многочлена  $n$ -ой степени, принимающего заданные значения  $y_l$  в точках  $x_l$ .

Мы докажем более общее утверждение о единственности комплексного многочлена

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad (I)$$

где  $a_l$  - комплексные числа,  $z$  - комплексный аргумент, принимающий в  $(n+1)$  точках  $z = z_l$  заданные значения  $w_l$  ( $l=1, \dots, n+1$ ).

При этом мы будем опираться на основную теорему алгебры (впервые доказана Гауссом):

Уравнение

$$P_n(z) = 0 \quad (2)$$

всегда имеет по крайней мере один комплексный корень. Этот корень, в частности, может быть и вещественным.

Мы убедились в верности этой теоремы в частном случае вещественного полинома нечетной степени, доказав существование вещественного корня. Она также верна для полиномов 2-й и 3-й степени, для двучленного уравнения  $n$ -ой степени, как доказывают формулы решения. В общем случае доказательство этой теоремы довольно сложно, и мы отсылаем читателя к монографиям [n-ой степени]

Из основной теоремы следует, что любой комплексный полином имеет  $n$  корней.

Докажем предварительно теорему Безу:

Полином  $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  может быть представлен в виде

$$P_n(z) = (z - a) P_{n-1}(z) + P_n(a), \quad (3)$$

НЗД  
не определены  
вещественного  
уравнения  
НЗД  
ср

где  $a$  — произвольное комплексное число,  $P_{n-1}(z)$  — некоторый комплексный полином. Заметим, что  $P_n(a)$  есть остаток деления  $P_n(z)$  на  $z-a$ .

Доказательство.

Будем искать  $P_{n-1}(z)$  в виде

$$P_{n-1}(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} \quad (4)$$

где комплексные коэффициенты  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  подлежат определению.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (z-a) P_{n-1}(z) &= (z-a)(b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}) = \\ &= b_0 z^n + (b_1 - b_0 a) z^{n-1} + \dots + (b_{n-1} - b_{n-2} a) z - b_{n-1} a. \end{aligned} \quad (5)$$

Положим

$$P_n(z) = (z-a) P_{n-1}(z) + R, \quad (6)$$

где остаток  $R$  подлежит определению.

Для того, чтобы равенство (6) выполнялось тождественно относительно  $z$ , достаточно равенства коэффициентов при равных степенях в левой и правой частях (6). Отсюда находим, приравняв коэффициенты при степенях  $z^n, z^{n-1}, \dots, z$



$$\begin{aligned}
 b_0 &= a_0, \\
 b_1 &= a_0 a + a_1, \\
 b_k &= a_0 a^k + a_1 a^{k-1} + \dots + a_k, \\
 &\dots \\
 b_{n-1} &= a_0 a^{n-1} + a_1 a^{n-2} + \dots + a_{n-1}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Наконец, для свободного члена получаем

$$a_n = -ab_{n-1} + R. \tag{8}$$

Отсюда следует:

$$R = ab_{n-1} + a_n = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_n = P_n(a). \tag{9}$$

Теорема доказана.

Из теоремы Безу следует, что если  $a = z_1$  — корень  $P_n(z)$ , то  $R = P_n(z_1) = 0$

и

$$P_n(z) = (z - z_1) \cdot P_{n-1}(z). \tag{10}$$

Но по теореме Гаусса всегда имеется корень  $z_1$  полинома  $P_n(z)$  и, следовательно, представление (10) всегда возможно.

Применяя к  $P_{n-1}(z)$  теоремы Гаусса и Безу, имеем:

$$P_{n-1}(z) = (z - z_2) P_{n-2}(z). \tag{11}$$

Продолжая таким образом дальше, получаем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
 P_n(z) &= (z - z_1) P_{n-1}(z), \\
 P_{n-1}(z) &= (z - z_2) P_{n-2}(z), \\
 &\dots \\
 P_1(z) &= (z - z_n) P_0(z) = a_0 (z - z_n),
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

где  $P_n(z)$  - полином  $n$ -ой степени,  $P_0(z) = a_0$ .

Перемножая равенства (12), находим

$$P_n(z) = a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n). \quad (13)$$

~~Теперь можно,  $P_0(z) = a_0$~~

Мы показали, что любой комплексный полином  $P_n(z)$  представляется в виде (13), где  $z_1 \dots z_n$  - корни  $P_n(z)$ .  
Заметим, что среди  $z_i$  могут быть равные.

Если среди  $n$  корней  $z_1 \dots z_n$  только  $r$  различных, то мы имеем

$$P_n(z) = a_0(z-z_1)^{l_1}(z-z_2)^{l_2}\dots(z-z_r)^{l_r} \quad (14)$$

$$l_1 + l_2 + \dots + l_r = n. \quad (15)$$

Корни  $z_i$  с  $l_i > 1$  называются кратными, с  $l_i = 1$  простыми.

Следствие. Полином  $P_n(z)$  степени не выше  $n$ , имеющий  $(n+1)$  различных корней  $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ , равен тождественно нулю.

Действительно, для  $P_n(z)$  справедливо представление (13). Подставляя в (13)  $z = z_{n+1}$  получим

$$0 = P_n(z_{n+1}) = a_0(z_{n+1}-z_1)\dots(z_{n+1}-z_n). \quad (16)$$

Так как  $(z_{n+1}-z_1)\dots(z_{n+1}-z_n) \neq 0$ , то из (16) следует

$$a_0 = 0 \quad (17)$$



т.е.  $P_n(z) \equiv 0,$

(18)

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что имеется только один полином  $P_n(z)$   $n$ -ой степени принимающий в  $(n+1)$ -ой различных точках  $z_1, \dots, z_{n+1}$  значения

$$P_n(z_i) = w_i, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (19)$$

Предположим, что имеется еще полином  $Q_n(z)$  степени  $n$ , удовлетворяющий условию

$$Q_n(z_i) = w_i, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (20)$$

Полином  $R(z) = \frac{P_n(z) - Q_n(z)}{z - z_i}$

$$R(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{P_n(z) - Q_n(z)}{z - z_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (21)$$

имеет степень не выше  $n$  и удовлетворяет условию

$$R(z_i) = \frac{P_n(z_i) - Q_n(z_i)}{z_i - z_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (22)$$

т.е. имеет  $(n+1)$  различных корней  $z_1, \dots, z_{n+1}$ .

По доказанному

$$R(z) \equiv 0, \quad P_n(z) \equiv Q_n(z). \quad (23)$$

Утверждение доказано.

Таким образом, мы доказали единственность интерполяционного полинома Лагранжа.

Формула Лагранжа обладает тем недостатком, что если мы решали задачу для  $n$  точек, а затем хотим решить для  $(n+1)$  точек, то полиномы  $Q_i$  будут иными.

Существует другая интерполяционная формула - формула Ньютона - которая этим недостатком не обладает.

п. 3. Интерполяционный полином Ньютона.

Рассмотрим сначала в качестве примера полином второй степени. Если через точки

$$M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2) \quad (I)$$

требуется провести параболу 2-го порядка

$$y = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \quad (2)$$

то по Ньютону, полином (2) представляется в виде

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1), \quad (3)$$

где коэффициенты  $A_0, A_1, A_2$  подлежат определению. Условия прохождения параболы (3) через точки  $M_i$  приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0, \\ A_0 + (x_1 - x_0) A_1 &= y_1, \\ A_0 + (x_2 - x_0) A_1 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) A_2 &= y_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Матрица системы (4) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{vmatrix} \quad (5)$$



Коэффициенты в матрице (5), расположенные выше диагонали, равны нулю. Матрицы такого рода называются **треугольными**. Преимущество уравнений с треугольными матрицами (5) состоит в том, что неизвестные  $y_0, y_1, y_2$  определяются последовательно, один за другим.

Разрешая таким образом уравнения (4), находим

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0, \\ A_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \\ A_2 &= \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поставим теперь в общем виде задачу для определения полинома Ньютона.

Пусть даны  $(n+1)$  точек  $x_i$ :

$$x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n. \quad (7)$$

Требуется построить полином

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + A_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}), \quad (8)$$

принимаящий в точках  $x = x_i$  значения  $y = y_i$ .

Для определения  $A_i$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
 A_0 &= y_0, \\
 A_0 + A_1(x_1 - x_0) &= y_1, \\
 A_0 + A_1(x_2 - x_0) + A_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= y_2, \\
 &\dots \\
 A_0 + A_1(x_n - x_0) + A_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + A_n &= y_n
 \end{aligned}$$

с треугольной матрицей

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 1 & x_1 - x_0 & \dots & 0 \\
 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \dots 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \dots (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})
 \end{vmatrix} \quad (10)$$

Система (9) позволяет определять последовательно коэффициенты  $A_0, A_1, \dots, A_n$  ; при этом  $A_i$  определяется ~~каждый~~ ~~на~~ всегда, т.е. определив  $A_i$  ( $i=0, \dots, n$ ) для  $(n+1)$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , при определении  $A_i$  ( $i=0, \dots, n+1$ ) для  $(n+2)$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ , мы получим те же коэффициенты  $A_0, \dots, A_n$  и только присоединим к ним коэффициент  $A_{n+1}$ .

Мы не будем рассматривать в общем виде формулу Ньютона для произвольных  $(n+1)$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$  ограничившиеся частным случаем равноотстоящих точек. Но и в этом



Следует нам потребуются некоторые предварительные понятия.

Вспомогательная  
Лемма  
№ 10

#### 1.4. Оператор сдвига.

Мы уже рассматривали (см. лемма № 10) преобразование в плоскости  $x, y$ . Каждой точке  $M$  с радиус-вектором  $\vec{r} = (x, y)$  преобразование сдвига  $T_{\vec{a}}$  на вектор  $\vec{a}$  ставит в соответствие точку  $M'$  с радиус-вектором

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}. \quad (1)$$

Для координат  $x', y'$  точки  $M'$  получаем

$$x' = x + b,$$

$$y' = y + c,$$

где  $b, c$  — координаты вектора  $\vec{a}$  (см. рис. 1).

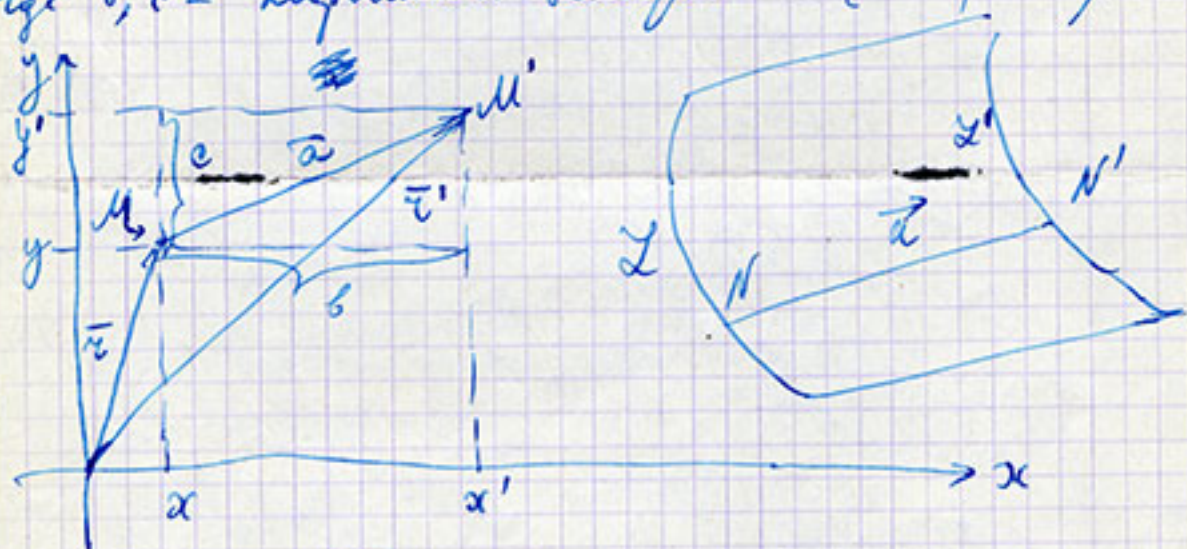


Рис. 1. Преобразование сдвига.

Преобразование сдвига можно рассматривать как функцию, которая, по формулам (2), ставит в соответствие точке  $M(x, y)$  точку  $M'(x', y')$ . Если изобразить векторы  $\vec{r}, \vec{r}', \vec{a}$  комплексными числами



В лекции 20, п. 3. мы уже говорили о том, что функции  $w = f(z)$ , которая называется отображением ~~на~~ ~~в~~ ~~на~~ ~~в~~

$z \rightarrow w, z \in Z, w \in W$  определяет (индуцирует)

отображение подмножества  $A \subset Z$  в подмножество  $B \subset W$ :  $B = f(A)$ .



$$z = x + iy, \quad z_1 = x' + iy', \quad w = b + ic, \quad (3)$$

то формула (2) примет особо простой вид

$$z_1 = z + w \quad (4)$$

и преобразование сдвига изображается простейшим комплексным полиномом первой степени. Областью определения и значений является вся плоскость  $x, y$  (или совокупность всех комплексных чисел).

Возьмем теперь в качестве таких подмножеств кривых  $L$  в плоскости  $x, y$ , которое индуцируется преобразованием сдвига. Если  $L$  — исходная кривая, то ее образ  $L'$  есть кривая, каждая точка  $N'$  которой получается из некоторой точки  $N$  кривой  $L$  преобразованием сдвига.

Если рассматривать кривую  $L$  как элемент множества всех кривых, то преобразование сдвига индуцирует некоторое соответствие

$$L \rightarrow L' \quad (5)$$

и мы можем рассматривать преобразование сдвига как функцию, определенную на элементах  $L$  кривых  $L$ . Множество кривых в плоскости является более богатым и сложным, чем множество точек.

Поэтому функцию, определяющую закон соответствия (5) мы будем называть специальным термином — оператор.

Мы рассмотрим для определенности, оператор сдвига в случае, когда вектор  $\vec{a} = (b, c)$  имеет только одну компоненту, отличную от нуля — компоненту по оси  $x$ .

М. I.  
функция  
как отображе-  
ние.

N 33

Мы полагаем

$$\bar{a} = (h, 0) \quad (6)$$

и обозначаем оператор сдвига  $T_{\bar{a}}$  через  $T_h$ . ~~(или просто)~~

~~$T_{\bar{a}}$~~  В качестве кривых  $\mathcal{L}$  мы будем рассматривать график функции  $y = f(x)$ . Соответствующие формулы преобразования примут вид:

$$\begin{aligned} x' &= x + h, \\ y' &= y. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда кривая  $y = f(x)$  перейдет в кривую

$$y' = y = f(x+h). \quad (8)$$

Таким образом, оператор сдвига  $T_h$  переводит функцию  $f(x)$  в функцию  $f(x+h)$ . Мы будем обозначать

$$f(x) \xrightarrow{T_h} f(x+h) \quad (9)$$

или

$$f(x+h) = T_h f(x). \quad (10)$$

Рассмотрим два оператора сдвига  $T_{h_1}$ ,  $T_{h_2}$ :

$$f(x+h_1) = T_{h_1} f(x), \quad f(x+h_2) = T_{h_2} f(x). \quad (11)$$

Очевидны соотношения

$$T_{h_1+h_2} f(x) = f(x+h_1+h_2) = T_{h_1} f(x+h_2) = T_{h_1} T_{h_2} f(x), \quad (12)$$

$$T_{h_2+h_1} f(x) = f(x+h_2+h_1) = T_{h_2} f(x+h_1) = T_{h_2} T_{h_1} f(x). \quad (13)$$



Мы их можем записать в символической форме

$$T_{h_1 + h_2} = T_{h_1} \cdot T_{h_2}, \quad (I4)$$

$$T_{h_2 + h_1} = T_{h_2} \cdot T_{h_1}. \quad (I5)$$

Из (I4), (I5) следует

$$T_{h_1} \cdot T_{h_2} = T_{h_2} \cdot T_{h_1}. \quad (I6)$$

Таким образом, последовательное применение операторов сдвига дает вновь оператор сдвига, и можно ввести композицию (умножение) двух операторов сдвига по формулам (I4), (I5), обладающую свойством коммутативности в силу (I6). Нетрудно убедиться, что произведение сдвига является ассоциативным:

$$T_{h_1} (T_{h_2} \cdot T_{h_3}) = (T_{h_1} \cdot T_{h_2}) T_{h_3} = T_{h_1} \cdot T_{h_2} \cdot T_{h_3}. \quad (I6')$$

Мы введем единичный или тождественный оператор  $E$  :

$$E f(x) = f(x), \quad (I7)$$

отвечающий значению  $h = 0$

$$T_0 = E. \quad (I8)$$

Из (I4), (I5) имеем:

$$E = T_0 = T_h \cdot T_{-h} = T_{-h} T_h, \quad (I9)$$

$$T_h = T_h \cdot E = E \cdot T_h. \quad (20)$$

№ 34.

Таким образом, множество операторов  $T_h$  образует коммутативную группу, в которой  $T_h$  является обратным элементом по отношению к  $T_h$  :

$$T_h = T_h^{-1}, \quad (21)$$

а  $E$  играет роль групповой единицы.

п. 5. Формула бинома Ньютона.

Рассмотрим применение оператора сдвига  $T_h$  к функции

$$f(x) = x^n. \quad (1)$$

По определению имеем:

$$T_h x^n = (x+h)^n. \quad (2)$$

Положим, для определенности  $h=1$  и представим полином (2) в виде:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad (3)$$

где коэффициенты  $C_n^k$  (биномиальные коэффициенты) подлежат определению.

Рассмотрим простейшие случаи

$$\begin{aligned} n=0: (1+x)^0 &= 1, C_0^0 = 1; \\ n=1: (1+x) &= 1+x, C_1^0 = 1, C_1^1 = 1; \\ n=2: (1+x)^2 &= 1+2x+x^2, C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1; \\ n=3: (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3, C_3^0 = 1, C_3^1 = 3, C_3^2 = 3, C_3^3 = 1; \end{aligned} \quad (4)$$



$$n=4: (1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4,$$

$$C_4^0=1, C_4^1=4, C_4^2=6, C_4^3=4, C_4^4=1;$$

$$n=5: (1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5,$$

$$C_5^0=1, C_5^1=5, C_5^2=10, C_5^3=10, C_5^4=5, C_5^5=1.$$

Нетрудно установить рекуррентный закон для коэффициентов.

Расположим коэффициенты  $C_n^k$  в виде треугольника (треугольник Паскаля):

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Треугольник Паскаля позволяет просто получить биномиальные коэффициенты. Нетрудно видеть, что коэффициент в треугольнике Паскаля равен сумме двух верхних - слева и прямо над ним, т.е. справедливо рекуррентное соотношение.

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \quad (5)$$

и соотношения

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \quad (5')$$

Докажем справедливость (5) и (5').

~~(5')~~

Принимая во внимание (3), имеем:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (1+x)(1+x)^{n-1} = \\
 &= (1+x) \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k+1} = \\
 &= C_{n-1}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k x^k + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-1}^k x^{k+1} + C_{n-1}^{n-1} x^n = \\
 &= C_{n-1}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k x^k + \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} x^k + C_{n-1}^{n-1} x^n = \\
 &= C_{n-1}^0 + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) x^k + C_{n-1}^{n-1} x^n.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях (6), приходим к соотношениям (5). Получим теперь ясное выражение для коэффициентов  $C_n^k$ .

Нетрудно видеть, что

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{7}$$

Положим, в качестве предположения индукции

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{8}$$

где под символом  $m!$  понимается произведение первых чисел натурального ряда:

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \tag{9}$$

и кроме того, положим

$$0! = 1 \tag{10}$$

Справедливость предположения индукции (8) докажем, пользуясь рекуррентным соотношением (5).



Предположим, что выражение (8) справедливо для всех  $n \leq m-1$  и всех  $k \leq n$ .

Докажем, что оно справедливо и для  $n = m$ .

Действительно:

$$\begin{aligned} C_m^k &= C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} + \frac{(m-1)!}{k!(m-k-1)!} \\ &= \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} \left( \frac{1}{m-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \end{aligned}$$

Предположение индукции доказано. Выпишем окончательно формулу бинома Ньютона:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad (10)$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что формулу бинома можно записать в общем виде так:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k h^{n-k}. \quad (12)$$

Вообще, если  $a, b$  — два элемента кольца, коммутативного по операциям сложения и умножения, можно записать:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}. \quad (13)$$

Формула бинома Ньютона (13) имеет очень большое значение и применяется в теории вероятностей, статистической физике, разностных методах.

п. I. Операторы разности и разностного отношения.

Рассмотрим два оператора сдвига  $T_{h_1}$ ,  $T_{h_2}$ .

Для них мы определили в прошлой лекции умножение по правилу:

$$T_{h_1} \cdot T_{h_2} = T_{h_1+h_2}. \quad (1)$$

Определим теперь сложение для операторов  $T_{h_1}$ ,  $T_{h_2}$ .

Сумма  $T_{h_1} + T_{h_2}$  операторов  $T_{h_1}$ ,  $T_{h_2}$  есть оператор, который определяется с помощью соотношения

$$(T_{h_1} + T_{h_2})f(x) = T_{h_1}f(x) + T_{h_2}f(x) = f(x+h_1) + f(x+h_2). \quad (2)$$

Ясно, что сложение операторов  $T_h$  есть коммутативная операция. Аналогично можно определить разность двух операторов. Разность операторов есть оператор, определяемый равенством:

$$(T_{h_1} - T_{h_2})f(x) = T_{h_1}f(x) - T_{h_2}f(x) = f(x+h_1) - f(x+h_2). \quad (3)$$

Вообще, если  $c_1$ ,  $c_2$  два числа вещественные или комплексные, мы определим оператор  $c_1 T_{h_1} + c_2 T_{h_2}$ , с помощью соотношения

$$\begin{aligned} (c_1 T_{h_1} + c_2 T_{h_2})f(x) &= c_1 T_{h_1}f(x) + c_2 T_{h_2}f(x) = \\ &= c_1 f(x+h_1) + c_2 f(x+h_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Введем в рассмотрение операторы

$$\Delta_h = T_h - T_0 = T_h - E, \quad h > 0; \quad (5)$$



$$\bar{\Delta}_h = T_e - T_h = E - T_{-h}, \quad h > 0. \quad (6)$$

В соответствии с формулами (2) - (4), операторы  $\Delta_h$ ,  $\bar{\Delta}_h$  удовлетворяют соотношениям:

$$\Delta_h f(x) = (T_h - E)f(x) = T_h f(x) - E f(x) = f(x+h) - f(x), \quad (7)$$

$$\bar{\Delta}_h f(x) = (E - T_{-h})f(x) = E f(x) - T_{-h} f(x) = f(x) - f(x-h). \quad (8)$$

Операторы  $\Delta_h$ ,  $\bar{\Delta}_h$  естественным образом, назовем операторами правой, соответственно левой разности.

Соответственно можно ввести операторы разностных отношений  $\frac{1}{h}\Delta_h$ ,  $\frac{1}{h}\bar{\Delta}_h$ , которые определяются соотношениями:

$$\frac{1}{h}\Delta_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (9)$$

$$\frac{1}{h}\bar{\Delta}_h f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \quad (10)$$

## п.2. Разностные операторы.

Рассмотрим множество операторов  $\Lambda$  вида:

$$\Lambda = c_1 T_{h_1} + c_2 T_{h_2} + \dots + c_k T_{h_k}, \quad (11)$$

где  $k$  - любое натуральное число. Такие операторы мы будем называть разностными.

Для операторов мы определили коммутативные операции сложения и умножения.

Эти операции обладают свойствами ассоциативности и дистрибу-

тивности:

$$(T_{h_1} T_{h_2}) T_{h_3} = T_{h_1} (T_{h_2} T_{h_3}) = T_{h_1} T_{h_2} T_{h_3}, \quad (2)$$

$$(c_1 T_{h_1} + c_2 T_{h_2}) + c_3 T_{h_3} = c_1 T_{h_1} + (c_2 T_{h_2} + c_3 T_{h_3}) = c_1 T_{h_1} + c_2 T_{h_2} + c_3 T_{h_3}, \quad (3)$$

$$(c_1 T_{h_1} + c_2 T_{h_2}) T_{h_3} = c_1 T_{h_1} T_{h_3} + c_2 T_{h_2} T_{h_3} = c_1 T_{h_1+h_3} + c_2 T_{h_2+h_3}. \quad (4)$$

Нетрудно убедиться в справедливости свойств (2) - (4), исходя из определенной суммы и произведения операторов.

Следовательно, мы можем совершать над операторами (I) все алгебраические операции.

В частности, когда мы рассматриваем операторы вида:

$$A = a_0 T_h^n + a_1 T_h^{n-1} + \dots + a_n E \quad (5)$$

мы можем совершить над ними действия, как над обычными полиномами.

Пользуясь этим, найдем выражения для  $\Delta_h^n$ ,  $\bar{\Delta}_h^n$ .

Используя формулу бинома Ньютона, имеем:

$$\Delta_h^n = (T_h - E)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k T_h^k E^{n-k}. \quad (6)$$

Принимая во внимание, что

$$E^m = E, \quad m - \text{натуральное число}; \quad (7)$$

$$T_h^k E = T_h^k \quad (8)$$

имеем

$$\Delta_h^n = \sum_{k=0}^n C_n^k T_h^k = \sum_{k=0}^n C_n^k T_{kh} = T_h^n + n T_h^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} T_h^{n-2} + \dots + n T_h + E = T_{nh} + n T_{(n-1)h} + \dots + n T_h + E. \quad (9)$$

Аналогично получаем

$$\bar{\Delta}_h^n = (E - T_h)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k T_h^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k T_{-kh}. \quad (10)$$



Формулы (9), (10) представляют степени операторов разности через полином от операторов сдвига. Заметим, что  $m$ -я степень оператора разности называется оператором  $m$ -ой разности. Можно обратно выразить степени оператора сдвига через полином от операторов разностей. Из равенств (I.5) (I.6) находим:

$$T_h = \Delta_h + E, \quad (II)$$

$$T_{-h} = E - \bar{\Delta}_h. \quad (I2)$$

Отсюда приходим к формулам

$$T_h^n = (\Delta_h + E)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \Delta_h^k, \quad (I3)$$

$$T_{-h}^n = (E - \bar{\Delta}_h)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \bar{\Delta}_h^k. \quad (I4)$$

Рассмотрим в качестве примера оператор второй разности:

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 f(x) &= (T_h - E)^2 f(x) = (T_h^2 - 2T_h + E) f(x) = \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \end{aligned} \quad (I5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_h^2 f(x) &= (E - T_{-h})^2 f(x) = (E - 2T_{-h} + T_{-h}^2) f(x) = \\ &= f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h). \end{aligned} \quad (I6)$$

Вычислим оператор второй разности непосредственно:

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 f(x) &= \Delta_h [\Delta_h f(x)] = \Delta_h [f(x+h) - f(x)] = \\ &= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] = \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x). \end{aligned} \quad (I7)$$

Мы пришли к тому же результату, что и в равенстве (15), но выкладки более громоздки и становятся еще более громоздкими для высоких степеней. Таким образом, преимущества формальных выкладок очевидно.

Оператор второй разности можно получить также перемножением операторов  $\Delta_h$  ,  $\bar{\Delta}_h$  :

$$\begin{aligned}\Delta_h \bar{\Delta}_h &= (T_h - E)(E - T_{-h}) = T_h - E - T_h T_{-h} + T_{-h} = \\ &= T_h - 2E + T_{-h} .\end{aligned}\tag{18}$$

Отсюда

$$\Delta_h \bar{\Delta}_h f(x) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) .\tag{19}$$

### п. 3. Формула Ньютона для равноотстоящих точек.

Найдем коэффициенты  $A_0$  ,  $A_1$  ,  $A_2, \dots, A_n$  формулы Ньютона в случае равноотстоящих точек  $x_i$  :

$$x_i = x_0 + ih \quad i = 1, \dots, n .\tag{1}$$

Тогда формулы (6) п.3 предыдущей лекции примут вид:

$$\begin{aligned}A_0 &= y_0 , \\ A_1 &= \frac{y_1 - y_0}{h} , \\ A_2 &= \frac{\frac{y_2 - y_0}{2h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{h} = \frac{1}{2} \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} .\end{aligned}\tag{2}$$



Если мы продолжим выкладки дальше, то получим:

$$f_3 = \frac{1}{6} \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3} \quad (3)$$

Примем в качестве предположения индукции для  $f_k$  выражение:

$$f_k = \frac{\Delta^k}{k! h^k} y_0, \quad (4)$$

где под  $\Delta$  понимается правая разность и для краткости положено

$$\begin{aligned} \Delta^k y_0 &= \Delta^k f(x_0) = \Delta^k f(x) \Big|_{x=x_0} = (T_h - E)^k f(x) \Big|_{x=x_0} = \\ &= \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha C_k^\alpha T_h^\alpha f(x) \Big|_{x=x_0} = \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha C_k^\alpha f(x_0 + \alpha h) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha C_k^\alpha y_{k-\alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

Докажем справедливость предположения (4).

Пусть соотношение (4) выполняется для  $k \leq m-1$ , докажем, что оно справедливо и для  $k = m$ .

По свойству интерполяционной формулы Ньютона  $f_k$  ( $k \leq m-1$ ) уже определен формулой (4), для  $f_m$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} y_m &= f_0 + f_1 (x_m - x_0) + \dots + f_{m-1} (x_m - x_0) \dots (x_m - x_{m-2}) + \\ &+ f_m (x_m - x_0) \dots (x_m - x_{m-1}) = f_0 + f_1 m h + \\ &+ f_2 m(m-1) h^2 + \dots + f_{m-1} m(m-1) \dots 2 h^{m-1} + f_m m! h^m. \end{aligned} \quad (6)$$

Пользуясь формулами для степеней операторов сдвига и разности

и предположением индукции, находим

$$y_m = T_h^m y_0 = (E + \Delta)^m y_0 = \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \frac{\Delta^k}{h^k} \right] y_0 m(m-1) \dots$$

$$\dots (m-k+1)h^k + A_m m! h^m = \left( \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \Delta^k \right) y_0 + A_m m! h^m. \quad (7)$$

Разрешая (7) относительно  $A_m$  и применяя формулу бинома к выражению  $(E + \Delta)^m$  имеем:

$$A_m m! h^m = \left[ (E + \Delta)^m - \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \Delta^k \right] y_0 =$$

$$= \left[ \sum_{k=0}^m C_m^k \Delta^k - \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \Delta^k \right] y_0 = \Delta^m y_0.$$

Отсюда находим

$$A_m = \frac{1}{m!} \frac{\Delta^m}{h^m} y_0. \quad (9)$$

Предположение индукции доказано.

Выпишем теперь формулу Ньютона для  $n+1$  равноотстоящих точек  $x_i = x_0 + ih$ :

$$y(x) = y_0 + \frac{\Delta}{h} y_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{h^2} y_0 (x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \frac{\Delta^n}{h^n} y_0 (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (10)$$

Формулу Ньютона (10) представляет полином  $P_n(x)$   $n$ -ой степени, принимающий в точках  $x_i$  заданные значения  $y_i = P_n(x_i)$ . Ее также можно рассматривать как интерполяционную формулу, и тогда она приближенно представляет функцию в сегменте  $[x_0, x_n]$



или вне него.

В частности, она может приближенно представить также полином степени выше, чем  $n$ .

В отличие от формулы Лагранжа точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  в формуле Ньютона выступают несимметрично, точка  $x_0$  играет роль начальной или центральной точки.

#### п. 4. Приближенная формула Ньютона.

IV 36

Рассмотрим формулу (3.10) в предположении малости величин  $h$  для конечных значений  $x$ . Тем самым мы будем предполагать, что  $x$  лежит вне интервала  $[x_0, x_n]$  и более того

$$\frac{h}{|x|} \ll 1, \quad \frac{nh}{|x|} \ll 1. \quad (I)$$

Положим для определенности, что  $x_0 = 0$ ,  $h > 0$

Рассмотрим разность

$$R_k = x(x-x_1) \dots (x-x_k) - x^{k+1} = x(x-h)(x-2h) \dots \dots [x-kh] - x^{k+1}. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что

$$R_k = h P_k(h, x), \quad (3)$$

где  $P_k(h, x)$  - полином  $k$ -ой степени от  $x$ , зависящий еще и от  $h$ .

Более точно, при фиксированном  $x$   $P_k(h, x)$  есть полином  $(k-1)$ -ой степени от  $h$  и при фиксированном  $h$ , полином  $k$ -ой степени от  $x$ .

Будем рассматривать  $x$  в некотором сегменте  $[-a, a]$  предполагая в то же время выполненными условия (I). Оценим  $P_k(h, x)$  для положительных  $x$ . Для  $R_k(x)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned}
 |R_k(x)| &\leq |x^{k+1} - x(x-h) \dots (x-kh)| \leq |x^{k+1} - (x-kh)^{k+1}| = \\
 &= h \left| \sum_{\alpha=1}^{k+1} (-1)^{\alpha+1} C_{k+1}^{\alpha} k^{\alpha} h^{\alpha-1} x^{k+1-\alpha} \right| \leq h \sum_{\alpha=1}^{k+1} C_{k+1}^{\alpha} k^{\alpha} h^{\alpha-1} a^{k+1-\alpha} \leq \\
 &\leq h \sum_{\alpha=1}^{k+1} C_{k+1}^{\alpha} k^{\alpha} a^{k+1-\alpha} = h \left[ (a+k)^{k+1} - a^{k+1} \right].
 \end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда следует для  $x > 0$

$$|P_k(h, x)| \leq (a+k)^{k+1} - a^{k+1}. \tag{5}$$

Аналогично получаем оценку для отрицательных  $x$

$$\begin{aligned}
 |R_k(x)| &\leq |(x|)(x|+h) \dots (x|+kh) - (x|)^{k+1}| \leq \\
 &\leq |(x|+kh)^{k+1} - (x|)^{k+1}| \leq |(x|+1)^{k+1} - (x|)^{k+1}| = \\
 &= h \sum_{\alpha=1}^{k+1} C_{k+1}^{\alpha} k^{\alpha} |x|^{k+1-\alpha} \leq h \sum_{\alpha=1}^{k+1} C_{k+1}^{\alpha} k^{\alpha} a^{k+1-\alpha} = \\
 &= h \left[ (a+k)^{k+1} - a^{k+1} \right].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Итак, для всех  $x \in [-a, a]$  имеем оценку

$$|P_k(h, x)| \leq \left[ (a+k)^{k+1} - a^{k+1} \right] = B_k. \tag{7}$$



Заменяя теперь в формуле (3.10), где положено  $x_0 = 0$ , в правой части полинома  $x(x-h)\dots(x-kh)$  на  $x^{k+1}$  находим

$$y(x) = y_0 + \frac{\Delta}{h} y_0 x + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{h^2} y_0 x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\Delta^n}{h^n} y_0 x^n + h P(h, x), \quad (8)$$

где

$$P(h, x) = \sum_{\alpha=1}^n \left[ \frac{\Delta^\alpha}{h^\alpha} y_0 \right] P_\alpha(h, x). \quad (9)$$

Применяя оценку (7), получаем

$$|P(h, x)| \leq B = \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha. \quad (10)$$

Итак, в сегменте  $[-a, a]$  имеем приближенное представление для  $y(x)$ :

$$\left| y(x) - \left\{ y_0 + \left[ \frac{\Delta}{h} y_0 \right] x + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta^2}{h^2} y_0 \right] x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left[ \frac{\Delta^n}{h^n} y_0 \right] x^n \right\} \right| \leq B h. \quad (11)$$

Таким образом с точностью до величины порядка  $h$  мы можем положить:

$$y(x) \sim y_0 + \left[ \frac{\Delta}{h} y_0 \right] x + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta^2}{h^2} y_0 \right] x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left[ \frac{\Delta^n}{h^n} y_0 \right] x^n. \quad (12)$$

При  $x_0 \neq 0$  была бы справедлива с той же точностью аналогичная формула

$$y(x) - \left\{ y_0 + \left[ \frac{\Delta}{h} y_0 \right] (x-x_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta^2}{h^2} y_0 \right] (x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left[ \frac{\Delta^n}{h^n} y_0 \right] (x-x_0)^n \right\} \leq B' h. \quad (13)$$

Формула (13), которая является приближенной формулой Ньютона, аналогична известной формуле Тейлора, с которой мы познакомимся в дальнейшем курсе анализа.

п. 5. Разности и разностные отношения для полиномов  
в тригонометрических функциях.

К полиному  $n$ -ой степени

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (1)$$

применим оператор разности

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) &= (T_E - E) P_n(x) = a_0 (x+h)^n + a_1 (x+h)^{n-1} + \dots \\ &\dots + a_n - [a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n] = a_0 [(x+h)^n - x^n] + \\ &+ a_1 [(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \dots + a_{n-1} [(x+h) - x] . \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя к первому члену в правой части (2) формулу бинома, имеем:

$$(x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^k h^{n-k} \quad (3)$$

Мы получили полином  $(n-1)$  степени. Так как степень остальных членов в правой части (2) не выше  $n-1$ , мы можем записать

$$\Delta P_n = P_{n-1}(x), \quad (4)$$

где  $P_{n-1}(x)$  - некоторый полином  $(n-1)$ -ой степени.

Продолжая аналогично, можно записать

$$\Delta^2 P_n = \Delta P_{n-1}(x) = P_{n-2}(x), \quad (5)$$

$$\Delta^k P_n = P_{n-k}(x),$$

$$\Delta^n P_n(x) = P_0(x) = \text{const},$$

$$\Delta^{n+1} P_n(x) \equiv 0.$$



Таким образом, применение оператора первой разности понижает порядок полинома на 1. Применяя  $\kappa P_n(x)$  оператор  $\kappa$ -ой разности, получаем полином степени  $n - \kappa$ .

В частности, рассмотрим параболу

$$y = \frac{gt^2}{2}. \quad (6)$$

Давая  $t$  приращение  $\Delta t = \tau$ , получим

$$\Delta y = \frac{g(t+\tau)^2 - gt^2}{2} = gt\tau + \frac{g\tau^2}{2}, \quad (7)$$

$$V_{cp} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = gt + \frac{g\tau}{2}, \quad (8)$$

$$\frac{\Delta V_{cp}}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} = g. \quad (9)$$

Формулу (6) можно толковать как формулу пройденного пути  $x$  свободно падающим телом за время  $t$ . Тогда формула (8) говорит, что средняя скорость (отношение приращения пути к приращению времени) есть линейная функция времени.

Формула (9) говорит, что ускорение — отношение приращения скорости к приращению пути есть величина постоянная.

Применим операции разности к функциям  $\sin x$ ,  $\cos x$ :

$$\begin{aligned} \Delta \sin x &= \sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \\ &- \sin x = \sin x (\cos h - 1) + \cos x \cdot \sin h = -2 \sin^2 \frac{h}{2} \sin x + \\ &+ 2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} \cos x = 2 \sin \frac{h}{2} (\cos x \cos \frac{h}{2} - \end{aligned} \quad (10)$$

$$-\sin x \cdot \sin \frac{h}{2} = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right). \quad (I0)$$

Аналогично, находим

$$\Delta \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin \left(x + \frac{h}{2}\right). \quad (II)$$

Мы можем записать равенства (I0), (II) в следующем виде

$$\Delta \sin x = \Lambda \cos x, \quad \Delta \cos x = -\Lambda \sin x, \quad (I2)$$

где оператор  $\Lambda$  определяется соотношением

$$\Lambda = 2 \sin \frac{h}{2} T_{\frac{1}{2}} = 2 \sin \frac{h}{2} T_{\frac{h}{2}}. \quad (I3)$$

Применяя оператор  $\Delta$  дважды и пользуясь (I2) и коммутативностью операторов  $\Delta$ ,  $T_h$ ,  $T_{\frac{h}{2}}$  найдем:

$$\begin{aligned} \Delta^2 \sin x &= \Delta \Lambda \cos x = \Lambda \Delta \cos x = -\Lambda^2 \sin x = \\ &= -4 \sin^2 \frac{h}{2} \sin \left(x + h\right), \end{aligned} \quad (I4)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \cos x &= -\Delta \Lambda \sin x = -\Lambda \Delta \sin x = -\Lambda^2 \cos x = \\ &= -4 \sin^2 \frac{h}{2} \cos \left(x + h\right). \end{aligned} \quad (I5)$$

Здесь мы приняли во внимание, что

$$\Lambda^2 = 4 \sin^2 \frac{h}{2} T_h. \quad (I6)$$

Применяя оператор  $\bar{\Delta} = E - T_h$ , аналогично находим

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \sin x &= \bar{\Lambda} \cos x, \\ \bar{\Delta} \cos x &= -\bar{\Lambda} \sin x, \end{aligned} \quad (I7)$$



где

$$\bar{\Lambda} = 2 \sin \frac{h}{2} T_{-\frac{h}{2}} \quad (18)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}^2 \sin x &= -\bar{\Lambda}^2 \sin x = -4 \sin^2 \frac{h}{2} \sin(x-h), \\ \bar{\Delta}^2 \cos x &= -\bar{\Lambda}^2 \cos x = -4 \sin^2 \frac{h}{2} \cos(x-h). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим оператор второй разности

$$\Delta \bar{\Delta} = (T_h - E)(E - T_{-h}) = T_h^2 - 2E + T_{-h}^2 \quad (20)$$

в применении к  $\sin x$ ,  $\cos x$ :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Delta} \sin x &= \Delta \bar{\Lambda} \cos x = \bar{\Lambda} \Delta \cos x = -\bar{\Lambda} \Lambda \sin x, \\ \Delta \bar{\Delta} \cos x &= -\Delta \bar{\Lambda} \sin x = -\bar{\Lambda} \Delta \sin x = -\bar{\Lambda} \Lambda \cos x. \end{aligned} \quad (21)$$

Принимая во внимание, что

$$\bar{\Lambda} \Lambda = 4 \sin^2 \frac{h}{2} T_{\frac{h}{2}} T_{-\frac{h}{2}} = 4 \sin^2 \frac{h}{2} E, \quad (22)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Delta} \sin x &= -4 \sin^2 \frac{h}{2} \sin x, \\ \Delta \bar{\Delta} \cos x &= -4 \sin^2 \frac{h}{2} \cos x. \end{aligned} \quad (23)$$

Полученные формулы показывают, что для  $\sin x$ ,  $\cos x$  мы можем без труда получить формулу Ньютона.

Применим теперь оператор сдвига и разности к комплекснозначной функции

$$E(x) = \cos x + i \sin x \quad (24)$$

По определению

$$T_h E(x) = \cos(x+h) + i \sin(x+h). \quad (25)$$

Применяя формулу Муавра, имеем

$$T_h E(x) = (\cos h + i \sin h)(\cos x + i \sin x) = E(h) E(x). \quad (26)$$

Применяя к  $E(x)$  оператор разности, находим

$$\Delta E(x) = (T_h - E) E(x) = [E(h) - 1] E(x) = 2i \sin \frac{h}{2} E\left(\frac{h}{2}\right) E(x). \quad (27)$$

Мы видим, что функция  $E(x)$  обладает замечательным свойством: действие операторов сдвига и разности на  $E(x)$  равносильно умножению  $E(x)$  на некоторое число.

Нетрудно показать, что для произвольного разностного оператора  $\Lambda$  справедливо соотношение:

$$\Lambda E(x) = \lambda E(x). \quad (28)$$

Мы будем говорить, что  $E(x)$  есть собственная функция оператора  $\Lambda$  ( $\lambda$  — собственное число).

Понятие разностных операторов близко нас подводит к понятию производной. Но чтобы заставить работать понятие производной, мы должны еще выбрать некоторый фактический материал. В последующих лекциях мы рассмотрим элементарные функции: степенную и показательную функции и логарифмы.



Л е к ц и я 25.

Степенная и показательная функции.

п. I. Непрерывность функции  $y = x^n$  ( $n$  — натуральное число).

Покажем, что функция  $y = x^n$  является непрерывной в каждой точке  $x_0 \in X = (-\infty, \infty)$ .

Обозначим

$$h = \Delta x = x - x_0, \quad \tau = \Delta y = y - y_0, \quad y_0 = x_0^n. \quad (1)$$

Тогда

$$y_0 + \tau = (x_0 + h)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x_0^{n-k} h^k = y_0 + h \sum_{k=1}^n C_n^k x_0^{n-k} h^{k-1}. \quad (2)$$

Отсюда следует

$$\tau = h \sum_{k=1}^n C_n^k x_0^{n-k} h^{k-1}. \quad (3)$$

Зададим произвольно  $\delta > 0$  и выберем такое  $\varepsilon > 0$ , что из

$$|x - x_0| = |h| < \varepsilon \quad (4)$$

следует

$$|y - y_0| = |\tau| < \delta. \quad (5)$$

Пользуясь неравенством треугольника (см. лекцию № I7) из (3) находим

$$|\tau| < |h| \sum_{k=1}^n C_n^k |x_0|^{n-k} |h|^{k-1}. \quad (6)$$

Выберем  $\varepsilon < 1$ . Тогда  $|h| < 1$  и справедливы соотношения

$$|h|^0 = 1; \quad |h|^k < 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Пользуясь (7), из (6) находим

$$\begin{aligned} |\tau| &< |h| \sum_{k=1}^n c_n^k |x_0|^{n-k} = |h| \left[ \sum_{k=1}^n c_n^k |x_0|^{n-k} - |x_0|^n \right] = \\ &= |h| \left[ (|x_0| + 1)^n - |x_0|^n \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{\delta}{(|x_0| + 1)^n - |x_0|^n}. \quad (9)$$

Принимая во внимание (4), (9) из (8) находим:

$$|y - y_0| = |\tau| < \delta. \quad (10)$$

Утверждение доказано.

## п. 2. Функция обратная к строго-монотонной функции.

Пусть  $y = f(x)$  — некоторая функция с областью определения  $X$  и областью значений  $Y$ , которая по определению, каждому  $x \in X$  однозначно ставит в соответствие  $y \in Y$ . Напомним, что прообразом точки  $y = y_0$  является множество всех  $x$  таких, что  $y = f(x)$  (см. лекцию № 20 п. 3).

Если для произвольного  $y_0 \in Y$  прообраз состоит из единственной точки  $x_0 \in X$ , то мы будем говорить, что соответствие  $x \rightarrow y = f(x)$  является обратимым или взаимно однозначным. В этом случае мы



будем говорить, что существует обратная функция

$$x = \varphi(y), \quad (I)$$

имеющая область определения  $Y$  и область значений  $X$ .

Обратная функция обладает тем свойством, что

$$x = \varphi[f(x)], \quad x \in X \quad (2)$$

или

$$y = f[\varphi(y)], \quad y \in Y. \quad (3)$$

Справедлива

Теорема. а) Если  $y = f(x)$  строго монотонная функция с областью определения  $X$  и областью значений  $Y$ , то существует обратная функция (I) с областью определения  $Y$  и областью значений  $X$ .

б) Если  $y = f(x)$  — непрерывная строго монотонная функция, определенная на сегменте  $X = [a, b]$ , то область значений  $Y$  есть сегмент  $[f(a), f(b)]$  в случае монотонно возрастающей и сегмент  $[f(b), f(a)]$  в случае монотонно убывающей функции  $f(x)$ .

Доказательство.

а) Предположим, для определенности, что  $y = f(x)$  монотонно возрастающая функция. Докажем, что прообраз  $y_0 \in Y$  состоит из единственной точки  $x_0 \in X$ .

Допустим противное.

Пусть  $x_0, x_1$  — две различных точек прообраза точки  $y_0$  и пусть  $x_1 > x_0$ , тогда имеем

$$[f(x_1) - f(x_0)](x_1 - x_0) > 0. \quad (4)$$

Отсюда

$$f(x_1) > f(x_0) \quad (5)$$

По допущению

$$f(x_1) = f(x_0) = y_0 \quad (6)$$

Мы пришли к противоречию. Итак, прообраз  $y_0 \in Y$  есть точка  $x_0 \in X$ , и существует обратная функция  $x = \varphi(y)$  с областью определения  $Y$  и областью значений  $X$ .

Утверждение доказано.

б) Пусть  $y = f(x)$  монотонно возрастающая функция.

Положим

$$f(a) = A, \quad f(b) = B \quad (7)$$

Тогда  $A < B$ . Пусть  $y_0 \in [A, B]$ . По теореме о промежуточном значении (см. п. 2 лекции № 21) найдется  $x_0 \in [a, b]$  такое что  $f(x_0) = y_0$ .

Итак,  $Y = [A, B]$ .

В случае монотонно убывающей функции  $B < A$  и  $Y = [B, A]$ .

Утверждение доказано.

п. 3. Функция  $y = x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Будем рассматривать функцию  $y = x^n$  в области  $X = [0, \infty)$ . Тогда при любом  $n > 0$  является монотонно возрастающей непрерывной функцией и, следовательно, по доказанной в п. 2 теореме, имеет обратную функцию

$$x = \varphi(y) \quad (I)$$



с областью определения  $Y = [0, \infty)$   
и областью значений  $X = [0, \infty)$ .

Мы будем обозначать

$$\varphi(y) = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y} \quad (2)$$

и называть  $x \geq 0$  арифметическим значением корня  $n$ -ой степени из  $y \geq 0$ .

Если вновь обозначить независимое переменное через  $x$ , зависимое переменное через  $y$ , то мы приходим к функции

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad (3)$$

с областью определения  $X = [0, \infty)$  и областью значений  $Y = [0, \infty)$ .

Мы приводим сравнительные графики функции  $y = x^n$  и обратной функции  $y = x^{\frac{1}{n}}$  (см. рис. 1).

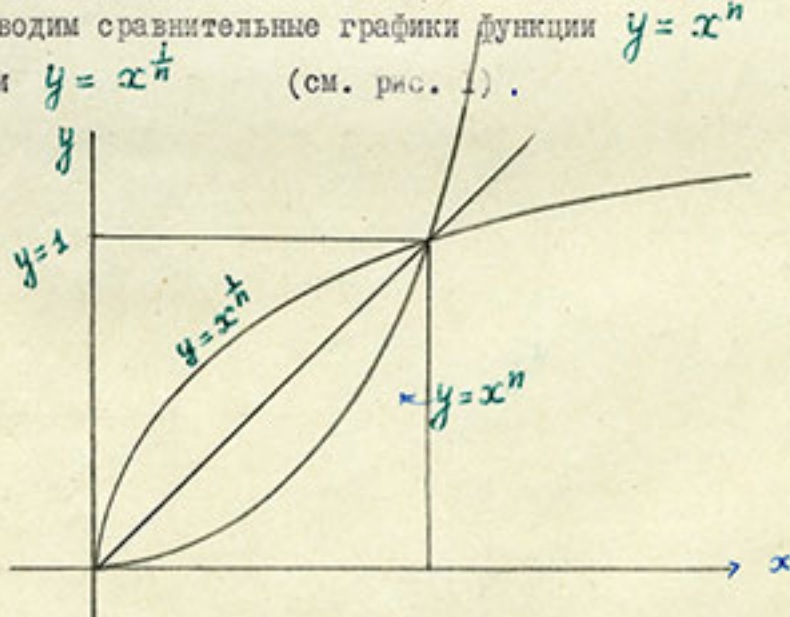


Рис. 1. Графики функции  $y = x^n$ ,  $y = x^{\frac{1}{n}}$ .

График  $y = x^{\frac{1}{n}}$  есть зеркальное отображение графика  $y = x^n$  относительно биссектрисы  $y = x$  первого координатного угла. Вообще, если  $x = \varphi(y)$  есть функция, обратная к

$y = f(x)$ , то после переобозначения  $x \leftrightarrow y$  мы получаем функцию  $y = \varphi(x)$  и ее график будет зеркальным отображением графика  $y = f(x)$  относительно биссектрисы  $y = x$ .  
Покажем непрерывность функции  $y = x^{\frac{1}{n}}$  в произвольной точке  $x_0 \in X = [0, \infty)$ .

Пусть

$$y_0 = x_0^{\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

Справедливо соотношение

$$y - y_0 = x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}} = \frac{x - x_0}{\sum_{k=0}^{n-1} x^{\frac{k}{n}} x_0^{\frac{n-k-1}{n}}} = \frac{x - x_0}{\sum_{k=0}^{n-1} y^k y_0^{n-k-1}}. \quad (5)$$

Отсюда следует для  $x \in [0, \infty)$

$$|y - y_0| = \frac{|x - x_0|}{\sum_{k=0}^{n-1} y^k y_0^{n-k-1}} \leq \frac{|x - x_0|}{y_0^{n-1}}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для данного  $\delta > 0$  можно определить  $\varepsilon$  с помощью равенства

$$\varepsilon = y_0^{n-1} \cdot \delta. \quad (7)$$

Ясно, что указанный способ определения  $\varepsilon$  не годится для  $x_0 = 0$ .  
Докажем непрерывность  $y = x^{\frac{1}{n}}$  в точке  $x_0 = 0$ , когда  $x_0 = 0$ . Тогда

$$|\Delta y| = |y - y_0| = |y| = y, \quad |\Delta x| = |x - x_0| = |x| = x. \quad (8)$$

В этом случае  $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$ ,  $\varepsilon = \delta^n$ .

Действительно, из свойства монотонного возрастания  $y = x^{\frac{1}{n}}$  следует, что

если  $x < \varepsilon$ , то  $y = x^{\frac{1}{n}} < \varepsilon^{\frac{1}{n}} = \delta$ . (9)



Итак, функция  $y = x^{\frac{1}{n}}$  непрерывна в области  $X = [0, \infty)$ .

#### п. 4. Суперпозиция функций.

Прежде чем перейти к рассмотрению функции  $y = x^{\frac{m}{n}}$  ( $m, n$  - натуральные числа), введем понятие суперпозиции функций.

Пусть  $z = f(x)$  - функция с областью определения  $X$  и областью значений  $Z$ . Пусть далее,  $y = g(z)$  - функция с областью определения  $Z$  и областью значений  $Y$ . Функции  $z = f(x)$ ,  $y = g(z)$  определяют два отображения.

$$x \rightarrow z = f(x), \quad (1)$$

$$z \rightarrow y = g(z). \quad (2)$$

Последовательно применяя два отображения (1), (2), мы получаем отображение  $x \rightarrow y$ , которому соответствует некоторая функция  $y = F(x)$  с областью определения  $X$  и областью значений  $Y$ . Мы будем обозначать

$$y = F(x) = g[f(x)] \quad (3)$$

и называть  $F(x)$  сложной функцией, которая является суперпозицией функций (1), (2). Справедлива Теорема: Суперпозиция двух непрерывных функций есть функция непрерывная.

Доказательство.

Пусть  $z = f(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0 \in X$ ,  $y = g(z)$  непрерывна в точке  $z_0 = f(x_0) \in Z$ .

Докажем, что  $y = F(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0$ .  
 Для данного  $\delta > 0$  определим  $\varepsilon_1$ , таким образом, чтобы из  $|z - z_0| < \varepsilon_1$  вытекало бы  $|y - y_0| < \delta$ . Это возможно в силу непрерывности функции  $y = g(z)$  в точке  $z = z_0$ .  
 Для полученного  $\varepsilon_1$ , найдем  $\varepsilon$  такое, что из  $|x - x_0| < \varepsilon$  следует  $|z - z_0| < \varepsilon_1$ . Это возможно в силу непрерывности функции  $z = f(x)$  в точке  $x = x_0$ . Отсюда следует, что неравенство  $|x - x_0| < \varepsilon$  влечет за собой неравенство  $|y - y_0| < \delta$  для произвольного  $\delta$ .

Утверждение доказано.

Если функции  $z = f(x)$ ,  $y = g(z)$  непрерывны в своих областях определения  $X, Z$ , то  $y = F(x) = g[f(x)]$  будет непрерывна в  $X$ . Теорема доказана.

п. 5. Функция  $y = x^{\frac{m}{n}}$  ( $m \geq 0, n > 0$  - натуральные числа).

Рассмотрим функцию  $y = x^{\frac{m}{n}}$  в области  $X = [0, \infty)$ .  
 Рассмотрим функции

$$z = x^{\frac{1}{n}}, \quad (1)$$

$$y = z^m. \quad (2)$$

Функция (1) имеет область определения  $X = [0, \infty)$ , область значений  $Z = [0, \infty)$ . Функция (2) имеет область определения  $Z$ , область значений  $Y = [0, \infty)$ . Функция  $y = x^{\frac{m}{n}}$  является суперпозицией функций (1), (2). Так как функции (1), (2) являются непрерывными, непрерывна также функция  $y = x^{\frac{m}{n}}$  для всех  $x \in X$ .



п. 6. Степенная функция  $y = x^z$ , ( $z$  - рациональное число).

Если  $z = \frac{m}{n}$  положительное число ( $m \geq 0, n > 0$ ), то функция  $y = x^z$  определена в предыдущем пункте. Пусть  $z = -\frac{m}{n} < 0$  ( $m > 0, n > 0$ ) отрицательно. Рассмотрим функции

$$z = x^{\frac{m}{n}}, \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{z} = z^{-1}. \quad (2)$$

Тогда функция  $y = x^{-\frac{m}{n}}$  является суперпозицией функций (1), (2). Определим первую функцию в открытой области  $X = (0, \infty)$ . Тогда область значений функции (1) есть открытая область  $Z = (0, \infty)$ .

Покажем, что функция  $y = \frac{1}{z}$  непрерывна в любой точке  $z = z_0 \in Z$  (см. рис. 1).

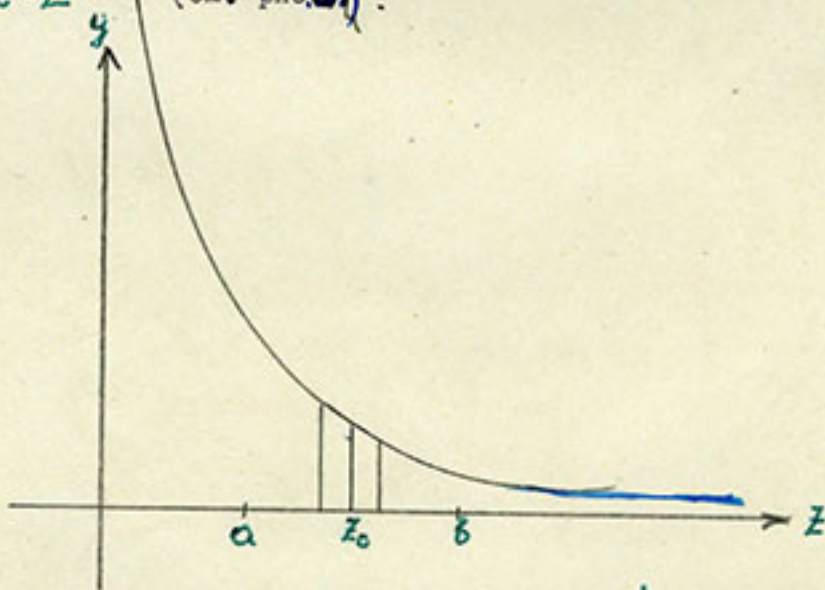


Рис. 1. График функции  $y = \frac{1}{z}$  (гипербола).

Пусть  $y_0 = \frac{1}{z_0}$ . Рассмотрим величину

$$y - y_0 = \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} = - \frac{z - z_0}{zz_0}. \quad (3)$$

Отсюда

$$|y - y_0| = \frac{|z - z_0|}{zz_0}. \quad (4)$$

Будем рассматривать функцию  $y = \frac{1}{z}$  в интервале  $(a, b)$ , содержащем точку  $z_0$ . Функция  $y = \frac{1}{z}$  монотонно убывает, поэтому из (4) следует для  $z, z_0 \in (a, b)$

$$|y - y_0| < \frac{|z - z_0|}{a^2}. \quad (5)$$

Отсюда для любого  $\delta > 0$  достаточно положить

$$\varepsilon = a^2 \delta. \quad (6)$$

Тогда в силу (5), (6) из неравенства

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (7)$$

следует неравенство

$$|y - y_0| < \delta. \quad (8)$$

для любого  $\delta > 0$ . Мы доказали непрерывность функции (2).

Функция  $y = x^{\frac{1}{n}}$  является суперпозицией двух непрерывных функций и, следовательно, непрерывна.

Итак, мы доказали непрерывность функции  $y = x^2$  в открытой области  $0 < x < \infty$  для всех рациональных  $x$ , как положительных, так и отрицательных.



$$3. (a^{z_1})^{z_2} = (a^{z_2})^{z_1} = a^{z_1 z_2}.$$

п. 7. Показательная функция  $y = a^x$ .

Мы определили величину  $a^z$  для всех рациональных  $z$ .  
Если  $a$  фиксировано, то величина  $y = a^z$  является функцией от  $z$ , определенной для рациональных  $z$ , т.е. с областью определения  $R = \{z\}$ , где  $\{z\}$  - совокупность рациональных чисел.

Теперь мы должны определить функцию  $y = a^x$  для всех вещественных  $x: |x| < \infty$ . Предварительно изучим ее свойства на множестве  $R$ .

Функция  $y = a^z$  обладает следующими свойствами:

1.  $(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) = \begin{cases} (a^{z_2} - a^{z_1})(z_2 - z_1) > 0, & z_1 \neq z_2, a > 1, \\ (a^{z_1} - a^{z_2})(z_2 - z_1) < 0, & z_1 \neq z_2, a < 1; \end{cases}$
2.  $a^{z_1+z_2} = a^{z_1} a^{z_2}$  для всех  $a > 0$ ;

Убедимся в справедливости этих свойств.

Пусть

$$z_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad z_2 = \frac{m_2}{n_2}, \quad (1)$$

где  $m_1, m_2$  - произвольные целые числа,  $n_1 > 0, n_2 > 0$  - натуральные числа.

Пусть для определенности  $a > 1, z_2 > z_1$ .

Введем в рассмотрение величину

$$b = a^{\frac{1}{n_1 n_2}} = \sqrt[n_1 n_2]{a}. \quad (2)$$

Из  $a > 1$  следует

$$b > 1. \quad (3)$$

Мы можем записать

$$a^{z_2} = a^{\frac{m_2 n_1}{n_1 n_2}} = b^{m_2 n_1}, \quad (4)$$

$$a^{z_1} = a^{\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}} = b^{m_1 n_2}.$$



- 12a -

Докажем свойство 3).

Полонским

$$C = a^{z_1} = a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = b^{m_1 m_2} = (b^{m_1})^{m_2} = \left(c^{\frac{1}{n_2}}\right)^{m_2} = c^{\frac{m_2}{n_2}} = c^{z_2} = (a^{z_1})^{z_2} \quad (11)$$

Аналогично доказывается равенство

$$a^{z_1 z_2} = (a^{z_2})^{z_1} \quad (12)$$

Свойства 1) - 3) доказаны.

Докажем свойство 3). Полонским

$$C = a^{z_1} = a^{\frac{m_1 n_2}{n_1 n_2}} = b^{m_1 n_2} = (b^{m_1})^{n_2} \quad (10)$$

Тогда следует из очевидных равенств

$$a^{z_1 z_2} = a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}} = b^{m_1 m_2} = (b^{m_1})^{m_2} = \left(c^{\frac{1}{n_2}}\right)^{m_2} = c^{\frac{m_2}{n_2}} = c^{z_2} = (a^{z_1})^{z_2} \quad (11)$$

Аналогично доказывается равенство

$$a^{z_1 z_2} = (a^{z_2})^{z_1} \quad (12)$$

Свойства 1) - 3) доказаны.

$z_2 > z_1$  означает, что

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = k > 0, \quad (5)$$

где  $k$  - натуральное число.

Отсюда следует

$$a^{z_2} - a^{z_1} = b^{m_2 n_1} - b^{m_1 n_2} = b^{m_1 n_2} (b^k - 1). \quad (6)$$

Учитывая (3), (5) имеем:

$$b^k - 1 > 0. \quad (7)$$

Отсюда

$$a^{z_2} - a^{z_1} > 0. \quad (8)$$

Аналогично доказывается утверждение для  $a < 1$ . Свойство

I) доказано.

Свойство 2) ~~также~~ <sup>легко</sup> следует ~~из~~ <sup>из</sup> представлений (I), (4):

$$\begin{aligned} a^{z_1 + z_2} &= a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} = b^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = b^{m_1 n_2} b^{m_2 n_1} = \\ &= a^{\frac{m_1}{n_1}} a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{z_1} a^{z_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

п.8. Непрерывность  $y = a^x$  на  $R$ .

Докажем, что функция  $y = a^x$  непрерывна в области  $R$  всех рациональных чисел. Напомним, что множество  $R$  плотно в себе и в множестве  $X$  всех вещественных чисел (см. лекции № 1, 4), т.е. для любого вещественного числа  $x \in X$  в любой его  $\varepsilon$ -окрестности содержатся рациональные числа, от него отличные. Отсюда следует, что мы можем ввести понятие непрерывности и для функций, определенных на  $R$ .

Пусть  $z_0 \in R$ . Мы говорим, что  $f(z)$  непрерывна в точке  $z_0$ , если для любого  $\delta > 0$  найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что из



$$|z - z_0| < \varepsilon, \quad z \in R \quad (1)$$

Следует

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta. \quad (2)$$

Неравенство (1) возможно, так как, хотя  $z \in R$  не заполняют всей  $\varepsilon$  - окрестности точки  $z_0$ , имеются  $z \in R$  сколь угодно близкие к  $z_0$ .

Заметим, что  $\varepsilon, \delta$  также могут быть рациональными числами, т.к. в силу плотности  $R$  в себе имеются сколь угодно малые рациональные числа.

Докажем теперь, что  $y = a^z$  непрерывна в  $R$ .

Положим для определенности, что  $a > 1$ .

Предварительно докажем, что

$$\alpha_n = (a^{\frac{1}{n}} - 1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad n - \text{натуральное}. \quad (3)$$

Очевидно соотношение

$$a = (1 + \alpha_n)^n. \quad (4)$$

Ясно, что  $\alpha_n > 0$ . По неравенству Бернулли (см. п. 7 лекции № 26) имеем

$$a = (1 + \alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n. \quad (5)$$

Откуда

$$0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n}. \quad (6)$$

Аналогично доказывается, что

$$\beta_n = (a^{-\frac{1}{n}} - 1) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Действительно, очевидны соотношения

$$\frac{1}{a} = (1 + \beta_n)^n, \quad (8)$$

$$0 < 1 - a^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} < 1, \quad (9)$$

$$-1 < \beta_n < 0. \quad (10)$$

Применяя к (8) неравенство Бурнулли, находим:

$$\frac{1}{a} = (1 + \beta_n)^n > 1 + n\beta_n = 1 - n|\beta_n|. \quad (11)$$

Отсюда следует

$$|\beta_n| < \frac{1 - \frac{1}{a}}{n}, \quad (12)$$

$$\frac{\frac{1}{a} - 1}{n} < \beta_n < 0. \quad (13)$$

Пусть

$$-\frac{1}{n} < \tau < \frac{1}{n}. \quad (14)$$

Тогда

$$a^{-\frac{1}{n}} < a^{\tau} < a^{\frac{1}{n}}. \quad (15)$$

Учитывая оценки (6), (13), находим

$$|a^{\tau} - 1| < \max \left\{ \frac{a-1}{n}, \frac{1 - \frac{1}{a}}{n} \right\} = \frac{a-1}{n}. \quad (16)$$

Это означает, что из неравенства

$$|\tau| < \varepsilon = \frac{1}{n} \quad (17)$$



Следует

$$|a^z - 1| < (a-1)\varepsilon. \quad (18)$$

Пусть

$$z_0 \in R, \quad z \in R, \quad y_0 = a^{z_0}, \quad y = a^z. \quad (19)$$

Тогда

$$y - y_0 = a^z - a^{z_0} = a^{z_0}(a^{z-z_0} - 1). \quad (20)$$

Для данного  $\delta > 0$  положим

$$\varepsilon = \frac{1}{n} < \frac{1}{a^{z_0}(a-1)} \delta \quad (21)$$

где  $n$  — достаточно большое число.

Тогда из (20), учитывая (17), (18), (21), находим:

$$|y - y_0| = a^{z_0} |a^{z-z_0} - 1| \leq a^{z_0}(a-1) \cdot \frac{1}{n} < \delta \quad (22)$$

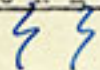
как только

$$|z - z_0| < \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

Если  $a < 1$ , то  $a^z = b^{-z} = \frac{1}{b^z}$ , где  $b = \frac{1}{a} > 1$ .

Таким образом,  $y = a^z$  есть суперпозиция двух функций  $y = \frac{1}{z}$ ,  $z = b^z$ . Так как  $z$  не обращается в нуль ни для одного  $z$ ,  $y = a^z$  является непрерывной функцией в  $R$ .



Показательная функция  $y = a^x$  ( $a > 1$ ).

I. Равномерная непрерывность  $y = a^x$   $\in R$ .

Мы доказали в прошлой лекции, что  $y = a^x$  непрерывна в произвольной точке  $x_0 \in R$ , установив зависимость

$$\varepsilon = \frac{1}{a^{x_0}(a-1)} \delta. \quad (1)$$

При заданном  $\delta$   $\varepsilon$  зависит еще от выбранной точки  $x_0$ .

Будем рассматривать функцию  $a^x$  в некотором сегменте  $[\alpha, \beta]$  точнее, на множестве рациональных чисел сегмента  $[\alpha, \beta]$ . Тогда можно определить  $\varepsilon$  независимо от  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ .

Если положить

$$\varepsilon = \frac{1}{a^{\beta}(a-1)} \delta, \quad (2)$$

то для любых  $x \in [\alpha, \beta]$ ,  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad (3)$$

будем иметь

$$|y - y_0| = |a^x - a^{x_0}| < \delta. \quad (4)$$

Иными словами, как только длина некоторого интервала  $(x_1, x_2)$  мала ( $< \varepsilon$ ), будет мала ( $< \delta$ ) и длина интервала  $(y_1, y_2) = (a^{x_1}, a^{x_2})$ . Такое свойство мы будем называть равномерной непрерывностью.

Итак, функция  $y = a^x$  непрерывна  $\in R$  и равномерно непрерывна в любом сегменте  $[\alpha, \beta] \subset R$ .



Дадим определение равномерной непрерывности в общем случае.

Функция  $y = f(x)$  с областью определения  $X$  равномерно непрерывна в некоторой подобласти  $X_0 \subset X$ , если при заданном  $\delta > 0$  найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что для любых  $x_1 \in X_0, x_2 \in X_0$  удовлетворяющих условию

$$|x_2 - x_1| < \varepsilon \quad (5)$$

выполняется условие

$$|y_2 - y_1| < \delta. \quad (6)$$

Иными словами, отображение  $x \rightarrow y = f(x)$  переводит любое множество малого диаметра ( $< \varepsilon$ ) в множество малого диаметра ( $< \delta$ ).

## п. 2. Доопределение показательной функции.

Мы определили показательную функцию  $y = a^x$  для рациональных чисел  $x \in R$  и убедились, что она является непрерывной на  $R$ . Покажем, как можно доопределить показательную функцию для произвольных вещественных чисел, или иными словами расширить область определения функции. Сделаем это сначала для некоторого сегмента  $[\alpha, \beta]$ .

Пусть  $x \in (\alpha, \beta)$  иррациональное число. Представим  $x$  последовательностью вложенных стягивающих отрезков  $[\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha, \beta] (i=1, \dots, n)$  с рациональными числами  $\alpha_i, \beta_i$ . Обозначим

$$\gamma_i = a^{\alpha_i}, \quad \delta_i = a^{\beta_i}. \quad (I)$$

Для  $\alpha_i, \beta_i$  справедливы соотношения

$$\alpha_i \leq \alpha_{i+1}, \quad \beta_{i+1} \leq \beta_i, \quad \alpha_i < \beta_i; \quad (2)$$

$$\lim (\beta_i - \alpha_i) = 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Соотношения (2) представляют собой условия вложенности отрезков, соотношения (3) - условие стягивания.

В силу монотонного возрастания функции  $y = a^x$  справедливы соотношения вложенности.

$$\gamma_i \leq \gamma_{i+1}, \quad \delta_{i+1} \leq \delta_i, \quad \gamma_i < \delta_i. \quad (4)$$

Докажем, что будет выполняться такое условие стягивания

$$\delta_i - \gamma_i \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (5)$$

По свойству равномерной непрерывности (см. формулы (2-4) п. I) имеем:

$$\gamma_i - \delta_i < \delta \quad (6)$$

как только

$$\beta_i - \alpha_i < \varepsilon = \frac{1}{a^p(a-1)} \delta. \quad (7)$$

Так  $\beta_i - \alpha_i \rightarrow 0$ , то при  $i > N(\varepsilon)$  выполняется (7), а следовательно, (6). В силу произвольности  $\delta$ , справедливо (5).

Итак, последовательность  $[\gamma_i, \delta_i]$  стягивается и определяет некоторую точку  $y$ , которую мы ставим в соответствие выбранной точке  $x$ . По определению

$$y = a^x. \quad (8)$$



Так как произвольное  $x$  можно заключить в некоторый сегмент  $[\alpha, \beta]$ , то мы дали конструкцию доопределения функции  $y = a^x$  на все вещественные числа. Возникает вопрос: является ли доопределение однозначным. Действительно, вещественное число может быть представлено различными последовательностями вложенных стягивающихся отрезков. Покажем, что эквивалентные последовательности отрезков на оси  $x$  отображаются также в эквивалентные последовательности отрезков на оси  $y$ .

Пусть  $[b_i, c_i], [d_i, e_i]$  - эквивалентные последовательности вложенных стягивающихся отрезков, определяющие точку  $x$ .  
Условие эквивалентности имеет вид (см. лекцию № 4):

$$c_i \leq d_i, \quad b_i \leq e_i. \quad (9)$$

Обозначим

$$B_i = a^{b_i}, \quad C_i = a^{c_i}, \quad D_i = a^{d_i}, \quad E_i = a^{e_i}. \quad (10)$$

$[B_i, C_i], [D_i, E_i]$  образуют две последовательности вложенных стягивающихся отрезков.

В силу монотонного возрастания  $y = a^x$  из неравенства (9) следует:

$$C_i \leq D_i, \quad B_i \leq E_i \quad (11)$$

т.е. последовательности  $[B_i, C_i], [D_i, E_i]$  эквивалентны.

Итак, мы показали, что любые две эквивалентные последовательности отрезков отображаются в две эквивалентные последовательности и доопределение показательной функции для всех вещественных  $x$  с помощью вложенных отрезков однозначно.

п. 3. Монотонность и непрерывность  $y = a^x$  в  $X = (-\infty, \infty)$ .

Покажем, что определенная указанным в п. 2 способом функция  $y = a^x$  является монотонно возрастающей. Пусть  $x_1, x_2$  - два произвольных вещественных числа, и пусть

$$x_2 > x_1. \quad (I)$$

Пусть  $[b_i, c_i], [d_i, e_i]$  - две последовательности отрезков, определяющих соответственно  $x_1, x_2$ . Тогда последовательности  $[B_i, C_i], [D_i, E_i]$  определяет соответственно  $y_1 = a^{x_1}, y_2 = a^{x_2}$ .

Докажем, что

$$y_2 > y_1. \quad (2)$$

Из (I) следует, что при  $i > N$  справедливо соотношение

$$d_i > c_i. \quad (3)$$

Отсюда в силу монотонности  $y = a^x$  в  $R$  следует

$$D_i > C_i \quad (4)$$

для всех  $i > N$ . Следовательно, справедливо (2).

Докажем теперь непрерывность  $y = a^x$ .

Положим

$$y_1 = a^{x_1}, y_2 = a^{x_2}, x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]. \quad (5)$$

Положим для определенности, что

$$x_1 < x_2. \quad (6)$$

В  
Доказать  
более общую  
теорему.  
Если две непер-  
рывные функ-  
ции совпадают  
на бесконечном  
интервале, то  
они совпадают  
всюду.  
Подробнее  
рассмотреть  
структуру непре-  
рывных функций.  
Нар-м ф-я  
определяется  
каждой  
последователь-  
ностью



Для заданного  $\delta > 0$  определим  $\epsilon$  из соотношения

$$\epsilon = \frac{1}{a^p (a-1)} \delta. \quad (7)$$

Покажем, что из

$$|x_2 - x_1| = x_2 - x_1 < \epsilon, \quad (8)$$

Следует

$$|y_2 - y_1| = y_2 - y_1 = a^{x_2} - a^{x_1} < \delta. \quad (9)$$

Соотношения (8), (9) справедливы для рациональных чисел  $x_1, x_2$ . Если среди  $x_1, x_2$  имеются иррациональные, мы можем найти рациональные числа  $z_1, z_2$  такие, что

$$z_1 < x_1 < x_2 < z_2 \quad (10)$$

и

$$|z_2 - z_1| = z_2 - z_1 < \epsilon. \quad (11)$$

Тогда в силу непрерывности  $y = a^x$  имеем

$$|a^{z_2} - a^{z_1}| = a^{z_2} - a^{z_1} < \delta. \quad (12)$$

Но из монотонного возрастания  $y = a^x$  имеем:

$$a^{z_1} < a^{x_1} < a^{x_2} < a^{z_2}. \quad (13)$$

Отсюда следует

$$|a^{x_2} - a^{x_1}| = a^{x_2} - a^{x_1} < \delta. \quad (14)$$

Мы доказали равномерную непрерывность  $y = a^x$  в произвольном сегменте  $[\alpha, \beta] \in X$  и тем самым непрерывность в  $X$ .

Мы построим функцию  $y = a^x$  для  $a > 1$ .

Ее график имеет вид (см. рис. I).

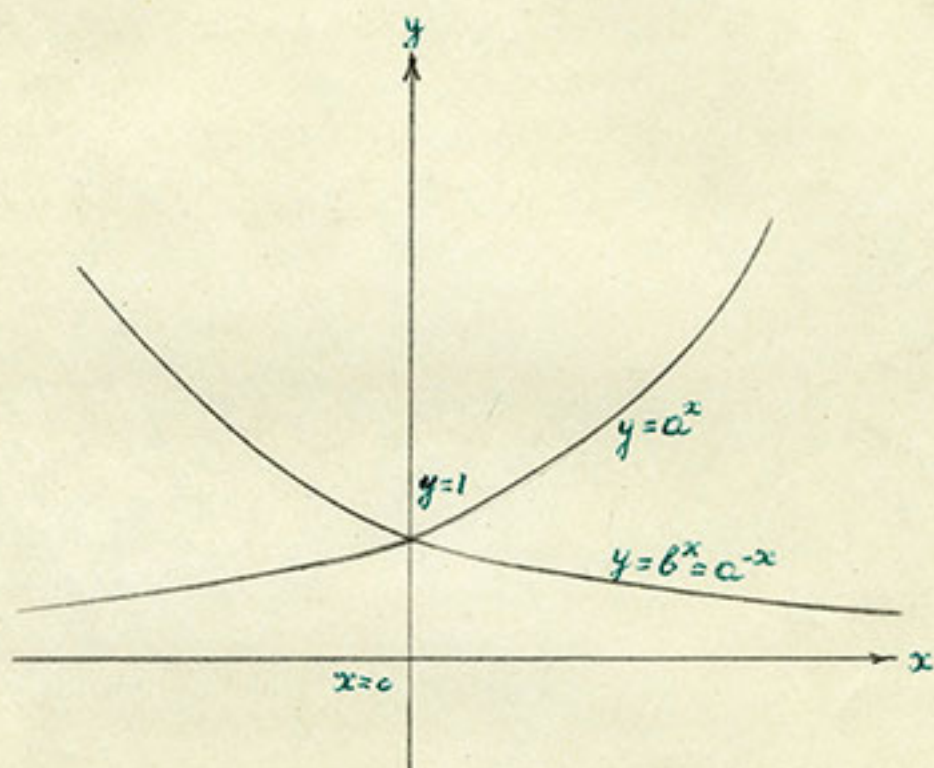


Рис. I. Графики  $y = a^x$ ,  $y = a^{-x}$ ,  $a > 1$ .

Функцию  $y = b^x$  при  $b < 1$  мы определим с помощью равенства (см. рис. 1)

$$y = b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} \quad a = \frac{1}{b} > 1. \quad (15)$$

Функция (15) является монотонно убывающей.

#### п. 4. Свойства показательной функции.

В лекции № 25 мы установили, что для рациональных  $x$  и  $a > 0$  справедливы соотношения



$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}, \quad (1)$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}. \quad (2)$$

Эти свойства переносятся, по непрерывности, на произвольные вещественные числа  $x_1, x_2$ . Действительно, пусть

$$x_1 = \lim z_i, \quad x_2 = \lim s_i, \quad i \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где  $z_i, s_i$  — рациональные числа. Тогда в силу непрерывности показательной функции  $a^x$ , имеем:

$$\lim a^{z_i+s_i} = a^{\lim(z_i+s_i)} = a^{\lim z_i + \lim s_i} = a^{x_1+x_2}, \quad (4)$$

$$\lim (a^{z_i} \cdot a^{s_i}) = (\lim a^{z_i}) (\lim a^{s_i}) = a^{\lim z_i} a^{\lim s_i} = a^{x_1} a^{x_2}.$$

Чтобы доказать (2), представим  $x_1, x_2$  последовательностями стягивающихся вложенных отрезков, положив для определенности  $x_1 < x_2, a > 1$ . Тогда

$$\alpha_i \leq x_1 \leq \beta_i, \quad \gamma_i \leq x_2 \leq \delta_i \quad i = 1, \dots, n, \dots \quad (5)$$

$$\lim \alpha_i = \lim \beta_i = x_1, \quad \lim \gamma_i = \lim \delta_i = x_2 \quad (6)$$

$$\beta_i < \gamma_i \quad \text{для } i \rightarrow \infty \text{ достаточно больших} \quad (7) \rightarrow ( )$$

Отсюда имеем:

$$(a^{\alpha_i})^{\gamma_i} \leq (a^{\alpha_i})^{\beta_i} \leq (a^{\alpha_i})^{x_2} \leq (a^{\alpha_i})^{\delta_i} \leq (a^{\beta_i})^{\delta_i}, \quad (8)$$

$$a^{\alpha_i} \leq a^{x_1} \leq a^{\beta_i}. \quad (9)$$

Принимая во внимание, что

$$\alpha_i \gamma_i \leq x_1, x_2 \leq \beta_i \delta_i \quad (10)$$

имеем

$$a^{\alpha_i \gamma_i} \leq a^{x_1, x_2} \leq a^{\beta_i \delta_i} \quad (11)$$

Так как для рациональных  $x_1, x_2$  справедливо (2), то неравенства (8) можем переписать в виде:

$$a^{\alpha_i \gamma_i} \leq (a^{x_1})^{x_2} \leq a^{\beta_i \delta_i} \quad (12)$$

Сопоставляя (11), (12) имеем

$$(a^{x_1})^{x_2} = \lim a^{\alpha_i \gamma_i} = \lim a^{\beta_i \delta_i} = (a^{x_1})^{x_2} \quad (13)$$

Утверждение доказано. Совершенно аналогично доказательство в случае  $a < 1$ .

п. 5. Логарифмическая функция  $y = \lg_a x$ .

По теореме о функции обратной к строго монотонной существует функция  $x = \varphi(y)$  обратная к функции  $y = a^x$  ( $a > 1$ ) с областью определения  $Y = (0, \infty)$ . Эта функция также будет монотонно возрастающей. Эту функцию мы обозначим:

$$x = \varphi(y) = \lg_a y, \quad 0 < y < \infty \quad (1)$$

и назовем логарифмом  $y$  при основании  $a > 1$ .

Если вновь обозначить аргумент через  $x$ , зависимое переменное через  $y$ , мы получим функцию

$$y = \lg_a x, \quad 0 < x < \infty. \quad (2)$$

График этой функции имеет вид (см. рис. 2):



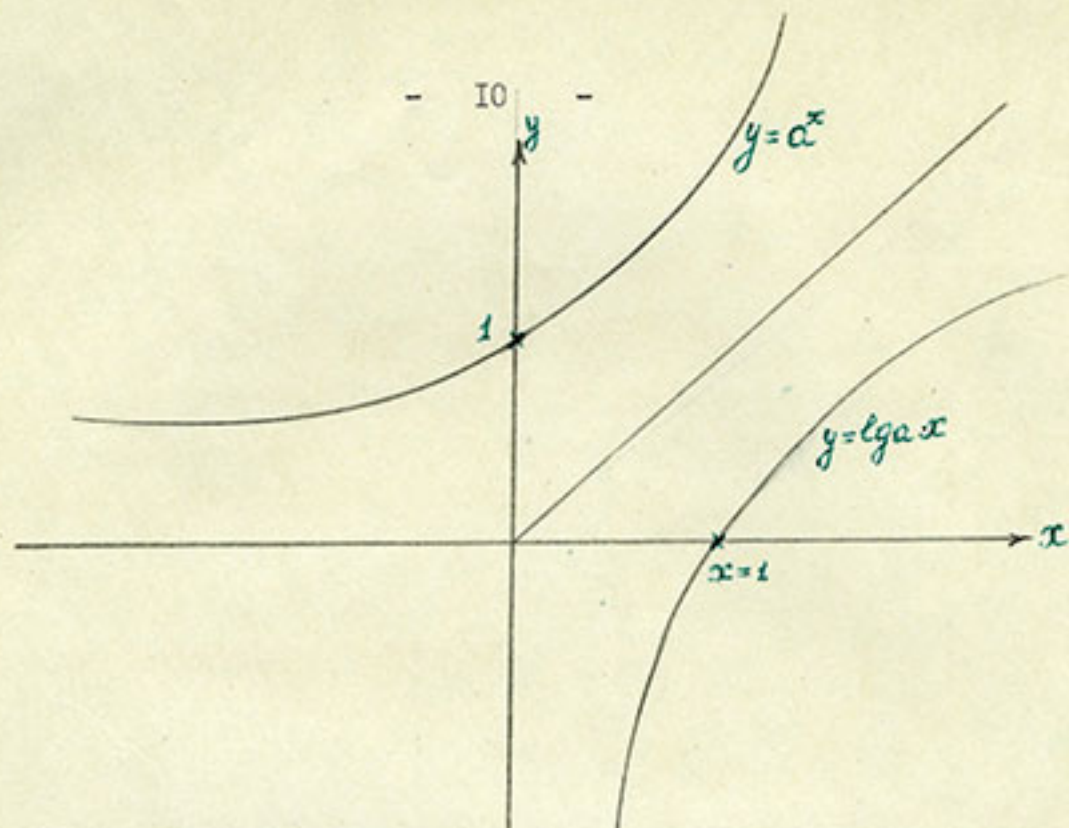


Рис. 2. График функций  $y = a^x$ ,  $y = \lg_a x$ ,  $a > 1$ .

График  $y = \lg_a x$  является зеркальным отображением графика  $y = a^x$  относительно биссектрисы  $y = x$  первого координатного угла.

Совершенно аналогично определяется  $y = \lg_a x$  для  $0 < a < 1$ . Только в этом случае функция будет монотонно убывающей (см. рис. 3)

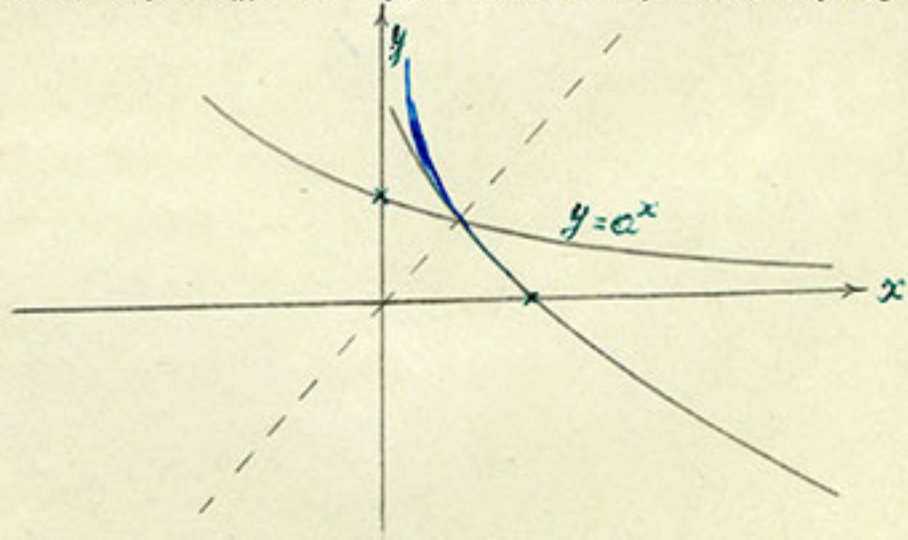


Рис. 3. График функций  $y = a^x$ ,  $y = \lg_a x$ ,  $0 < a < 1$ .

Ее график попрежнему является зеркальным отображением графика  $y = a^x$  относительно прямой  $y = x$ .

Отметим некоторые свойства логарифмической функции. Для показательной функции справедливо равенство

$$y = a^{x_1 + x_2} = y_1 y_2, \quad (3)$$

где

$$y_1 = a^{x_1}, \quad y_2 = a^{x_2}. \quad (4)$$

Из равенств (3), (4) имеем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lg_a y_1 = \lg_a (y_1 y_2), \\ x_1 &= \lg_a y_1, \quad x_2 = \lg_a y_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно

$$\lg_a (y_1 y_2) = \lg_a y_1 + \lg_a y_2 \quad (6)$$

Или словесно, логарифм произведения равен сумме логарифмов слагаемых (при одном и том же основании).

Для показательной функции справедливо также соотношение:

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}. \quad (7)$$

Обозначим

$$(a^{x_1}) = b > 0, \quad a^{x_1 x_2} = c. \quad (8)$$

Тогда

$$c = (a^{x_1})^{x_2} = b^{x_2}. \quad (9)$$



Из равенств (7) - (9) имеем:

$$x_1 = \lg_a b, \quad (I0)$$

$$x_2 = \lg_b c, \quad (I1)$$

$$x_1 x_2 = \lg_a c. \quad (I2)$$

Из равенств (I0)-(I2) следует

$$\lg_a b \cdot \lg_b c = \lg_a c. \quad (I3)$$

Соотношение (I3) позволяет перейти от  $\lg$  по одному основанию к  $\lg$  по другому основанию:

$$\lg_b c = \frac{\lg_a c}{\lg_a b}. \quad (I4)$$

В частности при  $c = a$  имеем:

$$\lg_b a = \frac{\lg_a a}{\lg_a b} = \frac{1}{\lg_a b}. \quad (I5)$$

Отсюда можно (I4) представить в виде:

$\lg_b c = \lg_a c \cdot \lg_b a,$  (I6)  
 $\lg_a b \cdot \lg_b c \cdot \lg_c a = 1.$  (I7)

*Н.В.*  
 а соотношение (I3) представит в симметричной форме  
 I

п. 6. Непрерывность логарифмической функции.

Докажем сначала теорему о непрерывности функции обратной функции строго монотонной.

Теорема: Пусть  $y = f(x)$  - непрерывная, монотонно возрастающая функция, определенная в сегменте  $[a, b]$ .

Существует обратная функция  $x = \varphi(y)$ , монотонно возрастающая и непрерывная в сегменте  $[f(a), f(b)]$ .

Доказательство.

Мы уже доказали (см. п. 2 лекции №25), что существует обратная функция  $x = \varphi(y)$ , определенная в сегменте  $[f(a), f(b)] = [A, B]$ . Докажем, что  $x = \varphi(y)$  непрерывна в  $[A, B]$ . Воспользуемся вторым признаком непрерывности (см. лекцию № 21). Пусть  $x = c \in (a, b)$ . Тогда  $C = f(c) \in (A, B)$ . Докажем, что любая последовательность  $y_i \rightarrow C$  отображается с последовательностью  $x_i = \varphi(y_i) \rightarrow c = \varphi(C)$ . Образ  $y_i$  есть ограниченная последовательность  $x_i = \varphi(y_i): a \leq x_i \leq b$ , и следовательно, имеет точку сгущения. Покажем, что  $\{x_i\}$  имеет единственную точку сгущения  $d$ , и что  $d = c$ .

Предположим противное. Тогда имеется точка  $d \neq c$  сгущения  $\{x_i\}$  и  $f(d) = D \neq C$ . Пусть для определенности  $d > c$ , и, как следствие,  $D > C$ . Пусть  $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$  есть  $\varepsilon$ -окрестность  $d$ , такая, что  $d - \varepsilon > c$ . В интервале  $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$  содержатся  $x_i$  сколь угодно большим  $i$ .

В силу монотонного возрастания и непрерывности функции  $y = f(x)$  интервал  $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$  отображается в интервал  $(f(d - \varepsilon), f(d + \varepsilon))$  и точки  $x_i \in (d - \varepsilon, d + \varepsilon)$  отображаются в точки  $y_i \in (f(d - \varepsilon), f(d + \varepsilon))$  (см. рис. 4).

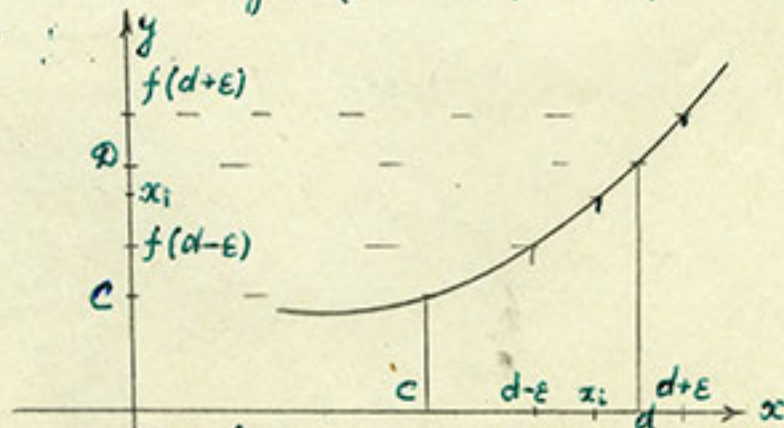


Рис. 4. Отображение  $y = f(x)$  для монотонно возрастающей функции.



Следовательно, интервал  $(f(d-\varepsilon), f(d+\varepsilon))$  содержит  $y_i$  с сколь угодно большим  $i$ , т.е. бесконечно много  $y_i$ , и следовательно, содержит точку сгущения последовательности  $\{y_i\}$ . По свойству монотонности  $f(d-\varepsilon) > C = f(c)$ . Но это противоречит нашему предположению о том, что  $C$  есть единственная точка сгущения последовательности  $\{y_i\}$ . Итак,  $\varphi$  имеет единственную точку сгущения  $c = \varphi(c)$ .

Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается теорема для монотонно убывающей функции. Следовательно, можно утверждать, что функция обратная к строго монотонной непрерывной функции непрерывна. Отсюда прямо следует непрерывность функции  $y = \lg_a x$  при любом  $a > 0$ .

#### п. 7. Неравенство Бернулли.

Мы определили основание натуральных логарифмов, так называемое число  $e$ . Это число было нами определено в лекции № 19 как сумма ряда:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (1)$$

Мы докажем, что

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (2)$$

где  $n$  - натуральные числа.

Предварительно нам требуется неравенство Бернулли:

$$(1-a_1) \dots (1-a_n) > 1 - (a_1 + \dots + a_n), \quad (3)$$

если

$$0 < a_i < 1, \quad i = 1, \dots, n; \quad n \geq 2. \quad (4)$$

Оно без труда доказывается по индукции.

При  $k = 2$  имеем

$$(1-a_1)(1-a_2) = 1 - (a_1 + a_2) + a_1 a_2 > 1 - (a_1 + a_2). \quad (5)$$

Пусть неравенство (3) справедливо для всех  $n \leq k$ .

Докажем, что оно справедливо при  $n = k+1$ .

В силу (4)

$$0 < (1-a_1) \dots (1-a_k) < 1. \quad (6)$$

Отсюда

$$(1-a_1) \dots (1-a_{k+1}) = (1-a_1) \dots (1-a_k) - a_{k+1} (1-a_1) \dots \quad (7)$$

$$\dots (1-a_k) > 1 - (a_1 + \dots + a_k) - a_{k+1} (1-a_1) \dots (1-a_k) > \\ > 1 - (a_1 + \dots + a_{k+1}), \quad \text{т. е. г.}$$

При отрицательных  $a_i$  неравенство (3) очевидно. Следовательно, неравенство Бернулли можно записать в более общей форме

$$(1+x_1) \dots (1+x_n) \geq 1 + (x_1 + \dots + x_n), \quad (8)$$

если

$$-1 < x_i < \infty, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

Неравенство (8), (9) переходит в ~~н~~ неравенство при  $n = 1$  и при  $x_i = 0$ , а в остальных случаях оно является строгим неравенством.

Из неравенства (8) вытекает при  $x_i = x$  :



$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad (10)$$

если

$$-1 < x < \infty. \quad (11)$$

Неравенство (10) переходит в равенство при  $x=0$  или

$n=1$ . В остальных случаях при выполнении (11), оно является строгим неравенством.

Функция  $y = e^x$ .

п. I. Основание натуральных логарифмов.

Рассмотрим последовательности

$$\sigma_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \omega_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (1)$$

Сразу видно, что

$$\sigma_n < \omega_n = \sigma_n \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (2)$$

Покажем, что

$$\sigma_{n-1} < \sigma_n, \quad (3)$$

$$\omega_{n-1} > \omega_n. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что

$$\sigma_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}, \quad \sigma_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n. \quad (5)$$

Умножив числа  $\sigma_{n-1}$ , соответственно  $\sigma_n$ , на число  $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$  получим числа

$$\sum_{n-1} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{соответственно} \quad \sum_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n. \quad (5')$$

По неравенству Бернулли, в котором следует положить  $x = \frac{1}{n^2}$  имеем

$$\sum_{n-1} = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{n}{n^2} < \sum_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n. \quad (6)$$

Возвращаясь к числам  $\sigma_{n-1}$ ,  $\sigma_n$  приходим к неравенству (3) при  $n \geq 2$ .

Аналогично

$$\omega_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n, \quad \omega_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (7)$$



Умножая  $\omega_{n-1}$ ,  $\omega_n$  на  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$  приходим к числам

$$\Omega_{n-1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \quad \Omega_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (8)$$

По неравенству Бернулли имеем, полагая  $x = \frac{1}{n^2-1}$ ;

$$\Omega_{n-1} = (1+x)^n > 1 + nx = 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n} = \Omega_n \quad (9)$$

Отсюда следует (4).

Таким образом  $\sigma_n$  есть монотонно возрастающая последовательность ограниченная сверху,  $\omega_n$  есть монотонно убывающая последовательность, ограниченная снизу. Отсюда

$$\lim \sigma_n = \sigma, \quad \lim \omega_n = \omega, \quad \sigma \leq \omega \quad (10)$$

Докажем, что

$$\sigma = \omega \quad (11)$$

Действительно,

$$\lim \omega_n = \lim \sigma_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim \sigma_n \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim \sigma_n \quad (12)$$

Докажем теперь, что  $\sigma = e$ , где

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (13)$$

Сравним частичную сумму  $S_n$  ряда (13) и  $\sigma_n$ .

Для  $S_n$  имеем выражение:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (14)$$

Применяя к  $\sigma_n$  формулу бинома, имеем:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\begin{aligned} \dots \frac{n(n-1)\dots(h-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{h}\right)^k + \dots + \frac{n(n-1)\dots(h-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{h}\right)^n = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{h}\right) + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{h}\right) + \frac{1}{h!} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{h-1}{h}\right). \end{aligned} \quad (I5)$$

Сравнивая почленно суммы  $S_n$ ,  $\sigma_n$  видим, что

$$0 < \frac{1}{k!} - \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{h}\right). \quad (I6)$$

Откуда следует

$$0 < S_n - \sigma_n. \quad (I7)$$

Применяя к правой части (I6) неравенство Бернулли, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} - \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{h}\right) &= \frac{1}{k!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{h}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{h}\right)\right] < \\ < \frac{1}{k!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{h} - \frac{2}{h} \dots - \frac{k-1}{h}\right)\right] = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1+2+\dots+(k-1)}{h} = \\ = \frac{k(k-1)}{2k! h} = \frac{1}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{2h}. \end{aligned} \quad (I8)$$

Принимая во внимание (I4), (I5) и складывая неравенства (I8) при  $k=2, \dots, h$ , имеем

$$0 < S_n - \sigma_n < \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^h \frac{1}{(k-2)!} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{h-2} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2n} S_{n-2}. \quad (I9)$$



Отсюда следует

$$\lim \sigma_n = \lim S_n = e, \quad \text{з. м. г.} \quad (20)$$

п. 2. Иррациональность  $e$ .

Оценим скорость сходимости ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ .

Мы можем положить:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = S_n + R_n, \quad (1)$$

где

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad (2)$$

$R_n$  называется остатком ряда, и скорость сходимости ряда (1) оценивается скоростью стремления  $R_n \rightarrow 0$ . Для  $R_n$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots = \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right] = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \\ &= \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n!} \frac{1}{n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из оценки (3) следует иррациональность  $e$ .

Пусть  $e = \frac{m}{n}$ ,  $m, n$  - целые. Тогда имеем

$$e - S_n = \frac{m}{n} - S_n = R_n < \frac{1}{n!} n \quad (4)$$

Умножая (4) на  $n!$ , получаем

$$n! \left( \frac{m}{n} - S_n \right) = (n-1)! m - (n! + n! + 3 \dots n + 4 \dots n + \dots) < \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Левая часть неравенства (5) — целое, что невозможно. Утверждение доказано. ~~(Кроме того)~~ Заметим, что  $e$  является трансцендентным числом, т.е. оно не может являться корнем полинома с целыми коэффициентами.

### п. 3. Определение $e^x$ .

Докажем, что для любой последовательности  $\{x_i\}$ , удовлетворяющей условию

$$x_i > 0, \quad \lim x_i = 0, \quad i \rightarrow \infty \quad (1)$$

справедливо предельное соотношение

$$\lim (1 + x_i)^{\frac{1}{x_i}} \rightarrow e \quad (2)$$

По ~~предположению~~ <sup>предложению</sup> сходимости, для достаточно большого  $i$  имеем

$$0 < x_i < \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что для любого достаточно большого  $i$  справедливо соотношение

$$\frac{1}{n_i+1} \leq x_i \leq \frac{1}{n_i}, \quad n_i \leq \frac{1}{x_i} \leq n_i+1, \quad (4)$$

где  $n_i > 0$  — натуральное число, и

$$\frac{1}{n_i} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Из (4) используя свойства монотонности показательной и степенной функции находим

$$\left(1 + \frac{1}{n_i+1}\right)^{n_i} \leq (1 + x_i)^{n_i} \leq (1 + x_i)^{\frac{1}{x_i}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{\frac{1}{x_i}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_i+1}, \quad (6)$$



$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_{i+1}}\right)^{n_i} = \frac{\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_{i+1}}\right)^{n_{i+1}}}{\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_{i+1}}\right)} = e \quad (7)$$

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_{i+1}} = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^{n_i} \cdot \lim_{n_i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) = e.$$

Отсюда следует (2).

Рассмотрим теперь выражение  $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ ,  $a > 0$  и найдем его предел при  $n \rightarrow \infty$ .

Положим

$$x_n = \frac{a}{n}. \quad (8)$$

Тогда

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \left(1 + x_n\right)^{\frac{a}{x_n}} = \left[\left(1 + x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\right]^a. \quad (9)$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x_n\right)^{\frac{a}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\right]^a. \quad (10)$$

По доказанному

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x_n\right)^{\frac{1}{x_n}} = e. \quad (11)$$

Так как степенная функция непрерывна, то при фиксированном  $a$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x^a) = (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^a = x_0^a. \quad (12)$$

Отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x_n\right)^{\frac{1}{x_n}}\right]^a = e^a. \quad (13)$$

Обозначая  $a$  через  $x$  можем записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad x > 0. \quad (14)$$

Докажем теперь соотношение (I4) при  $x < 0$ .

Рассмотрим выражение

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n, \quad x > 0. \quad (I5)$$

Очевидно соотношение

$$1 > \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{x^2}{n}. \quad (I6)$$

Отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1, \quad (I7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}. \quad (I8)$$

Таким образом для всех  $x$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad (I9)$$

п. 4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\sigma_n(x) - 1}{x} = \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}, \quad x > 0. \quad (I)$$

Применяя формулу Бинома, находим

$$\frac{\sigma_n(x) - 1}{x} = \frac{x + x^2 \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{x^{k-2}}{n^k}}{x} = 1 + x \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{x^{k-2}}{n^k}. \quad (2)$$

Оценим величину  $\sum_{k=2}^n C_n^k \frac{x^{k-2}}{n^k}$ .

При  $|x| < 1$  справедливо неравенство

$$\sum_{k=2}^n C_n^k \frac{x^{k-2}}{n^k} < \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e. \quad (3)$$

Отсюда

$$\left| \frac{\sigma_n(x) - 1}{x} - 1 \right| < ex. \quad (4)$$



Устремляя в (4)  $n \rightarrow \infty$ , имеем

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| < e x . \quad (5)$$

Отсюда следует

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0 \quad (6)$$

или

$$\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0 \quad (7)$$

п. 5.  $y = \ln x$

Функция  $y = \ln e^x$  является обратной функции  $y = e^x$  и обозначается

$$y = \ln x . \quad (I)$$

Как обратная функции строго монотонной и непрерывной  $y = \ln x$  является также строго монотонной и непрерывной. Рассмотрим функцию

$$\sigma(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (2)$$

при достаточно малых  $x$ ,  $1+x > 0$ ,  $\sigma(x) > 0$  и мы можем взять  $\ln$  от обеих частей (2):

$$\ln \sigma(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} . \quad (3)$$

Принимая во внимание, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sigma(x) = e \quad (4)$$

и непрерывность функции  $y = \ln x$  имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln \sigma(x)] = \ln [\lim_{x \rightarrow 0} \sigma(x)] = \ln e = 1. \quad (5)$$

Отсюда следует, принимая во внимание (3):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (6)$$



Показательная и тригонометрическая функции.

п. I. Степенной ряд для  $e^x$ .

В прошлой лекции мы доказали, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (I)$$

для любых вещественных  $x$ :  $-\infty < x < \infty$ .

Рассмотрим выражения

$$\sigma_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad (2)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

При  $x = 1$  имеем

$$\sigma_n(1) = \sigma_n, \quad S_n(1) = S_n, \quad (3)$$

где

$$\sigma_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}. \quad (4)$$

Мы показали, что

$$0 < S_n - \sigma_n < \frac{1}{2n} S_{n-2}. \quad (5)$$

Докажем, что для произвольного  $x$

$$|S_n(x) - \sigma_n(x)| < \frac{1}{2n} S_{n-2}(|x|). \quad (6)$$

Доказательство протекает совершенно аналогично предыдущему.

Распишем выражения (2) в виде сумм:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{x}{n}\right)^k = 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \dots \quad (7)$$

$$+ \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) x^k + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) x^n,$$

$$S_n(x) = 1 + 1 + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{k!}x^k + \dots + \frac{1}{n!}x^n. \quad (8)$$

Сравнивая суммы  $S_n(x)$ ,  $G_n(x)$  почленно, имеем

$$S_n(x) - G_n(x) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] x^k. \quad (9)$$

Применяя неравенство Бернулли, находим:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1 + \dots + k-1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}. \quad (10)$$

Отсюда, применяя неравенство треугольника, находим

$$\begin{aligned} |S_n(x) - G_n(x)| &= \left| \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] x^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^n \left| \frac{1}{k!} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] x^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left[ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] |x|^k < \frac{1}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{k!} |x|^k \quad (11) \\ &= \frac{|x|^2}{2n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} |x|^{k-2} = \frac{|x|^2}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} |x|^k = \frac{|x|^2}{2n} S_{n-2}(|x|). \end{aligned}$$

Неравенство (6) доказано.

Рассмотрим теперь ряд

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (12)$$

Покажем, что ряд (12) абсолютно сходится для любых  $x$ .

Рассмотрим ряд из модулей:

$$S(|x|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}. \quad (13)$$



Общий член ряда (I3) имеет вид:

$$a_k = \frac{|x|^k}{k!} . \quad (I4)$$

Образуем величину

$$q_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{|x|}{k+1} . \quad (I5)$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0 , \quad (I6)$$

то удовлетворяется достаточный признак сходимости

(см. лекцию № 19) .

Следовательно ряд  $S(|x|)$  сходится, и абсолютно сходится ряд  $S(x)$  . Из неравенства (6) имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x) - S_{n-2}(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{2n} S_{n-2}(|x|) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{2n} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-2}(|x|) = S(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{2n} = 0 . \end{aligned} \quad (I7)$$

Отсюда находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-2}(x) = e^x . \quad (I8)$$

Итак, мы представили  $e^x$  в виде ряда:

$$e^x = S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} . \quad (I9)$$

Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (20)$$

называется с т е п е н н ы м . Следовательно, мы представили

$e^x$  степенным рядом (I9) .

Представление (I9) поможет нам лучше изучить свойства функции

$e^x$  . Предварительно нам следует установить ряд свойств аб-

сопутно сходящихся рядов.

п. 2. Произведение рядов с неотрицательными членами.

Рассмотрим два ряда с членами

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad (1)$$

где

$$a_k \geq 0, \quad b_k \geq 0. \quad (2)$$

Наряду с рядами (1) образуем ряд

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad (3)$$

где

$$c_k = \sum_{\alpha=0}^k a_{\alpha} b_{k-\alpha}. \quad (4)$$

Это будет также ряд с неотрицательными членами. Справедлива

Теорема. а) если ряды (1) сходятся, то ~~сходятся~~ и ряд (3),

б) справедливо соотношение

$$C = A \cdot B. \quad (5)$$

Доказательство.

Образуем частичные суммы рядов  $A, B, C$  :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k. \quad (6)$$

Справедливы неравенства

$$C_n \leq A_n \cdot B_n, \quad (7)$$

$$A_n B_n \leq C_{2n}. \quad (8)$$



Неравенство (7) очевидно. Действительно

$$C_n = \sum_{k=0}^n C_k = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{\alpha+\beta=k}^n a_\alpha b_\beta \right) = \sum_{0 \leq \alpha+\beta \leq n} a_\alpha b_\beta = \sum_{\alpha+\beta=0}^n a_\alpha b_\beta, \quad (9)$$

где сумма  $\sum_{\alpha+\beta}$  берется по всем неотрицательным индексам  $\alpha, \beta$  сумма которых не больше  $n$ .

В то же время

$$A_n B_n = \sum_{\alpha=0}^n a_\alpha \sum_{\beta=0}^n b_\beta = \sum_{\alpha, \beta=0}^n a_\alpha b_\beta, \quad (10)$$

где сумма  $\sum_{\alpha, \beta=0}^n$  берется по всем неотрицательным  $\alpha, \beta$  не превышающим  $n$ . Отсюда следует (7).

Для  $C_{2n}$  имеем

$$C_{2n} = \sum_{0 \leq \alpha+\beta \leq 2n} a_\alpha b_\beta = \sum_{\alpha+\beta=0}^{2n} a_\alpha b_\beta. \quad (11)$$

В сумме (11) содержатся все члены суммы (10), в частности, например,  $a_n \cdot b_n$ . Отсюда следует (8).

Из неравенства (7), (8) без труда доказывается теорема. Действительно из (7) следует ограниченность  $C_n$  и, следовательно, сходимость

Сходимость

$$C_n \rightarrow C, \quad C_{2n} \rightarrow C. \quad (12)$$

Из (7), (8) тогда следует

$$\lim A_n B_n = \lim A_n \cdot \lim B_n = A \cdot B = C \quad (13)$$

### п. 3. Теорема Мертенса

Пусть

а) ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  сходится абсолютно и имеет сумму  $A$ ,

б) ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  сходится и имеет сумму  $B$ .

Тогда ряд

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad c_k = \sum_{\alpha=0}^k a_{\alpha} b_{k-\alpha}$$

сходится и имеет сумму  $C = A \cdot B$

Доказательство.

Обозначим через  $A_n, B_n, C_n$  частичные суммы рядов а), б), в) соответственно:

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k. \quad (I)$$

Для  $C_n$  можно получить следующее представление

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + c_1 + \dots + c_n = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots \\ &+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = a_0 (b_0 + b_1 + \dots + b_n) + \\ &+ a_1 (b_0 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_n b_0 = a_0 (B - R_n) + a_1 (B - R_{n-1}) + \dots \\ &+ a_n (B - R_0) = (a_0 + a_1 + \dots + a_n) B - (a_0 R_n + a_1 R_{n-1} + \dots \\ &\dots + a_n R_0) = A_n \cdot B - (a_0 R_n + a_1 R_{n-1} + \dots + a_n R_0), \end{aligned} \quad (2)$$

где через  $R_n$ , как обычно, обозначен остаток ряда б)

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k. \quad (3)$$

Оценим величину

$$d_n = a_0 R_n + a_1 R_{n-1} + \dots + a_n R_0. \quad (4)$$



В силу сходимости ряда б)  $R_n \rightarrow 0$ , следовательно, можно задать  $\delta_1 > 0$  и определить  $m = m(\delta_1)$  такое, что

$$|R_k| \leq \delta_1 \quad \text{при} \quad k \geq m = m(\delta_1). \quad (5)$$

Положим

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2a} \quad (6)$$

где

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty \quad (7)$$

в силу абсолютной сходимости ряда а).

Пусть  $n > m$  тогда

$$\begin{aligned} & |a_{n-m} R_m + a_{n-m-1} R_{m+1} + \dots + a_0 R_n| \leq \\ & \leq |a_{n-m}| |R_m| + |a_{n-m-1}| |R_{m+1}| + \dots + |a_0| |R_n| \leq \\ & \leq \delta_1 \sum_{k=0}^{n-m} |a_k| \leq \delta_1 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \delta_1 a = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |d_n| & \leq |a_n R_0 + \dots + a_{n-m+1} R_{m-1}| + |a_{n-m} R_m + a_{n-m-1} R_{m+1} + \dots + a_0 R_n| \\ & \leq |a_n R_0 + \dots + a_{n-m+1} R_{m-1}| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Фиксировав  $\varepsilon$ ,  $m = m(\delta_1) = m(\frac{\varepsilon}{2a})$  и тем самым числа

$R_0, R_1, \dots, R_{m-1}$  выберем  $\delta_2 > 0$  и определим для него  $N = N(\delta_2)$  такое, что

$$|a_k| \leq \delta_2 \quad \text{при} \quad k \geq N(\delta_2). \quad (10)$$

Это возможно в силу абсолютной сходимости а).

Положим

$$\delta_2 < \frac{2}{2(|R_0| + |R_1| + \dots + |R_{m-1}|)}. \quad (11)$$

Отсюда при  $n-m \geq N(\delta_2)$

$$|a_n R_0 + \dots + a_{n-m+1} R_{m-1}| \leq |a_n| |R_0| + \dots + |a_{n-m+1}| |R_{m-1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (I2)$$

Окончательно, для  $|d_n|$  из (9) получаем оценку

$$|d_n| \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq N(\delta_2). \quad (I3)$$

В виду произвольности  $\varepsilon$  отсюда следует:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |d_n| = 0. \quad (I4)$$

Теорема доказана.

#### п. 4. Основное свойство экспоненциальной (показательной) функции.

Докажем, пользуясь теоремой Мертенса, что

$$e^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = e^x e^y. \quad (I)$$

Ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k = \frac{x^k}{k!}, \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad b_k = \frac{y^k}{k!} \quad (3)$$

сходятся абсолютно. Образует ряд-произведение

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \text{где} \quad c_k = \sum_{\alpha=0}^k a_{\alpha} b_{k-\alpha} = \sum_{\alpha=0}^k \frac{x^{\alpha}}{\alpha!} \frac{y^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}. \quad (4)$$

По формуле Ньютона

$$(x+y)^k = \sum_{\alpha=0}^k c_{\alpha} x^{\alpha} y^{k-\alpha} = \sum_{\alpha=0}^k \frac{k!}{\alpha! (k-\alpha)!} x^{\alpha} y^{k-\alpha}. \quad (5)$$

Отсюда

$$c_k = \frac{1}{k!} (x+y)^k. \quad (6)$$



Таким образом, мы имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}. \quad (7)$$

По теореме Мертенса, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \quad (8)$$

Отсюда приходим к (I).

п. 5. Определение  $e^z$ ,  $z = x + iy$ .

Степенные ряды являются особо удобным средством для изучения комплексного переменного, т.к. их частичные суммы являются комплексными полиномами, которые обладают во многом свойствами близкими к свойствам вещественных полиномов.

Поскольку мы установили справедливость представления

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (I)$$

мы можем воспользоваться равенством (I) для определения  $e^z$ .

Положим

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (2)$$

где  $z = x + iy$  - произвольное комплексное число. Без труда можно убедиться, что ряд (2) является абсолютно сходящимся, и, что по теореме Мертенса

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad (3)$$

для любых комплексных чисел  $z_1, z_2$ .

В частности, справедливо равенство

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}. \quad (4)$$

Таким образом, нам достаточно знать выражение  $e^{ix}$  чтобы уметь определить  $e^z$  для любого  $z$ .

Вспомним, что функция комплексного переменного

$$E(x) = \cos x + i \sin x \quad (5)$$

обладает характеристическим свойством показательной функции:

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) E(x_2), \quad (6)$$

которое выражает не что иное, как теорему сложения для косинусов и синусов:

$$\begin{aligned} \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) &= \\ &= (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Мы покажем, что

$$e^{ix} = E(x) = \cos x + i \sin x. \quad (8)$$

Формула (8) есть знаменитая формула Эйлера.

Она устанавливает тесную связь между показательной и тригонометрической функцией.

Предварительно мы должны рассмотреть ряд свойств тригонометрических функций.



## Формула Эйлера.

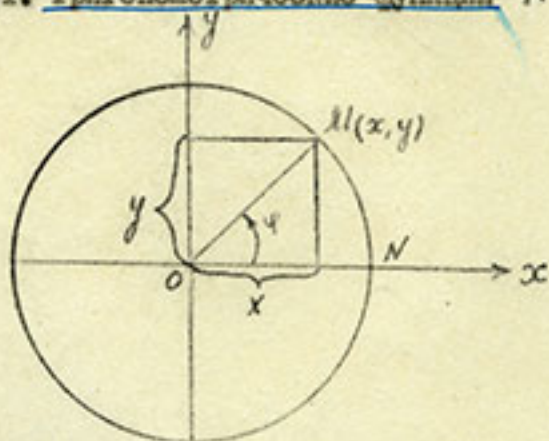
п. I. Тригонометрические функции  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\tan \varphi$ .

Рис I. Определение тригонометрических функций.

Напомним определение тригонометрических функций (см. лекцию № 2).

Если  $M(x, y)$  — точка единичной окружности

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

и  $\varphi$  есть величина дуги  $MON$ , измеряемая длиной дуги, описываемой против часовой стрелки, то по определению

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \\ \frac{y}{x} &= \tan \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Углу  $\varphi$  однозначно соответствует точка  $M(x, y)$  единичной окружности и, следовательно, однозначно соответствует ее координаты  $x$ ,  $y$ . Таким образом,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  являются функциями угла  $\varphi$ . Если откладывать по оси  $\varphi$  значения угла  $\varphi$ , по оси  $x$  значения  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ , то получим следующие графи-

ни (см. рис. 2).

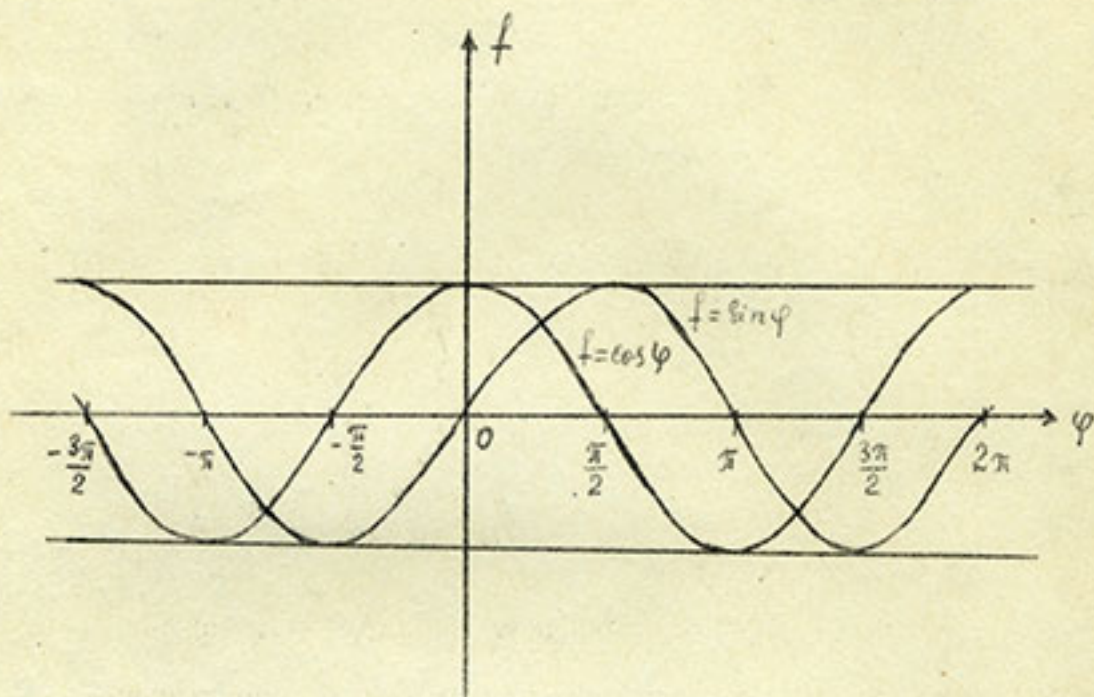


Рис. 2. Графики функций  $f = \cos \varphi$ ,  $f = \sin \varphi$   
 Нетрудно установить следующие свойства функций  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$ :

1.  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  — периодические функции с периодом  $2\pi$ , т.е. для любого  $\varphi$  имеем

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin \varphi, \quad (3)$$

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi. \quad (4)$$

2. Кривая  $f = \cos \varphi$  получается из кривой  $f = \sin \varphi$  сдвигом по  $\varphi$  на  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\cos \varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = T_{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi, \quad (5)$$



где  $T_h$  есть оператор сдвига по  $\varphi$  на  $h$  (см. лекцию № 23).

Действительно, по формуле синуса суммы имеем:

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi \cos\frac{\pi}{2} + \cos\varphi \sin\frac{\pi}{2} = \cos\varphi.$$

Из (5) следует

$$\sin\varphi = T_{-\frac{\pi}{2}} \cos\varphi = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (6)$$

где  $T_h$  оператор сдвига по  $\varphi$  на  $-h$ .

Формула (6) прямо следует из формулы для косинуса разности:

$$\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi \cos\frac{\pi}{2} + \sin\varphi \sin\frac{\pi}{2} = \sin\varphi$$

3.  $f = \sin\varphi$  является нечетной функцией  $\varphi$ :

$$\sin\varphi = -\sin(-\varphi); \quad (7)$$

$f = \cos\varphi$  — является четной функцией  $\varphi$ :

$$\cos\varphi = \cos(-\varphi). \quad (8)$$

На рисунке 2 эти свойства определяют характер симметрии графика:

график  $f = \sin\varphi$  симметричен относительно начала  $f=0, \varphi=0$ ,

график  $f = \cos\varphi$  симметричен относительно оси  $\varphi=0$ .

4. Свойства периодичности и симметрии позволяют свести область полного изменения функций  $f = \sin\varphi$ ,  $f = \cos\varphi$  к сегментам длиной  $\frac{\pi}{2}$ . Функция  $f = \sin\varphi$  монотонно возрастает на сегменте  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  и, как следствие, имеет на этом сегменте обратную функцию, которая обозначается значком *arcsin*:

$$\varphi = \arcsin f. \quad (9)$$

Функция  $f = \cos\varphi$  монотонно возрастает на сегменте  $[-\pi, 0]$

и, как следствие, имеет на этом сегменте обратную функцию, кото-

рая обозначается значком  $\arccos$  :

$$\varphi = \arccos f. \quad (10)$$

Словесно символ  $\arcsin f$  ( $\arccos f$ ) истолковывается как дуга, синус (косинус) которой равен  $f$ .

Если функции  $f = \sin \varphi$ ,  $f = \cos \varphi$  определены в сегментах  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , соответственно  $[-\pi, \pi]$ , то их значения для остальных значений  $\varphi$  легко получаются с помощью свойств периодичности и четности. Более того, в силу свойства 2 достаточно знать только, например,  $\sin \varphi$  в  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

5. Функция  $\operatorname{tg} \varphi$  определяется соотношением :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}. \quad (11)$$

Соотношение (11) позволяет определить  $\operatorname{tg} \varphi$  как монотонно возрастающую функцию в интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (см. рис. 3).

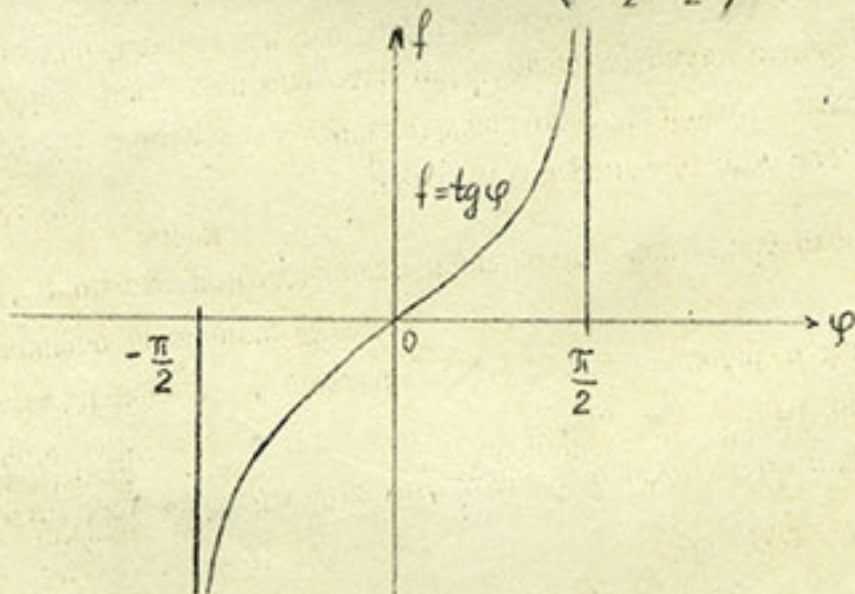


Рис. 3. График функции  $f = \operatorname{tg} \varphi$ .



В точках  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $\operatorname{tg} \varphi$  не определен.  
Следовательно, существует в интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  обратная  
функция  $\operatorname{arctg} x$ .

## п. 2. Определение площади сектора.

Мы определили  $\varphi$  как длину дуги единичной окружности  
аддитивную функцию  $\varphi$  (см. лекцию № 8).

Рассмотрим другую аддитивную функцию дуги —  
площадь сектора, имеющего основанием данную дугу (см. рис. 3).

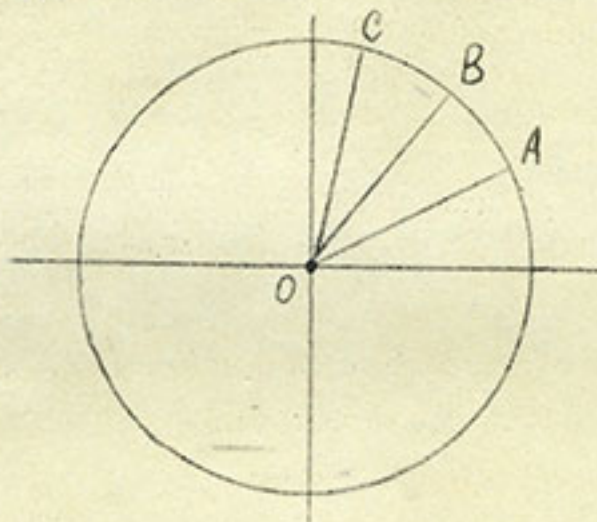


Рис. 3. Площадь сектора как аддитивная функция дуги:  
 $\overset{\sim}{AC} = \overset{\sim}{AB} + \overset{\sim}{BC}$ ,  $\angle COA = \angle BOA + \angle COB$ ;

$$\text{пл. } COA = \text{пл. } BOA + \text{пл. } COB.$$

Поставим в соответствие произвольному сектору  $AOB$  положи-  
тельное число  $S_{AB}$ , называемое площадью, которое определим  
из следующих условий:

1. Для равных секторов  $A'O'B'$ ,  $AOB$  соответствую-  
щие площади равны :

$$S_{AB} = S_{A'B'}, \text{ если } \check{AB} = \check{A'B'}. \quad (2)$$

2. Если  $\check{AC} = \check{AB} + \check{BC}$ , то

$$S_{AC} = S_{AB} + S_{BC}. \quad (3)$$

В силу свойства 1), 2) площадь сектора  $AOB$  определяется исключительно величиной  $\varphi$  угла  $\angle AOB$ , отсчитываемого против часовой стрелки. Мы можем положить

$$S_{AB} = S(\varphi), \quad \varphi = \angle BOA. \quad (4)$$

Функция  $S(\varphi)$  обладает свойством

$$S(\varphi_1 + \varphi_2) = S(\varphi_1) + S(\varphi_2), \quad (5)$$

которое эквивалентно (3).

Как мы уже показывали (см. лекцию № 8), достаточно определить  $\varphi$  и  $S(\varphi)$  для полной окружности, чтобы знать эти величины для любой дуги.

### п. 3. Определение длины единичной окружности и площади круга.

Длину окружности  $\ell = 2\pi$  определяем следующим образом (см.

рис. 4<sub>3</sub>): берем правильный  $2^n$  угольник, вписанный и описанный, и определяем их периметры  $P_{2^n}$ ,  $P_{2^n}$ .



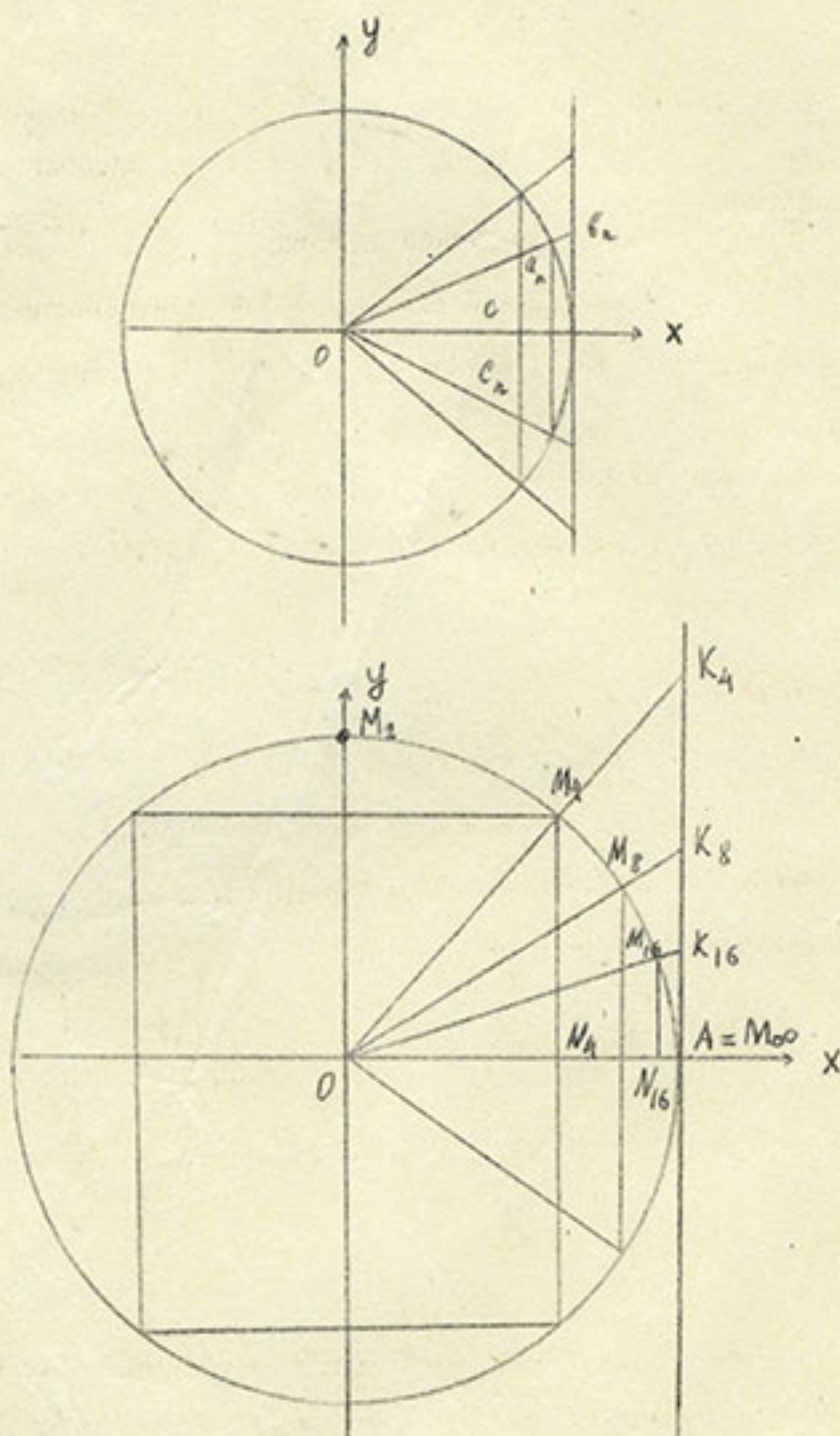


Рис. 4. Определение периметров  $P_{2^n}$  ,  $P_{2^n}$  .

Мы показем, что при  $n \rightarrow \infty$

$$P_{2^n} \rightarrow P_{2^n} \rightarrow l. \quad (1)$$

Общий предел  $l$  последовательностей  $P_{2^n}$ ,  $P_{2^n}$  и определит число  $l = 2\pi$ .

Обозначим:

$$\varphi_n = \angle M_{2^n} O A = \frac{l}{2^{n+1}} = \frac{2\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}, \quad (2)$$

где  $l$  — неизвестная, еще подлежащая определению величина.

Из обозначений рис. 4 следует

$$M_{2^n} N_{2^n} = \sin \varphi_n, \quad (3)$$

$$O N_{2^n} = \cos \varphi_n, \quad (4)$$

$$A K_{2^n} = \operatorname{tg} \varphi_n. \quad (5)$$

Заметим, что не зная еще величины  $l$ , мы можем определить величины  $\sin \varphi_n$ ,  $\cos \varphi_n$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_n$ .

Очевидны следующие равенства:

$$\sin \varphi_1 = \sin M_2 O A = 1,$$

$$\cos \varphi_1 = 0,$$

$$\sin \varphi_2 = \sin M_4 O A = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (6)$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 1.$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\sin \varphi_n = 2 \sin \varphi_{n+1} \cos \varphi_{n+1}, \quad (7)$$

$$\cos \varphi_n = \cos^2 \varphi_{n+1} - \sin^2 \varphi_{n+1} = 2 \cos^2 \varphi_{n+1} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \varphi_{n+1}, \quad (8)$$

которые прямо следуют из формул для синуса и косинуса суммы.

Из (7), (8) имеем

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\sin \varphi_n}{\cos \varphi_n} = \frac{2 \sin \varphi_{n+1} \cos \varphi_{n+1}}{\cos^2 \varphi_{n+1} - \sin^2 \varphi_{n+1}} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi_{n+1}}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_{n+1}}. \quad (9)$$



Соотношения (7), (8), (9) можно разрешить следующим образом, принимая во внимание положительность всех функций при  $n > 1$ :

$$\cos \varphi_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi_n}{2}}, \quad (10)$$

$$\sin \varphi_{n+1} = \frac{\sin \varphi_n}{2 \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi_n}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi_n}{2}}, \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_n} - 1}{\operatorname{tg} \varphi_n}. \quad (12)$$

Формулы (10)–(12) позволяют последовательно определить величины  $\sin \varphi_n$ ,  $\cos \varphi_n$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_n$  начиная с  $n = 2$ .

Тогда для  $P_{2^n}$ ,  $P_{2^n}$  имеем выражения

$$P_{2^n} = 2^{n+1} \sin \varphi_n = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^n}, \quad (13)$$

$$P_{2^n} = 2^{n+1} \operatorname{tg} \varphi_n = 2^{n+1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}. \quad (14)$$

Установим теперь ряд неравенств. Очевидны неравенства

$$0 < \sin \varphi_n < 1, \quad n > 1, \quad (15)$$

$$0 < \cos \varphi_n < 1, \quad n > 1, \quad (16)$$

$$0 < \operatorname{tg} \varphi_n < 1, \quad n > 2. \quad (17)$$

Принимая во внимание (15)–(17) из соотношений (7)–(9), получаем

$$\sin \varphi_n < 2 \sin \varphi_{n+1}, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n > 2 \operatorname{tg} \varphi_{n+1}. \quad (19)$$

$$\sin \varphi_n < \operatorname{tg} \varphi_n. \quad (20)$$

Из (19), (6) следует:

$$\operatorname{tg} \varphi_n < \frac{1}{2^{n-2}}. \quad (21)$$

Из (19), (21) следует:

$$1 - \cos \varphi_n = 2 \sin^2 \varphi_{n+1} < \frac{1}{2^{2n-3}}. \quad (22)$$

Из (8), (21) находим

$$\sin \varphi_n < \frac{1}{2^{n-2}}. \quad (23)$$

Оценим теперь разность  $\operatorname{tg} \varphi_n - \sin \varphi_n$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_n - \sin \varphi_n &= \operatorname{tg} \varphi_n (1 - \cos \varphi_n) \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{n-2}} \frac{1}{2^{2n-3}} = \frac{1}{2^{3n-5}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что последовательность  $P_{2^n}$  монотонно возрастает с ростом  $n$ , последовательность  $P_{2^n}$  монотонно убывает. Действительно, принимая во внимание неравенства (18), (19) имеем:

$$P_{2^{n+1}} = 2^{n+2} \sin \varphi_{n+1} > 2^{n+1} \sin \varphi_n = P_{2^n}, \quad (25)$$

$$P_{2^{n+1}} = 2^{n+2} \operatorname{tg} \varphi_{n+1} < 2^{n+1} \operatorname{tg} \varphi_n = P_{2^n}. \quad (26)$$

Отсюда следует

$$P_{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P, \quad P_{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P, \quad (27)$$

и

$$P \leq P. \quad (28)$$

Но, в силу неравенства (24) имеем

$$P_{2^n} - p_{2^n} = 2^{n+1} (\operatorname{tg} \varphi_n - \sin \varphi_n) \leq \frac{1}{2^{2n-6}}. \quad (29)$$



Отсюда следует

$$p = P = \ell = 2\pi. \quad (30)$$

Ч.т.д.

Итак, мы определили  $2\pi$  как общий предел величин  $p_{2^n}$ ,  $P_{2^n}$ .

Площадь круга совершенно аналогично определяется как общий предел площадей вписанных и описанных  $2^n$  угольников.

Обозначая эти площади через  $s_{2^n}$ ,  $S_{2^n}$  имеем:

$$s_{2^n} = 2^n \cdot \cos \varphi_n \sin \varphi_n, \quad (31)$$

$$S_{2^n} = 2^n \operatorname{tg} \varphi_n. \quad (32)$$

Вновь нетрудно показать, что  $s_{2^n}$  монотонно возрастает,  $S_{2^n}$  — монотонно убывает. В силу

$$\begin{aligned} S_{2^n} - s_{2^n} &= 2^n \operatorname{tg} \varphi_n (1 - \cos^2 \varphi_n) = 2^{n+1} \operatorname{tg} \varphi_n \sin^2 \varphi_{n+1} < \\ &< 2^{n+1} \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{n-5}} \end{aligned} \quad (33)$$

Следует сходимость

$$s_{2^n} \rightarrow S_{2^n} \rightarrow S. \quad (34)$$

Общий предел  $s_{2^n}$ ,  $S_{2^n}$  есть, по определению, площадь круга. Принимая во внимание равенства (14), (32) имеем:

$$S = \pi. \quad (35)$$

#### п. 4. Непрерывность тригонометрических функций.

Мы определили  $S(\varphi)$  как аддитивную функцию длины  $\varphi$  дуги единичного <sup>го</sup> круга. По доказанному п. 3. она удовлетворяет условию

$$S(2\pi) = \pi. \quad (I)$$

Отсюда следует, в силу аддитивности

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2)$$

Докажем теперь предельное соотношение

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} \rightarrow 1, \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (3)$$

Так как  $\sin \varphi$  есть нечетная функция  $\varphi$  нам достаточно доказать соотношение (3) для положительных  $\varphi$ . Рассмотрим сектор с углом  $\varphi$  (см. рис. 5). Очевидны неравенства

$$\frac{1}{2} \sin \varphi < S(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi < \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi, \quad (4)$$

которые обозначают соответствующие неравенства для площадей  $\Delta$ -ка  $COB$ , сектора  $COA$  и  $\Delta$ -ка  $BOA$ . (см. рис. 5).

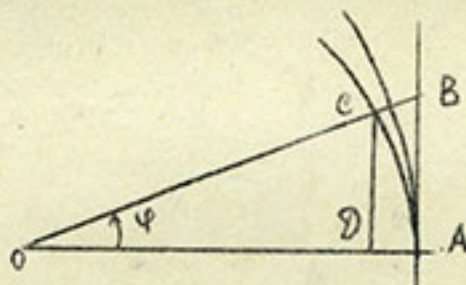


Рис. 5. пл.  $\Delta$ -ка  $COB$  < пл. сектора  $COA$  < пл.  $\Delta$ -ка  $BOA$ .

Отсюда следует

$$0 < \frac{\sin \varphi}{\varphi} < 1 < \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi}. \quad (5)$$

Пусть  $\varphi$  удовлетворяет неравенству

$$\varphi_{n+1} \leq \varphi \leq \varphi_n, \quad \varphi_n = \frac{\pi}{2^n} \quad (6)$$

(отсюда следует)

Пользуясь оценками (21), (22) предыдущего пункта и свойством монотонности функций  $\sin \varphi$ ,  $\operatorname{tg} \varphi$  имеем



$$\frac{\operatorname{tg} \varphi - \sin \varphi}{\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi (1 - \cos \varphi)}{\varphi} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\varphi} \leq \frac{\operatorname{tg} \varphi_n \sin^2 \varphi_{n+1}}{\varphi_{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}}{2^{2n} - 6} = \frac{1}{\pi 2^{2n-6}}.$$

Отсюда, в силу неравенств (5) следует оценка

$$0 < 1 - \frac{\sin \varphi}{\varphi} \leq \frac{1}{\pi \cdot 2^{2n-6}}, \quad (8)$$

$$0 < \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} - 1 < \frac{1}{\pi \cdot 2^{2n-6}} \quad (9)$$

при  $\varphi \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно, имеем

$$\frac{\sin \varphi}{\varphi} \rightarrow 1, \quad \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\varphi} \rightarrow 1, \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (10)$$

Как следствие, получаем предел

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi^2} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\varphi^2} = \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Из замечательных пределов (10), (11) сразу следует непрерывность тригонометрических функций. Например, для  $\sin \varphi$  имеем:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi + h) - \sin \varphi &= \sin \varphi (\cos h - 1) + \cos \varphi \sin h = \\ &= -2 \sin^2 \frac{h}{2} \sin \varphi + 2 \cos \varphi \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2} = \\ &= -2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(\varphi + \frac{h}{2}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда, при достаточно малом  $h$  имеем:

$$\left| \sin(\varphi + h) - \sin \varphi \right| \leq 2 \sin \frac{h}{2} < h. \quad (13)$$

Утверждение доказано.

Аналогично доказывается непрерывность  $\cos \varphi$ .

Непрерывность  $\operatorname{tg} \varphi$  доказывается на основании общего утвер-

ждения:

а) если  $f(x)$ ,  $g(x)$  непрерывны в  $x = x_0$ , то

$F(x) = f(x) \cdot g(x)$  также непрерывна в  $x = x_0$ .

б) если кроме того,  $g(x_0) \neq 0$ , то непрерывно также

$$P(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Доказательство.

а) Преобразуем разность

$$F(x+h) - F(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \quad (14)$$

к виду

$$F(x+h) - F(x) = [f(x+h) - f(x)]g(x) + f(x+h)[g(x+h) - g(x)]. \quad (15)$$

Отсюда следует

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq |f(x_0+h) - f(x_0)| |g(x_0)| + |f(x_0+h)| |g(x_0+h) - g(x_0)|. \quad (16)$$

Выберем  $h$  настолько малым, чтобы для заданного  $\delta_1 > 0$

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \delta_1, \text{ при } |h| < \varepsilon_1. \quad (17)$$

Это возможно в силу непрерывности функции  $f(x)$  и отсюда следует

$$|f(x_0+h)| < |f(x_0)| + \delta_1, \text{ при } |h| < \varepsilon_1. \quad (18)$$

Выберем далее,  $h$  настолько малым, чтобы

$$|g(x_0+h) - g(x_0)| < \delta_2, \text{ при } |h| < \varepsilon_2. \quad (19)$$

Отсюда следует

$$|F(x_0+h) - F(x_0)| \leq |g(x_0)| \delta_1 + [|f(x_0)| + \delta_1] \delta_2, \quad (20)$$



если

$$|x - x_0| = |h| < \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (21)$$

При заданном  $\delta > 0$  положим теперь

$$\delta_1 < \frac{1}{2|g(x_0)|} \delta, \quad \delta_2 < \frac{1}{2|f(x_0) + \delta_1|} \delta. \quad (22)$$

Тогда при выполнении (21)

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| < \delta. \quad (23)$$

Непрерывность  $F(x)$  доказана.

б) Функция  $\Phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  есть суперпозиция двух функций:  
 $\Phi = \frac{f}{g}(x)$ ,  $K(x) = \frac{1}{g(x)}$ .

Последняя функция непрерывна в каждой точке  $g \neq 0$ . Отсюда, мы приходим к непрерывности функции

$$\Phi(x) = f(x) \cdot K(x) \quad \text{в точке } x_0.$$

Утверждение доказано.

Из общего утверждения следует непрерывность  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  для всех значений  $\varphi$ , кроме тех, в которых  $\cos \varphi = 0$ , т.е. в точках  $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ , где  $k$  — произвольное целое.

#### п. 5. Непрерывность обратных тригонометрических функций.

Функции  $f = \sin \varphi$ ,  $f = \cos \varphi$ ,  $f = \operatorname{tg} \varphi$  монотонно возрастают и непрерывны в областях:

$f = \sin \varphi$  в области определения  $P = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  и с областью значений  $F = [-1, 1]$ ,

$f = \cos \varphi$  в области  $P = [\pi, 0]$  и с областью значений  $F = [-1, 1]$ ,

$f = \operatorname{tg} \varphi$  в области  $P = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  и с областью значений  $(-\infty, \infty)$ .

Следовательно, обратные функции существуют и непрерывны в областях:  $\varphi = \arcsin f$  в области определения  $F = [-1, 1]$  и с областью значений  $P = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  
 $\varphi = \arccos f$  в области определения  $F = [-1, 1]$  и с областью значений  $P = [0, \pi]$ ,  
 $\varphi = \operatorname{arctg} f$  в области определения  $F = (-\infty, \infty)$  и с областью значений  $P = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Поэтому будут справедливы соотношения

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\arcsin f}{f} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1, \quad (1)$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} f}{f} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = 1, \quad (2)$$

#### п. 6. Формула Эйлера.

Рассмотрим выражение

$$\sigma_n(ix) = \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n, \quad x > 0, \quad n \text{ натуральное.} \quad (1)$$

Положим

$$\frac{x}{n} = \operatorname{tg} \theta_n, \quad (2)$$

где  $\theta_n$  - некоторый угол. Соотношение (2) можно переписать:

$$\theta_n = \operatorname{arctg} \frac{x}{n}. \quad (3)$$

Ясно, что

$$\theta_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

и кроме того



$$\frac{x}{n\theta_n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty \quad (5)$$

или

$$\omega_n = n\theta_n \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

$\sigma_n(ix)$  можно представить в виде:

$$\sigma_n(ix) = \left( \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right)^n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)^n. \quad (7)$$

Применяя формулу Муавра, имеем

$$(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)^n = \cos n\theta_n + i \sin n\theta_n = \cos \omega_n + i \sin \omega_n. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = 1. \quad (9)$$

Действительно

$$\left( 1 + \frac{x^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \left( 1 + y \right)^{\frac{1}{y} \cdot \frac{x^2}{2n}}, \quad (10)$$

где

$$y = \frac{x^2}{n^2}. \quad (11)$$

Ясно, что

$$\left( 1 + y \right)^{\frac{1}{y}} = e. \quad (12)$$

Отсюда

$$\left( 1 + \frac{x^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \leq e^{\frac{x^2}{2n}}. \quad (13)$$

Так как

$$e^{x^2/2n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (14)$$

то при

$$n \geq N(\varepsilon) \\ \left( 1 + \frac{x^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \leq 1 + \varepsilon. \quad (15)$$

В то же время

$$\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} > 1. \quad (16)$$

Из соотношений (15), (16) следует (9).

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(ix) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \omega_n + i \sin \omega_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \omega_n + i \sin \omega_n) = \cos x + i \sin x. \end{aligned} \quad (17)$$

Итак, мы доказали соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(ix) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{x}{n}\right)^n = \cos x + i \sin x. \quad (18)$$

Соотношение (18), как легко убедиться, справедливо и для  $x < 0$ .

В то же время совершенно аналогично, предыдущему доказывается (см. лекцию № 28)

$$|S_n(ix) - \sigma_n(ix)| \leq \frac{1}{2n} S_{n-2}(|x|). \quad (19)$$

Отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(ix) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(ix) = S(ix) = e^{ix}. \quad (20)$$

Итак, мы доказали формулу Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (21)$$

#### п. 7. Степенные ряды для $\cos x$ , $\sin x$ .

Напишем степенной ряд для

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots + \\ &+ i \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \quad (I)$$



При получении формулы (1) мы использовали соотношения

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad (2)$$

Используя (1), получаем из формулы Эйлера,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (3)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4)$$

В соответствии с тем, что  $\cos x$  есть четная функция  $x$ , ряд (3) есть ряд из четных соотношений  $x$ ,  $\sin x$ , как нечетная функция представляется рядом из нечетных степеней  $x$ , получим некоторое следствие из формулы Эйлера. Меняя  $x$  на  $-x$  и используя свойства четности тригонометрических функций имеем:

$$\cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x = e^{-ix}. \quad (5)$$

Отсюда, складывая (5) равенством (21) предыдущего пункта, имеем:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (6)$$

Вычитая (5) из (21), находим

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (7)$$

#### п.8. Приближенная формула Ньютона для $e^x$ .

В лекции №294 мы установили приближенную формулу Ньютона для функции  $f(x)$ :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \left[ \frac{\Delta^k}{k! h^k} f(x) \right] x^k + O(h), \quad (1)$$

где  $o(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Применим эту формулу к функции  $f(x) = e^x$

• Тогда

$$\frac{\Delta}{h} e^x = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^h - 1}{h} e^x \quad (2)$$

и, вообще

$$\frac{\Delta^k}{h^k} e^x = \left( \frac{e^h - 1}{h} \right)^k e^x. \quad (3)$$

Как было доказано

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1. \quad (4)$$

Отсюда при  $h \rightarrow 0$

$$\sum_{k=0}^n \left[ \frac{\Delta^k}{k! h^k} e^x \right]_{x=0} x^k \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}. \quad (8)$$

Мы приняли здесь во внимание, что  $e^0 = 1$ .

Итак, полином Ньютона функции  $e^x$  при  $h \rightarrow 0$

стремится к частичной сумме  $S_n(x)$  ряда

$$e^x = S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Этот замечательный факт подводит нас вплотную к понятию ряда

Тейлора-Маклорена для функции  $e^x$ .