Лекция II

## Преобразования систем координат и движения

### п. 1. Системы координат и движения в плоскости.

Введя систему координат, мы можем каждой точке поставить в соответствие пару чисел и свести задачи геометрии к алгебраическим задачам.

Этот метод, предложенный Декартом, оказался плодотворным.

Систему координат можно выбирать неоднозначно. Этот факт ~~имеет двоякое значение.~~ может быть использован двояким образом

Для конкретных физических систем выбор конкретной системы координат имеет огромное значение.

Мы это проиллюстрируем примером из астрономии. Птолемей в своей картине мира, принял за центр солнечной системы центр Земли (геоцентрическая система отсчета). Ему в этой системе не удалось описать движение планет.

Копернику, поместившему начало координат в центре Солнца (гелиоцентрическая система координат) удалось просто и естественно объяснить движение планет.

В данном случае удачный выбор системы координат был связан с неоднородностью солнечной планетарной системы: наиболее удачной оказалась система координат, связанная с Солнцем, которое с большой точностью является центром тяжести системы.

В случае однородной физической системы, однородного пространства система отсчета может выбираться произвольно, и различные системы отсчета равноправны.

К этой точке зрения пришел Галилей, он обнаружил, что законы механики сохраняются в системах координат, движущихся с постоянной скоростью.

п.2. Мы будем рассматривать различные прямоугольные декартовы системы координат в плоскости.

оставляющие неизменными базисные векторы

Сначала рассмотрим преобразования систем координат, ~~не меняющие направления осей~~ ~~базисных векторов~~ и меняющие лишь начало координат

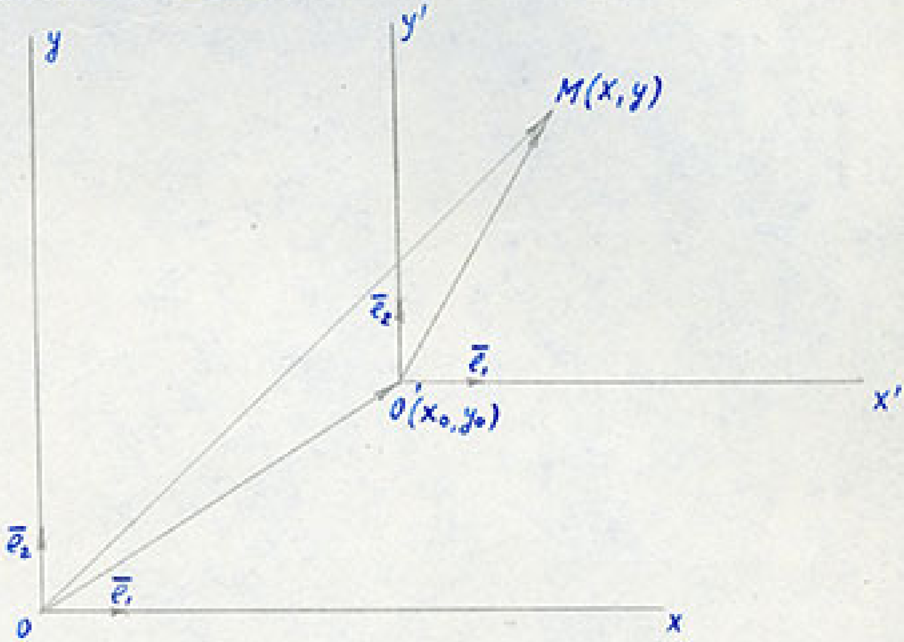



Рис. I. Сдвиг системы координат.

Наряду со старой системой координат, имеющей начало координат O и базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ рассмотрим новую систему координат, имеющую начало O' и те же базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$

Пусть O' имеет в старой системе координаты $x_0, y_0$, а M есть произвольная точка плоскости, которая в старой системе имеет координаты $x, y$ . Определим ее координаты в новой системе .

Из очевидного равенства

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad (1)$$

находим

$$x = x_0 + x' \;, \quad y = y_0 + y' \qquad (2)$$

Отсюда

$$x' = x - x_0 \;, \quad y' = y - y_0 \qquad (3)$$

Соотношения (3) представляют собой формулы перехода от старых координат к новым.

При этом нужно иметь в виду, что рассматриваемая точка $M(x,y)$ не меняет своего положения в старой системе координат , неподвижно связана с ней.

Тесно связана с рассмотренной следующая задача: найти координаты $X, Y$ точки $M'$ в старой системе, которая имеет в новой системе те же координаты, что ~~она имела~~ точка $M(x,y)$ в старой (см.рис 2)

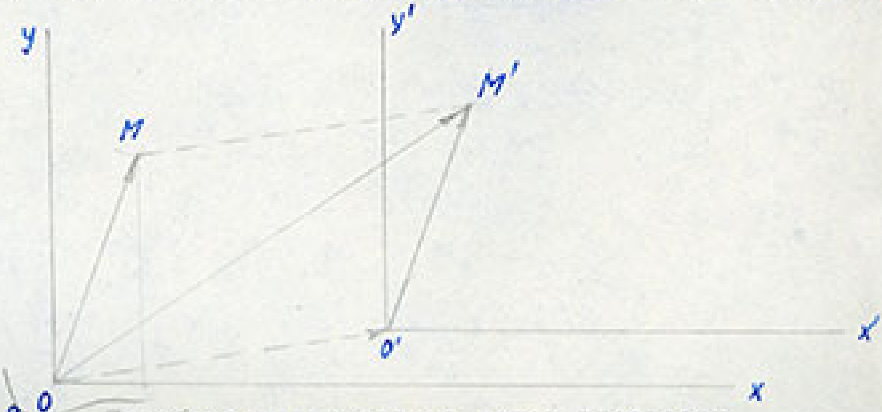



Рис. 2 Преобразование сдвига точек плоскости

~~[illegible]~~

Преобразование сдвига можно представить следующим образом: имеются две бесконечные плоскости (два листа), наложенные друг на друга, так что вначале их оси совпадают. ~~Затем один из листов (для определенности мы будем считать его верхним) начинает двигаться так, что оси координат не меняют направления, точка М ~~верхнего листа~~ таким движением (сдвига, или плоскопараллельного переноса) будет находиться не над точкой~~

Точки верхнего листа ~~лежащие~~ будем обозначать тем же ~~[illegible], что~~ буквами, что и точки, лежащие в нижнем листе под ними.

Затем один из листов (для определенности верхний) начинает двигаться так, что оси координат не меняют направления. Точка М верхнего листа после такого движения будет находиться не над точкой М ~~нижнего~~ а над точкой М' нижнего листа.

В этом случае имеют место равенства:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'}\ , \qquad \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'} \tag{4}$$

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM} \tag{5}$$

Отсюда находим

$$X = x_0 + x\ , \qquad Y = y_0 + y \tag{6}$$

Равенства (6) дают формулы преобразования с д в и г а, в котором точка $M(x,y)$ переходит в точку $M'(X,Y)$. Вектор сдвига $\bar{a} = \overrightarrow{MM'}$ будет один и тот же для всех точек и, в частности, равен вектору $\overrightarrow{OO'}(x_0, y_0)$

Рассмотрим теперь преобразование координат и точек, сохраняющие начало, но меняющие базис

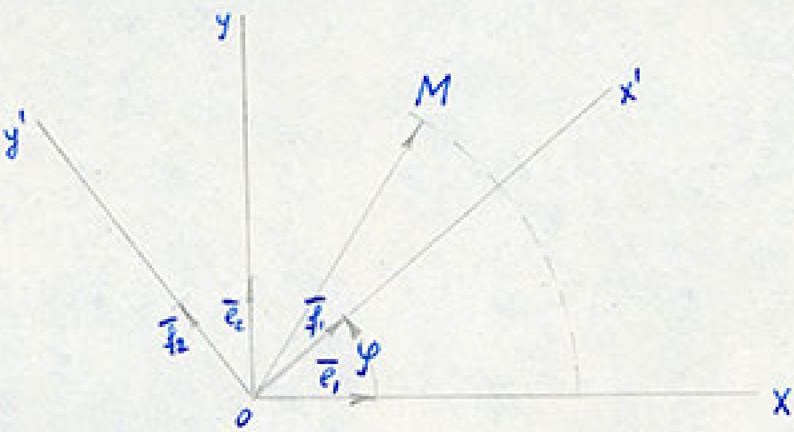



Рис. 3 Вращение системы координат

Вращением на угол $\varphi$ против часовой стрелки (см. рис. 3) базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ переходит в базис $\overline{f}_1, \overline{f}_2$. Разложим векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2$ нового базиса через векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ старого базиса:

$$\overline{f}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{12}\overline{e}_2 \qquad \text{а)}$$

$$\overline{f}_2 = a_{21}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 \qquad \text{б)} \qquad (7)$$

Пользуясь геометрическим определением скалярного произведения составим таблицу скалярных произведений векторов старого базиса:

$$\overline{e}_1\cdot\overline{e}_1 = \overline{e}_1^{\,2} = 1 \quad , \quad \overline{e}_1\cdot\overline{e}_2 = 0$$
$$\overline{e}_2\cdot\overline{e}_1 = 0 \quad , \quad \overline{e}_2\cdot\overline{e}_2 = \overline{e}_2^{\,2} = 1 \qquad (8)$$

векторов ~~н~~нового базиса

$$\overline{f}_1\cdot\overline{f}_1 = \overline{f}_1^{\,2} = 1 \quad , \quad \overline{f}_1\cdot\overline{f}_2 = 0$$
$$\overline{f}_2\cdot\overline{f}_1 = 0 \quad , \quad \overline{f}_2\cdot\overline{f}_2 = \overline{f}_2^{\,2} = 1 \qquad (9)$$

векторов нового и старого базиса:

$$\overline{f}_1\cdot\overline{e}_1 = \cos\varphi \quad , \quad \overline{f}_1\cdot\overline{e}_2 = \sin\varphi$$
$$\overline{f}_2\cdot\overline{e}_1 = -\sin\varphi \quad , \quad \overline{f}_2\cdot\overline{e}_2 = \cos\varphi \qquad (10)$$

Равенства (8), (9) означают, что старый и новый базис являются о р т о н о р м и р о в а н н ы м и, т.е. в каждом базисе векторы единичны и ортогональны между собой.

Равенства (I0) выражают, что базис $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ получается из базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ поворотом на угол $\varphi$. Определим теперь коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ Умножим равенство 7а скалярно на $\bar{e}_1$ :

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}_1^2 + a_{12}\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \qquad (II)$$

Принимая во внимание равенства (I0), из (II) получаем

$$a_{11} = \bar{f}_1 \cdot \bar{e}_1 = \cos\varphi \qquad (I2)$$

Умножим равенство 7а скалярно на $\bar{e}_2$

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{e}_2 = a_{11} \cdot \bar{e}_1\bar{e}_2 + a_{12}\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 \qquad (I3)$$

Принимая во внимание равенства (8), получаем из (I3)

$$a_{12} = \bar{f}_1 \cdot \bar{e}_2 = \sin\varphi \qquad (I4)$$

Аналогично, умножая равенства 7б скалярно на $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, находим, пользуясь таблицей (8):

$$a_{21} = \bar{f}_2 \cdot \bar{e}_1 = -\sin\varphi \qquad (I5)$$

$$a_{22} = \bar{f}_2 \cdot \bar{e}_2 = \cos\varphi \qquad (I6)$$

Определив коэффиценты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ через скалярные произведения таблицы (I0), мы выразили новый базис через старый.

Выразим теперь старый базис через новый.

Формально и к векторным линейным уравнениям мы можем применять алгоритм решения линейных числовых уравнений.

Рассматривая равенства (7) как линейные уравнения, в которых неизвестными является $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, а правыми частями $\bar{f}_1, \bar{f}_2$, находим по формулам Крамера:

$$\bar{e}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{f}_1 & a_{12} \\ \bar{f}_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{22}\bar{f}_1 - a_{12}\bar{f}_2}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{17}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \bar{f}_1 \\ a_{21} & \bar{f}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11}\bar{f}_2 - a_{21}\bar{f}_1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{18}$$

Принимая во внимание равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \tag{19}$$

находим из (17), (18):

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \cos\varphi \cdot \bar{f}_1 - \sin\varphi \cdot \bar{f}_2 \\ \bar{e}_2 &= \sin\varphi \cdot \bar{f}_1 + \cos\varphi\, \bar{f}_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Формулы (20) выражают старый базис через новый.

К формулам (20) можно придти и другим путем. Аналогично тому, как делалось в формулах (II) - (I6) мы будем умножать равенства 7а, 7б скалярно на $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ . В результате (предоставляем это читателю) мы вновь придем к формулам (20).

Установим теперь формулы перехода от старых координат к новым.

Для вектора $\overrightarrow{OM}$ имеем два представления:

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2 \tag{21}$$

в старой системе координат и

$$\overrightarrow{OM} = x' \cdot \bar{f}_1 + y' \bar{f}_2 \tag{22}$$

в новой системе координат.

Приравнивая эти представления, находим:

$$x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = x' \cdot \bar{f}_1 + y' \bar{f}_2 \tag{23}$$

Умножая равенство (23) скалярно на $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ и пользуясь таблицами (9), (I0), находим:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y \\ y' &= -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \end{aligned} \tag{24}$$

Равенства (24) представляют собой искомые формулы перехода от старых координат к новым.

Аналогично, умножая равенства (23) скалярно на $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и пользуясь таблицами (8), (I0), находим:

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi \cdot x' - \sin\varphi \cdot y' \\ y &= \sin\varphi \cdot x' + \cos\varphi \cdot y' \end{aligned} \tag{25}$$

Формулы (25) выражают старые координаты через новые.

Найдем теперь формулы преобразования вращения точек плоскости. При преобразовании вращения точка $M(x,y)$ переходит в точку $M'(X,Y)$, которая в новой системе координат, связанной с базисом $\overline{f}_1, \overline{f}_2$ имеет те же координаты, что и точка $M$ в старой (см.рис.4).

Таким образом имеем:

$$\overrightarrow{OM'} = X\overline{e}_1 + Y\overline{e}_2 = x\cdot\overline{f}_1 + y\overline{f}_2 \tag{26}$$

Отсюда методом скалярных умножений находим:

$$\begin{aligned} X &= \cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y \\ Y &= \sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi\, X + \sin\varphi\, Y \\ y &= -\sin\varphi\, X + \cos\varphi\, Y \end{aligned} \tag{28}$$

Равенства (27) представляют собой формулы преобразования вращения точек плоскости

Вращение есть точечное отображение плоскости $(x, y)$ на саму себя. Точка $M'(X, Y)$ называется <u>образом</u> точки $M(x, y)$, точка $M(x, y)$ — <u>прообразом</u> точки $M'(X, Y)$

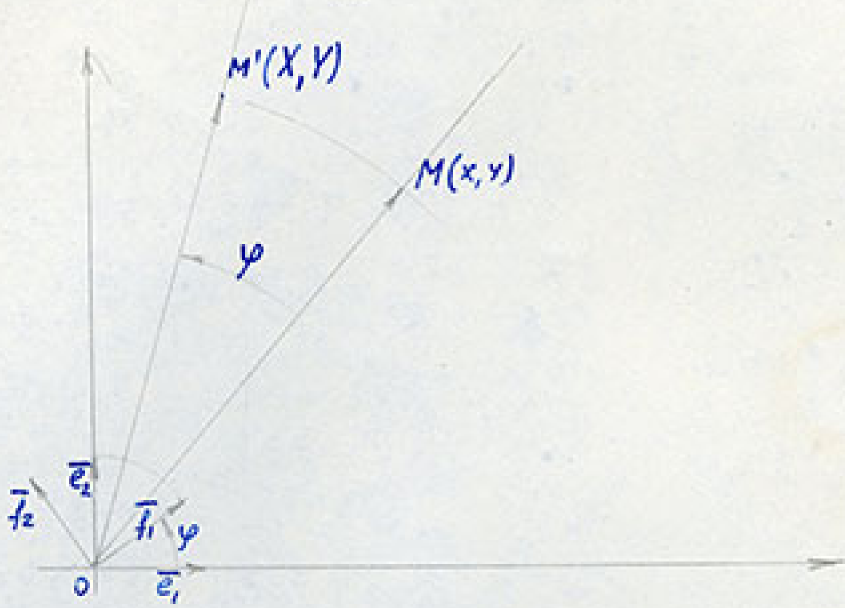



Рис. У Преобразование вращения точек плоскости

Преобразование вращения переводит произвольную точку $M$ в точку $M'$, так что при этом

$$|\overrightarrow{OM'}| = |\overrightarrow{OM}|$$

$$\angle MOM' = \varphi \qquad (29)$$

Преобразование вращения можно представить следующим образом: имеются два экземпляра плоскости (два листа), наложенные друг на друга, так что вначале их оси координат совпадают. Затем один из листов (для определенности мы будем считать его верхним) начинает поварачиваться. Точка $M$ верхнего листа после поворота листа на угол $\varphi$ будет находиться уже не над точкой $M$ а над точкой $M'$ нижнего листа.

Лекция I2

п. 1. ~~Скалярное произведение~~ Инварианты преобразования вращения.

Покажем, что преобразование вращения сохраняет скалярное произведение векторов

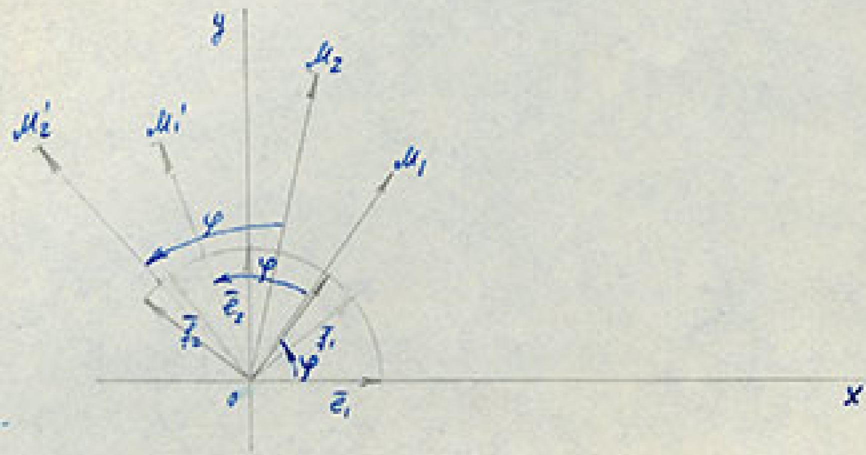



Рис.I. Сохранение скалярного произведения при вращении

Пусть: $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}$ – положение векторов до вращения, $\overrightarrow{OM_1'}, \overrightarrow{OM_2'}$ – положение векторов после поворота на угол $\varphi$. Преобразование вращения сохраняет угол между любыми двумя векторами, длины векторов также сохраняются. Следовательно, мы сможем сказать, что скалярное произведение двух векторов сохранится, поскольку оно ~~скалярное произведение~~ равно произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Покажем это аналитически. Пусть

$$\overrightarrow{OM_1} = \bar{a}(x_1, y_1) \to \overrightarrow{OM_1'} = \bar{a}'(X_1, Y_1)$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \bar{b}(x_2, y_2) \to \overrightarrow{OM_2'} = \bar{b}'(X_2, Y_2) \qquad (I)$$

Покажем, что имеет место равенство:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 = \bar{a}'\cdot\bar{b}' = X_1\cdot X_2 + Y_1\cdot Y_2 \qquad (2)$$

Принимая во внимание формулы преобразования координат вектора при вращении

$$X_1 = \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot y_1 \qquad X_2 = \cos\varphi \cdot x_2 - \sin\varphi \cdot y_2$$

$$Y_1 = \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot y_1 \qquad Y_2 = \sin\varphi \cdot x_2 + \cos\varphi \cdot y_2 \tag{3}$$

И подставляя $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ из (3) в правую часть (2), получим:

$$X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_2 (-\cos\varphi \cdot \sin\varphi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi) +$$

$$+ x_2 \cdot y_1 (-\cos\varphi \cdot \sin\varphi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \,, \quad \text{ч. т. д.}$$

Мы будем говорить, что скалярное произведение двух векторов есть инвариант относительно преобразования вращения.

Рассмотрим геометрические свойства преобразования вращения.

Так как преобразование вращения не меняет длин векторов, то любая окружность с центром в начале координат переходит сама в себя. Мы будем говорить, что окружность ~~является инвариантом~~ инвариантна относительно преобразования вращения.

Произвольный луч при вращении переходит в некоторый другой луч.

Таким образом, семейство окружностей и лучей при преобразовании вращения переходит в семейство окружностей и лучей, т. е. инвариантно относительно преобразования вращения.

п. 2. Зеркальные отражения

Имеются ли еще преобразования плоскости, которые не являются вращениями и которые сохраняют скалярное произведение векторов? Да, такие преобразования имеются.

Рассмотрим произвольную точку и отобразим ее зеркально относительно оси $ox$ (см. рис. 2)

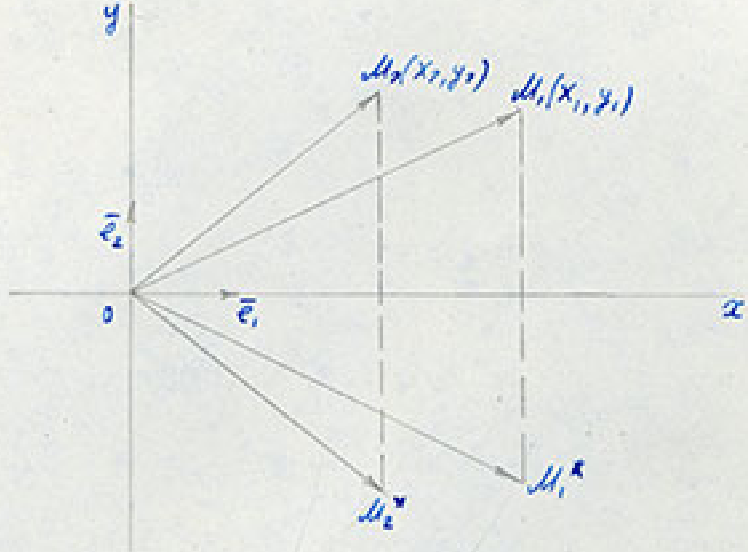



Рис. 2. Зеркальное отражение

Легко видеть из рис.2, что при зеркальном отражении длины сохраняются и угол между векторами сохраняется.

Скалярное произведение сохранилось $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ , так как $x_1, x_2$ сохранились при этом преобразовании, а $y_1, y_2$ изменили только знак на обратный, тем самым $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ осталось неизменным.

Формулы зеркального отражения относительно оси $ox$ имеют вид:

$$X = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$
$$Y = 0 \cdot x - 1 \cdot y \qquad (4)$$

Матрица преобразования есть

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

Зеркальное отражение не является преобразованием вращения.

При вращении каждый вектор поварачивается на один и тот же угол. При преобразовании зеркального отражения разные вектора поварачиваются на разные углы.

Угол между векторами не меняется, но меняется ориентация векторов, как видно из ~~что иллюстрирует~~ рис.3

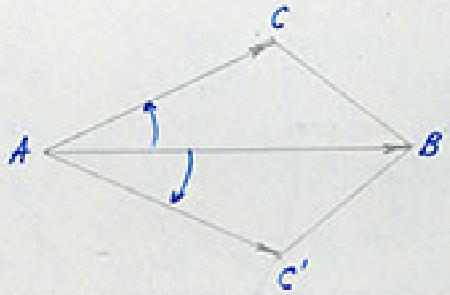



Рис.3. Изменение ориентации при зеркальном отражении.

Треугольник $ABC$ и зеркально симметричный ему треугольник $ABC'$ равны, однако, движением в плоскости треугольники $ABC$ и $ABC'$ мы не можем совместить, они имеют разную <u>ориентацию.</u> Мы можем их совместить движением в пространстве. Например, поворачивая треугольник $ABC$ в пространстве вокруг $AB$ как оси, мы можем его совместить с треугольником $ABC'$

Сохранение ориентации векторов и фигур при вращении и изменение ориентации при зеркальном отражении связаны со знаком определителя преобразования. Определитель преобразования вращения есть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = 1 \qquad (6)$$

Определитель преобразования зеркального отражения относительно оси $x$ есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad (7)$$

п.3. ~~Укажем~~ на связь между отражениями и вращениями.

Возьмем две прямые $OA$, $OB$, пересекающиеся в точке O

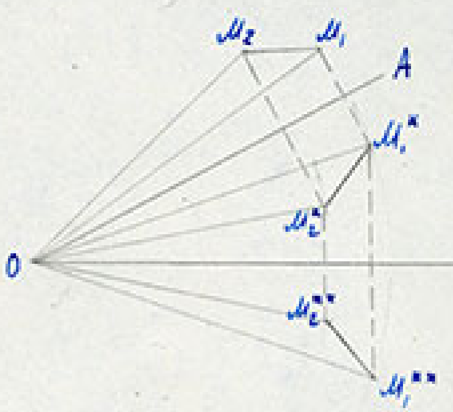



Рис.4. Последовательные отражения относительно двух прямых

Посмотрим, что происходит при двух последовательных зеркальных отражениях относительно этих прямых.

Рассмотрим треугольник $OM_1M_2$. При отражении относительно прямой $OA$ он переходит в треугольник $OM_1^*M_2^*$, ориентация которого иная. Отразив треугольник $OM_1^*M_2^*$ еще раз, но теперь уже относительно прямой $OB$, мы снова изменим его ориентацию. Треугольники $OM_1^{**}M_2^{**}$ и $OM_1M_2$ равны и ориентация их одна, мы можем совместить их путем вращения вокруг точки О.

Итак, два последовательных отражения относительно двух непараллельных прямых дают вращение. Заметим, что два последовательных отражения относительно двух параллельных прямых дают сдвиг.

п.4. Ортогональные преобразования.

Мы рассмотрели преобразования вращения и зеркального отражения, и показали, что они сохраняют скалярное произведение произвольной пары векторов.

Найдем общее аналитическое представление преобразований, сохраняющих скалярное произведение.

[illegible]

Пусть $\vec{OM_1}(x_1, y_1)$, $\vec{OM_2}(x_2, y_2)$ – два произвольных вектора $\vec{OM_1'}(X_1, Y_1)$, $\vec{OM_2'}(X_2, Y_2)$ – их образы в преобразовании

$$\begin{aligned} X &= a_{11}x + a_{12}y \\ Y &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad \cancel{(72)}\ (8)$$

Справедлива

Теорема: Для того, чтобы преобразование (8) сохраняло скалярные произведения, необходимо и достаточно, чтобы $a_{11}$, $a_{22}$, $a_{21}$, $a_{22}$ удовлетворяли условиям:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \qquad \text{а)}$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \qquad \text{б)} \qquad (9)$$

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \qquad \text{в)}$$

Доказательство. Пусть преобразование (8) сохраняет скалярные произведения для любой пары векторов $\overrightarrow{OM_1}$ , $\overrightarrow{OM_2}$ .

Пользуясь (8), находим

$$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} y_1 \qquad Y_1 = a_{21} x_1 + a_{22} y_1 \qquad (10)$$

$$X_2 = a_{11} x_2 + a_{12} y_2 \qquad Y_2 = a_{21} x_2 + a_{22} y_2$$

Составим скалярное произведение ~~образов~~ векторов $\overrightarrow{OM_1'}$, $\overrightarrow{OM_2'}$:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 = a_{11}^2 x_1 x_2 + a_{11} a_{12} y_1 x_2 + a_{11} a_{12} x_1 y_2 +$$

$$+ a_{12}^2 y_1 y_2 + a_{21}^2 x_1 x_2 + a_{22} a_{21} y_1 x_2 + a_{21} a_{22} x_1 y_2 + a_{22}^2 y_2 y_1 =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2) x_1 x_2 + (a_{11} a_{12} + a_{22} a_{21}) y_1 x_2 + (a_{11} a_{12} + \qquad (11)$$

$$+ a_{21} a_{22}) x_1 y_2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2) y_1 y_2 =$$

$$= (a_{11}^2 + a_{21}^2) x_1 x_2 + (a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22})(y_1 x_2 + x_1 y_2) + (a_{12}^2 + a_{22}^2) y_1 y_2$$

Для того, чтобы сохранялось скалярное произведение пары векторов $\overrightarrow{OM_1}$ , $\overrightarrow{OM_2}$ необходимо и достаточно чтобы выполнялось тождество

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2) x_1 x_2 + (a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22})(y_1 x_2 + x_1 y_2) +$$

$$+ (a_{12}^2 + a_{22}^2) y_1^2 \equiv x_1 x_2 + y_1 y_2 \qquad (12)$$

Если условия (9) выполняются, то тождество (I2) справедливо. Необходимость условия (9) доказана. Пусть справедливо тождество (I2), положим в нем

$$x_1 = 1, \quad y_2 = 0$$
$$y_1 = 0, \quad x_2 = 1 \tag{I3}$$

Из (I2) находим:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \tag{I4}$$

Положим

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 1 \tag{I5}$$

Из (I2) находим:

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \tag{I6}$$

Наконец, положим

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 1 \tag{I7}$$

Из (I2) находим:

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0 \tag{I8}$$

Достаточность (I2) и теорема доказаны

Равенства (I3-I8), по существу, доказывают следующую теорему: если преобразование $\xi$(8) переводит некоторую пару линейно независимых векторов $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ в пару $\overrightarrow{OM_1'}$, $\overrightarrow{OM_2'}$, так что при этом

$$\overrightarrow{OM_1}^2 = \overrightarrow{OM_1'}^2; \quad \overrightarrow{OM_2}^2 = \overrightarrow{OM_2'}^2; \quad \overrightarrow{OM_1}\,\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1'}\,\overrightarrow{OM_2'} \tag{I9}$$

то тогда соотношения (I9) справедливы для л ю б о й пары векторов $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$

Преобразования (8) сохраняющие скалярные произведения, называются о р т о г о н а л ь н ы м и.

Покажем, что квадрат определителя ортогонального преобразования равен I.

Действительно, имеем:

$$\Delta^2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 = a_{11}^2 a_{22}^2 - 2a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} + a_{12}^2 a_{21}^2 \qquad (20)$$

Пользуясь условиями (9в), находим:

$$-a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} = a_{11}^2 a_{12}^2 = a_{21}^2 a_{22}^2 \qquad (2I)$$

После этого $\Delta^2$ можно представить в виде:

$$\Delta^2 = a_{11}^2 a_{22}^2 + a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{21}^2 a_{22}^2 + a_{12}^2 a_{21}^2 = a_{11}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2) + a_{21}^2(a_{12}^2 + a_{22}^2) = a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \qquad (22)$$

Утверждение доказано.

Отсюда следует, что для ортогонального преобразования

$$\Delta = \pm 1 \qquad (23)$$

Мы показали, что вращение и отражение являются ортогональными преобразованиями. Для первого $\Delta = 1$, для второго $\Delta = -1$. Знак $\Delta$ указывает на сохранение $(\Delta = +1)$ или изменение $(\Delta = -1)$ ориентации векторов и фигур.

## П.5 ~~Группа вращений~~ Свойства вращений

~~п.5~~ Выпишем формулы преобразования вращения:

$$X = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y$$
$$Y = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y \qquad (24)$$

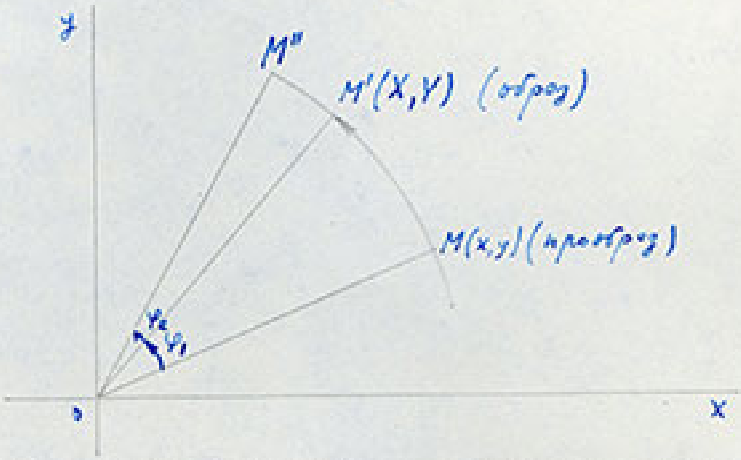



Рис.5. Произведение преобразований вращения

Вращение есть точечное отображение плоскости ( $x, y$ ) на саму себя. Точка $M'(X, Y)$ называется о б р а з о м точки $M(x,y)$, точка $M(x, y)$ - п р о о б р а з о м точки $M'(X, Y)$ Поставим в соответствие каждому преобразованию вращения некоторый символ, некоторую букву.

Рассмотрим два вращения - первое на угол $\varphi_1$ , второе на угол $\varphi_2$ - обозначив их буквами $a$, соответственно $b$ . Первое вращение переводит точку $M$ в точку $M'$ , второе - точку $M'$ в точку $M''$ (см.рис.5). Последовательное проведение вращений $a, b$ эквивалентно одному вращению (мы обозначим его буквой $c$ ) на угол $\varphi_1 + \varphi_2$ . Вращение $c$ на угол $\varphi_1 + \varphi_2$ будем называть п р о и з в е д е н и е м вращений $a$ (вращение на угол $\varphi_1$ ) и вращения $b$ (вращение на угол $\varphi_2$ ).

Символически это можно записать в виде:

$$a \cdot b = c \tag{25}$$

Соотношение (25) мы будем называть з а к о н о м к о м п о - з и ц и и,

Пусть $a_1$, $a_2$, $a_3$ три вращения соответственно на угол $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$. Тогда $a_1 \cdot a_2$ есть вращение на угол $\varphi_1 + \varphi_2$, $a_2 \cdot a_3$ есть вращение на угол $\varphi_2 + \varphi_3$. Очевидно, соотношение (свойство ассоциативности)

$$(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 = a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) \tag{26}$$

Тождественное преобразование, когда все точки остаются на месте, есть вращение на нулевой угол. Такое вращение мы будем называть е д и н и ч н ы м и обозначать символом I. Очевидны соотношения

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a \tag{27}$$

для любого вращения $a$.

Каждому вращению $a$ (на угол $\varphi$) соответствует о б р а т н о е вращение (на угол $-\varphi$). Если совершить последовательно вращение $a$ и обратное ему, то результирующее вращение есть тождественное преобразование. Обозначая обратное вращиние буквой $a^{-1}$, имеем очевидные соотношения

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \tag{28}$$

Заметим, что произведение двух вращений $a, b$ в плоскости не зависит от порядка их проведения:

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{29}$$

Мы будем говорить, что любые два преобразования вращения $a, b$ коммутативны* (перестановочны).

п.6. Введем понятие группы.

Группой называется совокупность (множество) элементов, удовлетворяющих следующим четырем аксиомам.

1. Каждой упорядоченной паре элементов $a, b$ группы ставится в соответствие некоторый элемент той же группы, называемой произведением $a, b$. Это соответствие изображается символическим равенством

$$a \cdot b = c, \quad a \in G, \; b \in G, \; c \in G \tag{30}$$

и называется законом композиции группы.

Соотношение (30) задает операцию группы, которая называется умножением. Таким образом, в группе введена операция умножения, не выводящая за пределы группы.

2. Умножение удовлетворяет ассоциативному закону:

Если $a, b, c$ - любые три элемента группы, то справедливо соотношение

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{31}$$

* Заметим, что это верно только для вращений в плоскости. Вращения в пространстве свойством коммутативности не обладают

3. В группе $\mathcal{G}$ существует единичный элемент (обозначается символом I), такой, что выполняются соотношения:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \tag{32}$$

4. Каждому элементу $a$ группы соответствует о б р а т н ы й элемент (обозначается символом $a^{-1}$), такой, что выполняется соотношение

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \tag{33}$$

Группа $\mathcal{G}$ называется к о м м у т а т и в н о й, если выполняется соотношение

$$a \cdot b = b \cdot a \tag{34}$$

~~Итак~~ Перечисленные в предыдущем пункте свойства вращений указывают на то, что Совокупность вращений плоскости представляет собой коммутативную группу.

Для коммутативной группы композиция группы может записываться иначе: вместо $a \cdot b = c$ можем записать $a + b = c$. Единичный элемент обозначается символом 0, обратный элемент $(-a)$. Таким образом, для коммутативной группы аксиомы I-4 могут быть записаны в виде:

1. $a + b = c$
2. $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$
3. $a+0 = 0+a = a$
4. $a+(-a) = (-a)+a = 0$

В этом случае операция группы может называться сложением.

## п. 7. Примеры групп

Рассмотрим ряд примеров

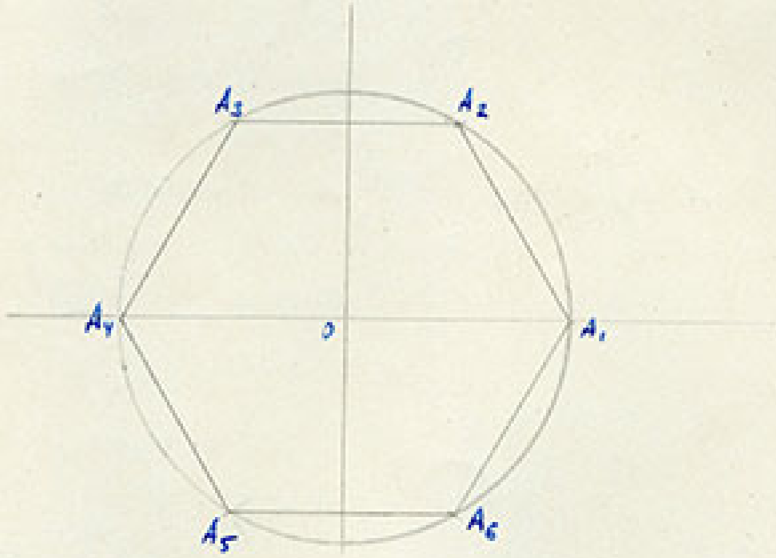



Рис. 6. Группа поворотов 6-угольника

Покажем, что совокупность всех поворотов, которые переводят правильный шестиугольник в себя, образуют группу. Рассмотрим такой поворот, когда $A_1$ перейдет в $A_3$: $A_1 \to A_3$.

~~т.е. $A_1 \to A_3$~~ Тогда:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_2 & \to & A_4 \\ A_3 & \to & A_5 \\ A_4 & \to & A_6 \\ A_5 & \to & A_1 \\ A_6 & \to & A_2 \end{array} \right.$$

Здесь мы видим, что достаточно указать в какую из вершин переходит одна из вершин, чтобы видеть в какие перейдут другие.

Легко видеть, что указанная совокупность поворотов удовлетворяет всем четырем аксиомам, следовательно, она образует группу. Эта группа состоит из конечного числа элементов (<u>конечная</u> группа).

Обозначим через $a$ преобразование, которое переводит $A_1$ в $A_2$.

Рассмотрим преобразование $a^2 = a \cdot a$. Тогда $A_1 \to A_3$

Аналогично ~~и т. д.~~ находим преобразования:

$a^3$ ~~$= a \cdot a \cdot a$~~ : $A_1 \to A_4$

$a^4$ ~~$= a \cdot a \cdot a \cdot a$~~ : $A_1 \to A_5$

$a^5$ : $A_1 \to A_6$

$a^6$ : $A_1 \to A_1$

Итак, мы имеем конечную группу и такой элемент $a$, что его степени дают все преобразования группы, $a^6 = 1$ есть тождественное преобразование.

Такая группа называется ц и к л и ч е с к о й,

Легко убедиться, что группа поворотов правильного $n$-угольника является циклической, $a^n = 1$

Совокупность целых чисел $\{m\}$ образует коммутативную группу, если в качестве закона композиции взять сложение. Тогда для элементов $m, n$ закон композиции определяет элемент $m + n$. Единичный элемент есть 0, обратный для $m$ есть $-m$

Группа целых чисел является <u>бесконечной</u>, так как ~~Она по-прежнему является циклической, так как каждый элемент группы (целое число) представляется положительным кратным~~ содержит бесконечное число элементов

Лекция 13

На прошлой лекции мы рассмотрели понятие группы. Совокупность ~~элементов~~ объектов, для которых определен закон композиции и имеют место аксиомы ассоциативности, единичного и обратного элемента, мы назвали группой.

Запишем аксиомы группы в двух обозначениях

1. $a \cdot b = c$ – закон композиции

2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ – аксиома ассоциативности.

3. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – аксиома единичного элемента

4. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ аксиома обратного элемента

В эти аксиомы не входит требование, чтобы

$$a \cdot b = b a$$

Если группа удовлетворяет такому требованию, то она называется коммутативной.

В случае коммутативных групп систему аксиом можно переписать в другом обозначении:

1. $a + b = c$
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. $a + 0 = 0 + a = a$
4. $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Свойство коммутативности записывается в виде:

$$a + b = b + a$$

Мы видели примеры групп (преобразования вращения, группа чисел на операции сложения). Числа и преобразования – это казалось бы, объекты разной природы .

В дальнейшем мы увидим между ними тесную связь.

Дадим еще примеры групп.

### П.I. Группа растяжений и гомотетий

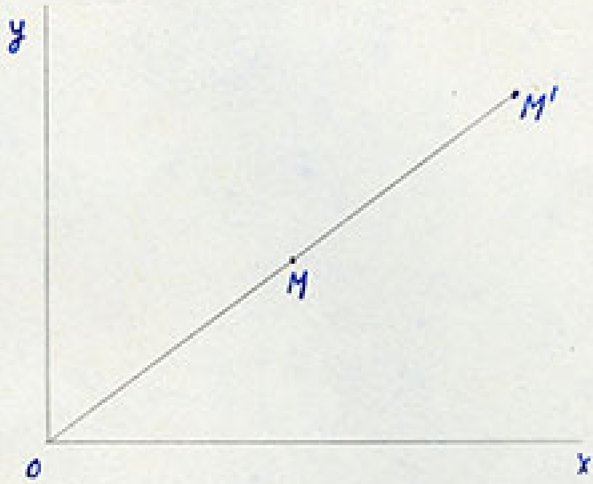



Рис.I. Преобразование растяжения

Пусть $k$ – вещественное положительное число. $M$ – произвольная точка плоскости. Поставим точке $M$ в соответствие точку $M'$ следующим образом: проводим луч $OM$ и откладываем на нем отрезок $OM'$ так, что имеет место равенство

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \qquad (I)$$

Отсюда

$$x' = k \cdot x\ , \quad y' = k \cdot y \qquad (2)$$

Заметим, что при $k=-1$ ~~преобразование~~ гомотетия есть ~~не~~ ~~преобразование~~ отражение относительно начала координат.

Нетрудно видеть, что гомотетия при ~~[illegible]~~ $k<0$ может быть получена последовательным применением преобразования растяжения в $|k|$ раз и отражения относительно центра

Два растяжения, соответствующие числам $k_1$ и $k_2$, равносильны растяжению, которое соответствует числу $k = k_1 \cdot k_2$

Легко показать, что преобразования растяжения образуют группу.

Можно ввести ~~считать~~ более общее ~~понятие растяжения~~ преобразование гомотетии, задаваемое равенствами (2), где ~~когда~~ $k$ является вещественным числом любого знака ~~(строго говоря, при отрицательных $k$ это преобразование не будет преобразованием растяжения, например, при $k = -1$, это есть преобразование симметрии относительно точки 0)~~. Такие преобразования также образуют группу. В дальнейшем мы будем рассматривать ~~обобщенное понятие~~ преобразования гомотетии ~~растяжения~~ (2) с произвольным $k$.

п. 2 Сложение по модулю

Мы знаем, что целые числа $n$ на операции сложения образуют группу. Введем для целых чисел операцию сложения по модулю $k$, где $k$ – некоторое натуральное число. При рассмотрении целых чисел по модулю $k$ число определяется с точностью до кратного $k$. Равенство

$$m = n \mod k \qquad (3)$$

означает, что $(m-n)$ делится нацело на $k$.

Сумма $m+n \mod k$ определяется аналогично: равенство

$$m+n = s \mod k \qquad (4)$$

означает, что $m+n-s$ делится нацело на $k$.

При рассмотрении целых чисел по модулю $k$ каждое число имеет представителя среди чисел 0, 1, ... $k-1$. Таким образом, все целые числа разбиваются на $k$ классов чисел сравнимых с собой по модулю $k$ ~~к~~ (классы сравнения). Таким образом, для произвольного целого числа $m$ справедливо сравнение

$$m = r \mod k, \quad 0 \le r \le k-1 \tag{5}$$

При этом $r$ определяется единственным образом

При сложении чисел по модулю складываются классы сравнения. Рассмотрим пример. Пусть $k = 2$ Тогда любое число $m$ принадлежит одному из классов сравнения:

$$\begin{aligned} m &= 0 \mod 2, \\ m &= 1 \mod 2 \end{aligned} \tag{6}$$

К первому классу принадлежат четные, ко второму - нечетные числа. При сложении четных чисел мы всегда получаем четные, при сложении нечетных - также четные, при сложении четного и нечетного чисел - число нечетное. Это изображается равенствами:

$$\begin{aligned} 0+0 &= 0 \mod 2 \\ 0+1 = 1+0 &= 1 \mod 2 \\ 1+1 &= 0 \mod 2 \end{aligned} \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что классы сравнения $\mod k$ образуют группу.

п.3. Вместо целых чисел $m, k$ в предыдущем пункте можно рассматривать произвольные вещественные числа $a, b, p$ $(p>0)$ и ~~сравнение~~ вести сравнение $\mod p$ ~~по модулю произвольного вещественного числа~~ $p$. Тогда равенство

$$a = b \mod p \tag{3'}$$

попрежнему означает, что $a - b$ делится нацело на $p$.

Равенство

$$a+b=s \mod p \qquad (4')$$

означает, что $a+b-s$ делится на $p$ нацело. Все числа разбиваются на классы сравнения по $\mod p$, и для произвольного числа $a$ справедливо сравнение

$$a=r \mod p \quad , \quad 0 \le r \le p \qquad (5')$$

При этом все числа имеют своих представителей в отрезке $[0,p]$ Так как $p=0 \mod p$, то в нашем рассмотрении точки $0, p$ отождествляются. Тогда вместо отрезка прямой удобно рассматривать окружность длиной $p$. Взяв единичную окружность длиной $p=2\pi$ можно определить сложение углов по модулю $2\pi$. Ясно, что сложение углов по модулю $2\pi$ есть операция группы.

п.4. Рассмотрим важное понятие и з о м о р ф и з м а групп.

Пусть имеются две группы $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ : одна - совокупность элементов $\{a\}$ с законом композиции $a\cdot b=c$ ; другая - совокупность элементов $\{a'\}$ с законом композиции $a'\cdot b'=c'$ Если можно установить взаимооднозначное соответствие $a \leftrightarrow a'$ между элементами групп $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, так что при этом закон композиции сохраняется, то такое соответствие называется изоморфизмом, а группы - изоморфными. Мы можем выразить это символически так: Если

$$a \leftrightarrow a', \quad b \leftrightarrow b', \qquad (8)$$

то

$$a\cdot b \leftrightarrow a'\cdot b' \qquad (9)$$

Укажем примеры изоморфных групп. Как известно, совокупность целых чисел $\{m\}$ образует группу по операции сложения.

Рассмотрим совокупность чисел $\{2^m\}$, где $m$ - любое целое число. В качестве операции группы для этой совокупности введем умножение.

Эти группы будут изоморфны.

Закон соответствия простой: $m \longleftrightarrow 2^m$

Тогда мы имеем следующую сравнительную таблицу:

| | | |
|---|---|---|
| I. | $m+n=s$ | $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n} = 2^s$ |
| 2. | $(m+n)+r = m+(n+r)$ | $(2^m 2^n) \cdot 2^r = 2^m (2^n 2^r)$ |
| 3. | $m+0 = 0+m = m$ | $2^m \cdot 2^0 = 2^0 \cdot 2^m = 2^m$ |
| 4. | $m+(-m) = (-m)+m = 0$ | $2^m \cdot 2^{-m} = 2^{-m} \cdot 2^m = 2^0 = 1$ |

Ясно, что вместо 2 может быть взято любое положительное число. На указанном соответствии изоморфизма основано применение логарифмов. Укажем еще один пример изоморфизма.

Рассморим группу вращений (поворотов), которая переводит правильный $p$ - угольник в себя. Каждое преобразование группы есть поворот на угол кратный углу $\varphi_0 = \frac{2\pi}{p}$. При последовательном проведении вращений на углы $m\varphi_0, n\varphi_0$ ($m, n$ - целые числа), мы получаем вращение на угол $(m+n)\varphi_0$. Таким образом, каждому вращению $R(\varphi)$ отвечает угол $\varphi = m\varphi_0$, а произведению вращений $R(m\varphi_0)$, $R(n\varphi_0)$ отвечает сумма углов $(m+n)\varphi_0$. Таким образом, мы можем установить изоморфизм

$$R(m\varphi_0) \longleftrightarrow m \qquad (10)$$

где для вращений $R(m\varphi)$ закон композиции есть произведение вращений, для целых чисел $m$ закон композиции есть сложение. Так как при вращении на полный угол $2\pi$ мы имеем

$$R(2\pi) = R(p\varphi_0) = R(0) \leftrightarrow 0 \qquad (11)$$

то для чисел $m$ мы должны применять сложение по модулю $p$. Итак, группа вращений правильного $p$-угольника изоморфна группе сложений классов сравнения $\bmod p$.

п.5. Числа и преобразования совокупности

? Примерами групп являются такие объекты как числа и преобразования. Мы установим связь между числом и преобразованием. Как известно, каждой точке прямой мы ставим в соответствие вещественное число и обратно, каждому вещественному числу - точку прямой.

На прямой можем ввести следующие преобразования - преобразования сдвига и преобразования гомотетии.

Преобразование сдвига переводит произвольное число $x$ в число $x'$ по формуле:

$$x' = x + a \qquad (12)$$

Здесь $a$ - вещественное число, соответствующее данному преобразованию сдвига. Каждому преобразованию сдвига отвечает вполне определенное число $a$ и обратно, каждому числу $a$ отвечает преобразование сдвига.

Обозначим преобразование сдвига, соответствующее числу $a$ через $T_a$. Тогда соотношение (12) можно символически представить в виде:

$$x' = T_a \cdot x \qquad (13)$$

Сумме чисел $a+b$ отвечает сдвиг $T_{a+b}$ и справедлив закон композиции

$$T_a \cdot T_b = T_{a+b} \tag{14}$$

Совокупность сдвигов $\{T_a\}$ образует группу. Таким образом, соотношение

$$T_a \leftrightarrow a \tag{15}$$

является изоморфизмом группы сдвигов и группы сложений.

Преобразование ~~растяжения~~ гомотетии ставит каждому числу $x$ в соответствие число $x'$ по формуле

$$x' = a \cdot x \tag{16}$$

Обозначая преобразование гомотетии, [redacted] соответствующее числу $a$ через $H_a$, мы можем записать соотношение (16) в виде:

$$x' = H_a \cdot x \tag{17}$$

Справедлив закон композиции:

$$H_a \cdot H_b = H_{a \cdot b} \tag{18}$$

Совокупность ~~растяжений~~ гомотетий $\{H_a\}$ образует группу. Таким образом, соответствие

$$H_a \leftrightarrow a \tag{19}$$

является изоморфизмом группы ~~растяжений~~ гомотетий и группы умножений. Заметим, что преобразования $H_a$ начало координат $x=0$ оставляет неподвижным:

$$H_a \cdot 0 = 0 \tag{20}$$

Мы убедились, что вещественные числа можно рассматривать как числа (объекты преобразований) и как сами преобразования. Если отождествлять числа и преобразования, то можно записать

$$T_a \cdot b = T_b \cdot a = a + b \tag{21}$$

Таким образом, сумму чисел $a, b$ можно рассматривать, как действие оператора $T_a$ на число $b$ или оператора $T_b$ на число $a$. Аналогично, справедливо соотношение

$$H_b \cdot a = H_a \cdot b = a \cdot b \tag{22}$$

т.е. произведение чисел $a, b$ можно рассматривать как результат действия оператора $H_a$ на $b$ или оператора $H_b$ на $a$.

п.6. Тот факт, что для чисел можно ввести две операции - сложение и умножение, позволяет нам ввести еще более общее понятие, чем понятие группы, а именно - понятие п о л я.

Совокупность объектов или элементов, для которых можно ввести два закона композиции (умножение и сложение), причем каждый удовлетворяет аксиомам коммутативной группы, называется п о л е м.

1. $a \cdot b = \cancel{b}\ b \cdot a = c$
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
4. $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
5. $a + b = \cancel{d}\ b + a = d$
6. $a + (b + c) = (a + b) + c$
7. $a + 0 = 0 + a = a$
8. $a + (-a) = (-a) + a = 0$

При этом должен соблюдаться закон дистрибутивности

9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

связывающих обе групповые операции сложения и умножения.

Множество вещественных чисел удовлетворяет аксиомам I-9 и составляет поле с групповыми операциями сложения и умножения.

п.7. Поле комплексных чисел.

Поле комплексных чисел мы будем строить по аналогии с полем вещественных чисел.

Мы установили изоморфизм между группами сложения и умножения вещественных чисел и группами преобразований точек прямой: преобразований сдвига и гомотетии ~~растяжения~~.

Для комплексных чисел сначала мы определим группы преобразований точек плоскости, а затем, по соответствию изоморфизма, определим операции над комплексными числами.

Каждому комплексному числу ставится в соответствие точка плоскости. Можем сказать, что комплексное число есть упорядоченная пара вещественных чисел.

Чтобы определить поле комплексных чисел, надо определить две операции - сложение и умножение.

П.8. В случае вещественных чисел сложение с некоторым числом $a$ определяло преобразование сдвига $T_a$. По аналогии, для комплексных чисел сложению будем ставить в соответствие преобразование сдвига. Пусть $w = (a, b)$ есть комплексное число. Поставим ему в соответствие преобразование сдвига в плоскости $x, y$ по формуле:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b \tag{23}$$

Обозначим через $T_w$ преобразование сдвига (23), соответствующее комплексному числу $w = (a, b)$

Пусть $w_1(a_1, b_1)$, $w_2(a_2, b_2)$ - два комплексных числа, которым соответствует преобразование сдвига $T_{w_1}$, $T_{w_2}$. Произведение этих преобразований есть снова преобразование $T_w$, которому отвечает число $w(a, b)$.

$$T_{w_1} \cdot T_{w_2} = T_w \tag{24}$$

Ясно, что

$$w = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \tag{25}$$

Соотношение (25) определяет закон сложения комплексных чисел:

$$w = w_1 + w_2 \tag{26}$$

Аналогично тому, что говорилось в конце п.4, мы можем заметить, что

$$T_{w_1} \cdot w_2 = T_{w_2} \cdot w_1 = w_1 + w_2 \tag{27}$$

т.е. сумму двух комплексных чисел $w_1, w_2$ можно рассматривать как результат применения преобразования $T_{w_1}$ к числу $w_2$ или как результат применения преобразования $T_{w_2}$ к числу $w_1$. Так как каждому комплексному числу $w$ отвечает вектор ( $a, b$ ), то можно сказать, что сумма комплексных чисел аналогична сумме векторов.

п.9. Определим теперь умножение комплексных чисел. По аналогии, в операции умножения каждому комплексному числу отвечает некоторое преобразование точек плоскости.

Можно ожидать, что эти преобразования оставляют неизменным начало координат.

Заметим прежде всего, что вещественные числа являются частным случаем комплексных. Мы будем, для определенности, считать, что вещественным числам отвечают точки оси $x$, т.е. точки $w(x,0)$. По аналогии, умножению на вещественное число $w(k,0)$ мы ставим в соответствие преобразование гомотетии $H_k$ ( ~~[illegible]~~ )

$$x' = kx, \quad y' = k\cdot y \tag{28}$$

Аналогично предыдущему, мы можем записать для вещественного $k=\{k,0\}$ и комплексного $z=\{x,y\}$ :

$$H_k\cdot z = k\cdot z = (kx, ky) \tag{29}$$

Пусть $z=\{x,y\}$ произвольное комплексное число, и $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ - его модуль. Тогда $z$ может быть представлено в виде:

$$z=\{x,y\} = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\} = \rho\cdot w \tag{30}$$

где

$$w = (\cos\varphi, \sin\varphi) \tag{31}$$

комплексное число, модуль которого равен I, а $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ определяются равенствами

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} \tag{32}$$

$\varphi$ называется аргументом числа $z$.

Комплексные числа $w$ вида (31) мы будем называть унимодулярными. Равенство (30) означает, что каждое комплексное число $z=(x,y)$ может быть представлено в виде произведения вещественного положительного числа $\rho$ на унимодулярное число $w$ (31)

Мы определили умножение на вещественное число. Определим теперь умножение на унимодулярное число $w$ (31). Умножению на унимодулярное число $w = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ мы поставим в соответствие преобразование, или как мы еще будем говорить, оператор ~~оператор~~ вращения $R_\varphi$. Пусть

$$z = \{x, y\} = \{\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\} = \rho\{\cos\theta, \sin\theta\} \tag{33}$$

Тогда, применив оператор $R_\varphi$ к числу $z$ мы имеем:

$$R_\varphi \cdot z = \rho\{\cos(\theta+\varphi), \sin(\theta+\varphi)\} \tag{34}$$

Равенство (34) мы можем переписать в виде:

$$w \cdot z = \rho\{\cos(\theta+\varphi), \sin(\theta+\varphi)\} \tag{35}$$

Умножению на произвольное комплексное число

$$z = \{x, y\} = \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\} \tag{36}$$

мы ставим в соответствие преобразование $A_z = H_\rho \cdot R_\varphi$

Совокупность преобразований $A_z$ образует коммутативную группу преобразований подобия, оставляющих неподвижным центр.

Преобразование подобия $A_z$ переводит треугольник $OAB$ в треугольник $OA''B''$, так что коэффициент подобия равен $\rho$, а треугольник $OA''B''$ получается из треугольника $OAB$ сначала растяжением в $\rho$ раз ($\Delta$-к $OA'B'$), затем поворотом треугольника $OA'B'$ на угол $\varphi$ (см.рис.2)

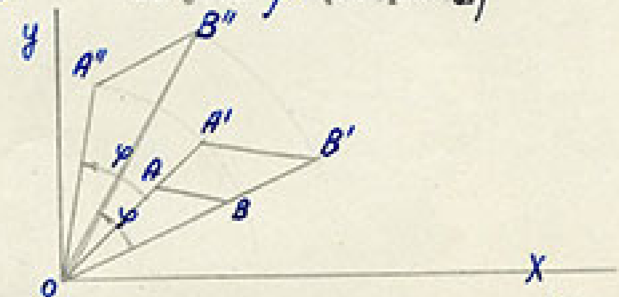



Рис.2. Преобразование подобия $A_z = H_\rho \cdot R_\varphi$

$z = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, $OA' : OA = OB' : OB = \rho$

Теперь мы можем определить произведение произвольных комплексных чисел $z_1, z_2$

Пусть

$$z_1 = \{x_1, y_1\} = \rho_1 \cdot w_1 = \rho_1 \{\cos\varphi_1, \sin\varphi_1\}$$
$$z_2 = \{x_2, y_2\} = \rho_2 \cdot w_2 = \rho_2 \{\cos\varphi_2, \sin\varphi_2\} \qquad (37)$$

Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 = A_{z_1} \cdot z_2 = A_{z_2} \cdot z_1 = \rho\{\cos\varphi, \sin\varphi\} = \\ = \rho_1 \cdot \rho_2 \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\} \qquad (38)$$

Это означает, что при перемножении комплексных чисел $z_1, z_2$ получается комплексное число, модуль $\rho$ которого есть произведение модулей $\rho_1, \rho_2$ чисел $z_1, z_2$, а аргумент $\varphi$ есть сумма аргументов $\varphi_1 + \varphi_2$ чисел $z_1, z_2$

п.10. Мы ввели, пользуясь языком преобразований, операции сложения и умножения для комплексных чисел. Каждая операция является группой. Докажем, что выполняется аксиома дистрибутивности, т.е. (см.рис. 3 )

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \qquad (39)$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — аргументы $z_1, z_2, z_3$ , $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ — модули $z_1, z_2, z_3$; $w_1, w_2, w_3$ — соответствующие унимодулярные числа.

NB Рисунки должны соответствовать вектора (числа) $(z_1+z_2)z_3$, $z_1z_3+z_2z_3$ равны.

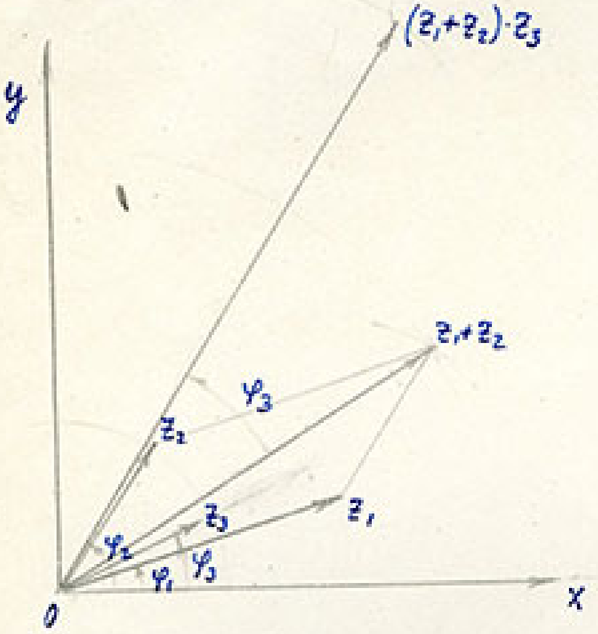



Рис.3а. Геометрическое представление числа $(z_1+z_2)\cdot z_3$

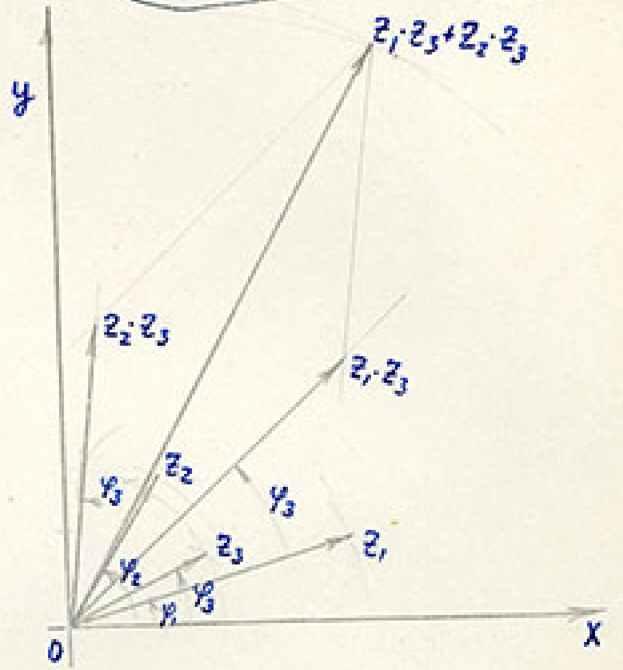



Рис.3б. Геометрическое представление числа $z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$

Число в левой части равенства (39) есть результат действия преобразования подобия $A_{z_3}$ на сумму двух чисел (векторов) $z_1, z_2$, число в правой части есть результат действия преобразования подобия $A_{z_3}$ на каждое число $z_1, z_2$ и ~~затем взятие~~ суммирования получившихся чисел (векторов). Так как при преобразовании подобия параллелограм переходит в параллелограм и диагональ в диагональ, то равенство (39) доказано.

?

Мы доказали диструбутивность. Следовательно, комплексные числа образуют поле.

Лекция I4

## П.1 Алгебраическое представление числа

~~п.I.~~ Мы дали геометрическое определение операции над комплексными числами.

Более удобно алгебраическое представление комплексного числа, которое позволяет значительно упростить действия с комплексными числами. Введем понятие мнимой единицы.

~~Чтобы дать алгебраическое представление комплексного числа, мы должны~~ ввести понятие мнимой единицы.

Мы знаем, что комплексное число представляется точкой плоскости (см. рис 1)

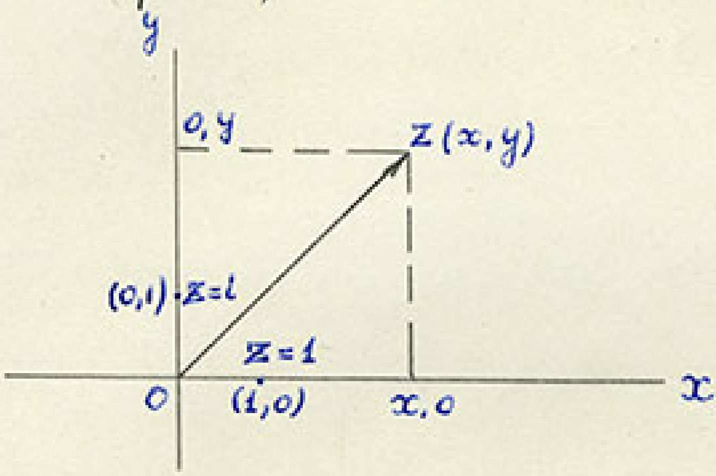



Рис.I. Представление комплексного числа в виде $x+iy$

Точка (I, 0) есть вещественное число (вещественная единица), а точка с координатами (0, I) есть комплексное число, называемое *мнимой единицей*. Обозначается оно символом $i$. Таким образом, имеем:

$$1=(1,0), \qquad i=(0,1) \tag{I}$$

Нетрудно видеть, что $z = (x, y)$ может быть представлена в виде

$$z = x \cdot 1 + i \cdot y = x + iy \tag{2}$$

Действительно

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= (x, 0) \\ y \cdot i &= (0, y) \end{aligned} \tag{3}$$

$$x \cdot 1 + i \cdot y = (x, y) \tag{4}$$

Представление (2) есть, по существу, разложение произвольного комплексного числа $z$ по базису $1,\ i$.

п. 2 Мнимая единица (алгебраическое определение)

Что означает умножить комплексное число на $i$ ?
По определению, умножить какое-либо комплексное число на $i$ значит повернуть вектор, соответствующий комплексному числу, на угол $\frac{\pi}{2}$.

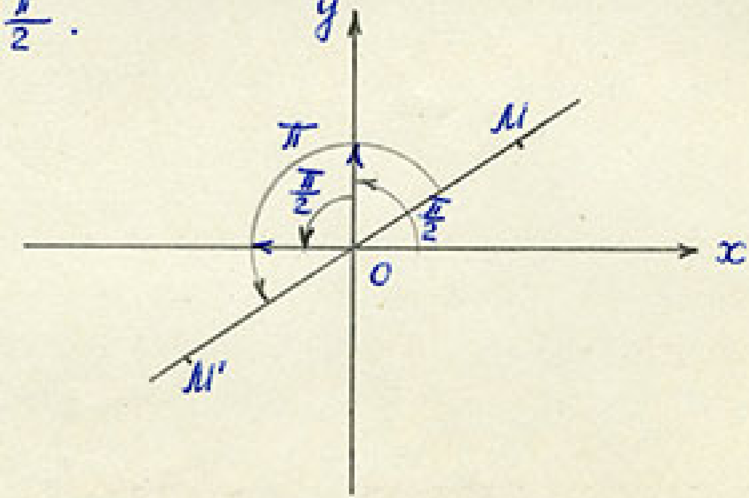



Рис. 2. Геометрический смысл преобразования $i,\ i^2$

Умножить на -I - означает применить оператор поворота на угол $\pi$ или, что то же, оператор симметрии относительно начала. Отсюда следует

$$i^2 = -1 \tag{5}$$

Число $i\,(0,1)$ после умножения на $i$ переходит в число $(-1, 0)$.

п.3. Алгебраическое определение действий над комплексными числами

Всякое комплексное число есть число вида $z = x + iy$ где $x, y$ - вещественные числа, а $i$ можно рассматривать как некоторое алгебраическое переменное, удовлетворяющее условию (5).

Сложение и умножение комплексных чисел производится как действие с алгебраическими выражениями вида $z = x + iy$

Если

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{6}$$

два комплексных числа, то сумма определяется как сумма алгебраических выражений (6), после соответствующего приведения подобных:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2) \tag{7}$$

Здесь не потребовалось свойство (5) числа $i$ . При умножении выражений (6) уже требуется свойство (5). После приведения подобных и применения (5) получаем

$$Z_1 \cdot Z_2 = \overbrace{\cancel{x_1 \cdot x_2 + iy_1}}^{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=} x_1 x_2 \overset{+ix_1y_2}{+} ix_2y_1 + i^2 y_1 \cdot y_2 =$$

$$= x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(y_1 x_2 + x_2 y_1) \qquad (8)$$

Покажем, что это правило умножения алгебраических чисел совпадает с геометрическим правилом умножения комплексных чисел. Достаточно установить это на примере унимодулярных чисел

$$Z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1 \qquad Z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$$

Применяя правило (8)

$$Z_1 \cdot Z_2 = (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) +$$
$$+ (\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \qquad (9)$$

приходим к известному закону умножения.

Алгебраическое представление комплексных чисел значительно упрощает действия с комплексными числами.

Понятие комплексного числа оказалось очень плодотворным, и позволило получить простым и естественным образом много интересных математических соотношений.

п.4. Рассмотрим некоторые свойства комплексных чисел. Для комплексного числа $Z = x + iy$ $x$ - называется вещественной частью, $iy$ - мнимой частью. Мы имеем обозначения

$$x = \operatorname{Re} Z \qquad (10)$$

$$yi = \operatorname{Im} Z \qquad (11)$$

Числа вида $iy$ называются чисто мнимыми.

I) Умножая действительное число на $i$, получаем чисто мнимое число $x \cdot i$

2) Умножая чисто мнимое число на $i$, получаем действительное число:

$$(i \cdot y) \cdot i = i^2 \cdot y = -y$$

Для комплексного числа вводятся понятия модуля и аргумента.

3) Модуль комплексного числа вычисляется по формулам:

Жели, мни:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (I2)$$

Модуль числа есть не что иное, как модуль соответствующего вектора или расстояние соответствующей точки до начала.

4) Аргументом $z$ называют угол $\varphi$, который составляет вектор, определяемый числом, с осью $Ox$. Нетрудно видеть, что

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (I3)$$

Число $z = x + iy$ представляется в виде

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (I4)$$

где $\rho, \varphi$ связаны с $x, y$ соотношениями (I2), (I3). Формула (I4) называется тригонометрическим представлением комплексного числа.

Для модуля и аргумента $z$ применяются обозначения

$$\rho = |z|, \qquad \varphi = \arg z \tag{I5}$$

Введем понятие сопряженного ~~комплексног~~о числа.

Если $z = x + iy$, то, по определению,

$$z^* = x - iy \tag{I6}$$

есть ~~комплексное~~ сопряженное число

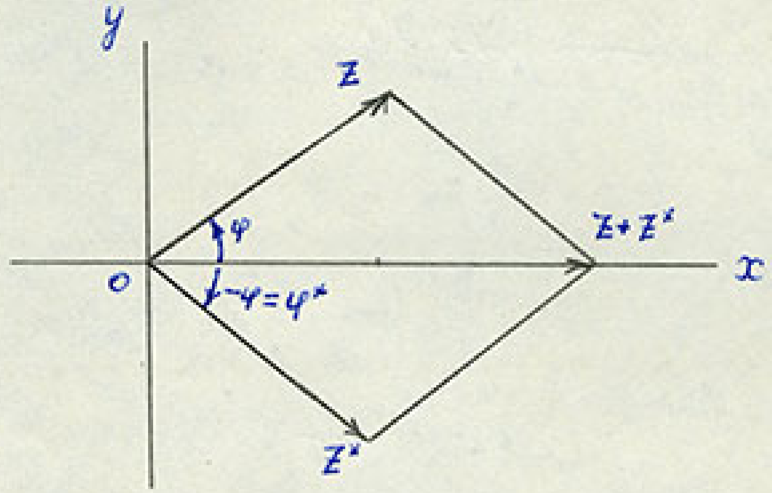



Рис. 3. ~~Комплексно~~ Сопряженное число.

Свойства сопряженного числа:

I) ~~Комплексно-~~Сопряженное число изображается точкой, которая есть зеркальное отражение точки $z$ относительно оси $Ox$:

$$\arg z = -\arg z^*, \qquad |z| = |z'| \tag{I7}$$

4). Свойство сопряженности является взаимным, или, как еще говорят, рефлексивным:

$$(z^*)^* = z \qquad (20)$$

т.е. ~~число сопряженное~~ если $z_2 = z_1^*$ есть сопряженное $z_1$, то и, обратно, $z_1 = z_2^* = (z_1^*)^*$ есть сопряженное $z_2$.

~~Мы уже видели, что произведение двух отражений относительно двух осей, составляющих угол, есть вращение на двойной угол 2φ.~~

Сл

2) Сумма комплексного чисел и его сопряженного есть вещественное число:

$$z + z^* = 2x \tag{18}$$

3) произведение комплексного числа и его сопряженного есть вещественное число :

$$z\cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + ixy - iyx + y^2 = x^2+y^2 = |z|^2 = |z^*|^2 \tag{19}$$

Уравнение окружности с центром в начале координат может быть записано в виде:

$$z\cdot z^* = 1 \qquad \text{или} \qquad |z| = 1$$

п.5. Формула Моавра.

Определим $z^n$ для унимодулярного числа

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{21}$$

Применяя правило сложения аргументов, получаем

$$z^2 = z\cdot z = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

$$z^2 = z^2\cdot z = (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi \tag{22}$$

Для произвольного натурального $m$ находим:

$$z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{23}$$

Равенство (23) называется формулой Моавра. Формула Моавра справедлива и для отрицательных целых $n$ .

Равенство (23) имеет смысл и для произвольных вещественных $n$ . Тогда оно называется формулой Эйлера и записывается в виде:

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad (24)$$

Формула Эйлера и символ $e^{i\varphi}$ будут рассмотрены нами позднее.

Лекция 15

## п.1. Деление комплексных чисел

[redacted] Как было показано на предыдущей лекции, представление комплексного числа в виде $z = x + iy$ позволяет значительно упростить действия с комплексными числами.

Рассмотрим деление комплексных чисел. Пусть

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{1}$$

два комплексных числа.

Рассмотрим дробь

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} \tag{2}$$

Следовательно, $\frac{z_2}{z_1}$ ~~-~~ есть некоторое комплексное число $z = x + iy$, ~~поскольку~~ Мы показали, что множество комплексных чисел образует поле. Исходя из этого, мы можем положить:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = x + iy \tag{3}$$

где $x, y$ - некоторые подлежащие определению вещественные числа.

Умножая равенство (3) на $x_1 + iy_1$, находим

$$x_2 + iy_2 = (x_1 + iy_1)(x + iy) \tag{4}$$

После приведения подобных, имеем:

$$(x_1 x - y_1 y) + i\,(x_1 y + y_1 x) = x_2 + iy_2 \tag{5}$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны соответственно их вещественные и мнимые части. Отсюда приходим к двум равенствам:

$$\begin{aligned} x_1 x - y_1 y &= x_2 \\ y_1 x + x_1 y &= y_2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Мы получили систему двух линейных уравнений относительно $x$ и $y$. Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + y_1^2 \qquad (7)$$

Если

$$\Delta = 0, \quad \text{то} \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad Z_1 = 0 \qquad (8)$$

Этот случай мы отбрасываем, считая, что $Z_1 \neq 0, \Delta \neq 0$

По правилу Крамера находим $x$ и $y$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & -y_1 \\ y_2 & x_1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^2 + y_1^2} \qquad (9)$$

Укажем на второй способ нахождения частного $\frac{z_2}{z_1}$, использующий понятие ~~комплексно~~-сопряженного числа.

Умножим числитель и знаменатель на одно и то же число, при этом потребуем, чтобы знаменатель стал вещественным. Для этого знаменатель надо умножить на ~~комплексно~~-сопряженное число:

$$\frac{x_2+iy_2}{x_1+iy_1}=\frac{(x_2+iy_2)(x_1-iy_1)}{(x_1+iy_1)(x_1-iy_1)}=\frac{(x_2\cdot x_1+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1^2+y_1^2} \qquad (10)$$

Для $x$ и $y$ получаем такие же выражения, как и в первом способе

$$X=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}, \qquad y=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2} \qquad (11)$$

п.2 Аналитическая геометрия на плоскости и комплексные числа

~~п.2.~~ Рассмотрим две задачи, связанные с аналитической геометрией на плоскости.

Мы знаем, что каждое комплексное число изображается вектором или точкой плоскости. Как выразить, что векторы $z_1$ и $z_2$ коллинеарны? Нетрудно видеть, что для этого необходимо и достаточно условия:

$$\frac{z_2}{z_1}=k, \qquad (12)$$

где $k$ - вещественное число.

Мы можем записать, как условие коллинеарности $z_1, z_2$:

$$\operatorname{Im}\frac{z_2}{z_1} = 0 \tag{13}$$

Пользуясь (II), находим:

$$y_2 x_1 - y_1 x_2 = 0, \tag{14}$$

Откуда

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \tag{15}$$

Мы пришли к известному условию коллинеарности. Найдем условие ортогональности векторов, соответствующих $z_1, z_2$.

Пусть векторы $z_1, z_2$ ортогональны. Если $z_1$ повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$, то вектор полученный в результате поворота, станет коллинеарным вектору $z_2$.

Повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$, значит умножить на $i$. Следовательно, $z_1 \cdot i$ – вектор коллинеарный $z_2$.

Запишем условия коллинеарности $z_2$ и $z_1 i$:

$$\frac{z_2}{z_1 \cdot i} = k \tag{16}$$

где $k$ – вещественное число

Отсюда

$$\frac{z_2}{z_1} = ki \tag{17}$$

$ki$ - чисто мнимое число

Окончательно мы можем записать как условие ортогональности $z_2$ и $z_1$ :

$$\operatorname{Re}\frac{z_2}{z_1} = 0 \qquad (18)$$

Пользуясь (II) находим:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 = 0 \qquad (19)$$

Мы пришли к известному условию ортогональности.

Итак, когда мнимая часть $\frac{z_2}{z_1}$ равна нулю, то векторы $z_1$ , $z_2$ коллинеарны, когда вещественная часть $\frac{z_2}{z_1}$ равна нулю - векторы ортогональны.

п.3 Инверсия

~~п.3.~~ Введем понятие зеркального отражения точки относительно окружности.

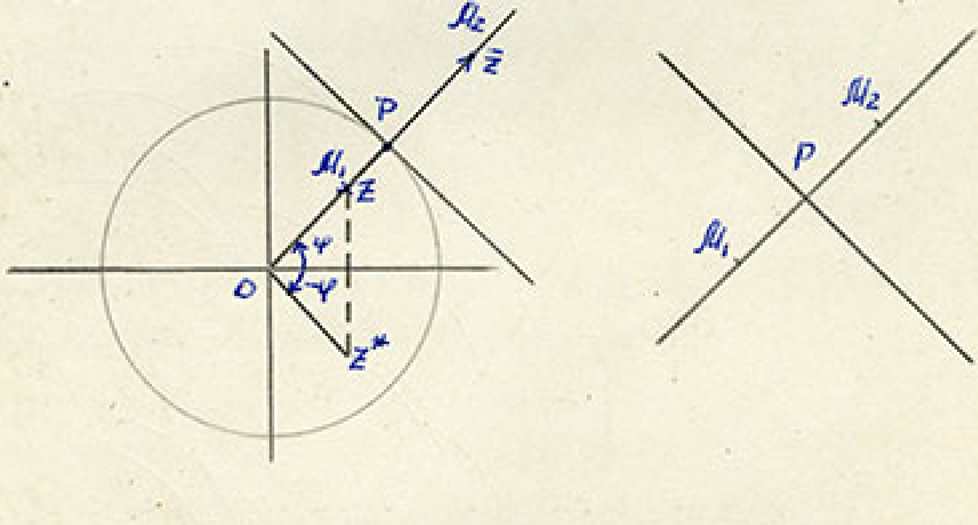



Рис. I. Зеркальное отражение относительно окружности и прямой

~~Что такое зеркальное отражение точки относительно окружности?~~ Точке $M_1$ поставим в соответствие точку $M_2$, лежащую на одном луче с $M_1$ и такую, что имеет место равенство:

$$\left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OM_2}\right| = R^2 \qquad (20)$$

где $R$ - радиус окружности.

Аналогично зеркальному отражению относительно оси, зеркальное отражение относительно окружности обладает свойством взаимности: если точка $M_2$ является образом точки $M_1$ при зеркальном отражении относительно окружности, то обратно точка $M_1$ является образом точки $M_2$. Если точку $M_1$ дважды отразить относительно окружности, то получим снова точку $M_1$.

Если $M_1$ лежит на окружности, то и $M_2$ также лежит на окружности.

Если точку $M_1$ приближать по лучу к началу $O$, то точка $M_2$ движется по этому же лучу, удаляясь в бесконечность.

Заметим, что зеркальное отражение относительно окружности аналогично зеркальному отражению относительно прямой. Действительно, зафиксируем длину отрезка $M_1P$ и будем увеличивать безгранично $R = OP$. Тогда длина отрезка $M_2P$ будет стремиться к длине отрезка $M_1P$ и в пределе мы получим отражение относительно прямой, проходящей через точку $P$ ортогонально прямой $M_1M_2$ (см.рис.I).

Как написать соотношение (20) на языке комплексных чисел?

Обозначим точку $M_1$ через $z$, точку $M_2$ через $\bar{Z}$

Рассмотрим произведение

$$w = z^* \cdot \bar{Z} \qquad (2I)$$

Модуль $w$ равен произведению модулей $z^*$, $\bar{z}$, аргумент $w$ равен сумме аргументов $z^*$ и $\bar{z}$:

$$|w| = |z^*| \cdot |\bar{z}| \tag{22}$$

$$\arg w = \arg z^* + \arg \bar{z} = \arg z^* + \arg z = 0 \tag{23}$$

Равенство (23) означает, что

$$\operatorname{Im} w = 0 \tag{24}$$

Из соотношения (20) имеем:

$$|w| = |z^*| \cdot |\bar{z}| = R^2 \tag{25}$$

Принимая во внимание, что векторы $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ направлены в одну сторону, имеем:

$$w = z^* \cdot \bar{z} = R^2 \tag{26}$$

Так записывается условие симметричного отражения точки $z$ относительно окружности радиуса $R$.

Умножая равенство (26) на $z$, находим:

$$z \cdot z^* \cdot \bar{z} = R^2 \cdot z \tag{27}$$

Принимая во внимание, что $z z^* = |z|^2$, имеем

$$\bar{z} \cdot |z|^2 = R^2 \cdot z \tag{28}$$

Отсюда следует:

$$\bar{z} = \frac{R^2}{|z|^2} \cdot z \tag{29}$$

Формула (29) дает выражение зеркального образа относительно окружности.

Обратно:

$$Z = \frac{R^2}{|\bar{Z}|^2} \cdot \bar{Z} \tag{30}$$

~~6.~~ Зеркальное отражение относительно окружности есть точечное преобразование плоскости. Оно называется преобразованием и н в е р с и и.

п.5 Физическое истолкование преобразования инверсии

Преобразование инверсии обладает ~~рядом~~ интересным свойством.

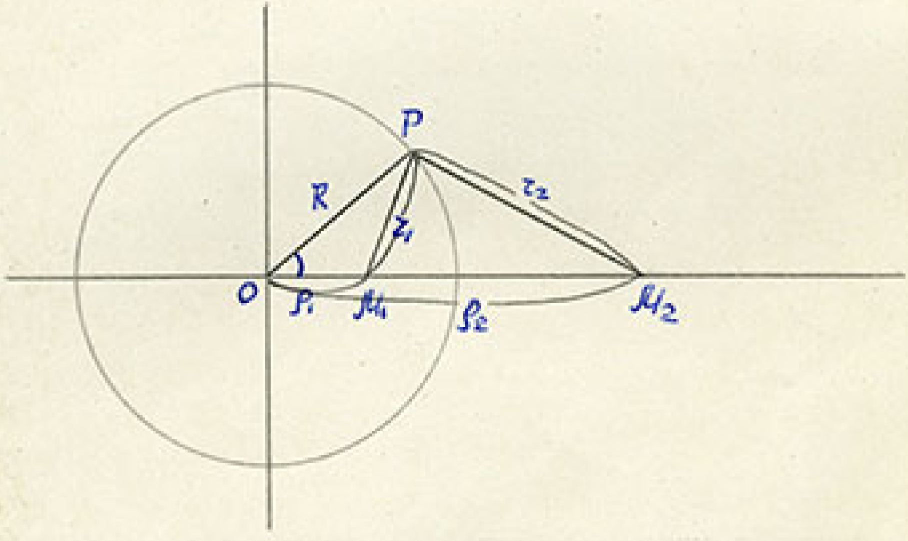



Рис.2. Преобразование инверсии и эквипотенциальные линии

Пусть $P$ - произвольная точка окружности (см.рис.2).

Треугольники $OM_1P$, $OPM_2$ подобны, так как $\angle POM_2$ - общий угол, и $\frac{OM_1}{OP} = \frac{OP}{OM_2}$

Из подобия находим

$$\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{\rho_1}{R} = \frac{R}{\rho_2} = const \tag{31}$$

Для любой точки $P$ отношение ее расстояний до точек $M_1$ и $M_2$ постоянно.

Поместим в точках $M_1$ и $M_2$ соответственно заряды разных знаков $e_1$ и $(-e_2)$.

~~Пусть $e_1$, $(-e_2)$ - заряды разных знаков.~~

Потенциал в точке $P$ от заряда $e_1$ равен $\frac{e_1}{r_1}$, от заряда $(-e_2)$, так $\left(-\frac{e_2}{r_2}\right)$

В силу равенства (31) заряды можно выбрать так, чтобы суммарный потенциал был равен нулю:

$$\frac{e_1}{r_1} - \frac{e_2}{r_2} = 0 , \tag{32}$$

т.е. окружность становится эквипотенциальной линией.

Это свойство преобразования инверсии используется в математической физике при решении задач электростатики.

№8 ? Инверсия [illegible]

## п.6 Геометрическая прогрессия комплексных чисел

~~п.6.~~ Рассмотрим геометрическую прогрессию комплексных чисел. Начнем с унимодулярных чисел.

$$q = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{33}$$

Рассмотрим сумму:

$$\Sigma = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \qquad (34)$$

Мы установили, что множество комплексных чисел образует поле, действие над комплексными числами аналогичны действиям с вещественными числами.

Формула для суммы $n$ членов комплексной геометрической прогрессии будет в точности такой же как и в случае вещественной геометрической прогрессии (см. лекцию № 6):

$$\Sigma = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \qquad (35)$$

Применяя формулу Моавра

$$q^m = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi \qquad (36)$$

$m$ - целое

Находим:

$$\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi - 1}{\cos\varphi + i\sin\varphi - 1} = \frac{-2\sin^2\frac{n+1}{2}\varphi + i\cdot 2\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cdot\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2} + i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{-\sin\frac{n+1}{2}\varphi + i\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{-\sin\frac{\varphi}{2} + i\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\times \qquad (37)$$

$$\times\frac{\cos\frac{n+1}{2}\varphi + i\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{n}{2}\varphi + i\sin\frac{n}{2}\varphi\right)$$

Мы получили представление правой части равенства (35):

$$\mathrm{Re}\,\Sigma = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{n}{2}\varphi, \quad \mathrm{Im}\,\Sigma = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\sin\frac{n}{2}\varphi \qquad (38)$$

Найдем представление левой части (35). Применяя формулу Моавра к каждому слагаемому левой части, получаем:

$$1+\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi+i\sin n\varphi=$$
$$=(1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi)+i(\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi) \qquad (39)$$

Приравнивая действительные и мнимые части чисел, стоящих в левой и правой ~~сторонах~~ частях равенства (35) и пользуясь (38), (39), находим:

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\cos\frac{n}{2}\varphi \qquad (40)$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n}{2}\varphi$$

Итак, пользуясь формулой комплексной геометрической прогрессии, мы получили выражения для вещественных тригонометрических сумм. В дальнейшем аналогичным приемом (который использовался Эйлером, Бернулли и другими математиками I8 века), мы получим выражения для тригонометрических рядов.

Лекция 16.

## П. 1. Геометрическая интерпретация суммы геометрической прогрессии.

Дадим геометрическую интерпретацию суммы $n$ членов комплексной геометрической прогрессии, знаменатель которой является унимодулярным числом:

$$\Sigma = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}, \tag{I}$$

где

$$q = \cos\varphi + i\sin\varphi . \tag{2}$$

Каждому комплексному числу можно поставить в соответствие вектор на плоскости. Тогда сумме $1+q+\ldots+q^{n-1}$ можно поставить в соответствие вектор, равный геометрической сумме векторов, соответствующих числам $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^{n-1}$.

Построение вектора соответствующего сумме $1+q+\ldots+q^{n-1}$ показано на рисунке 1.

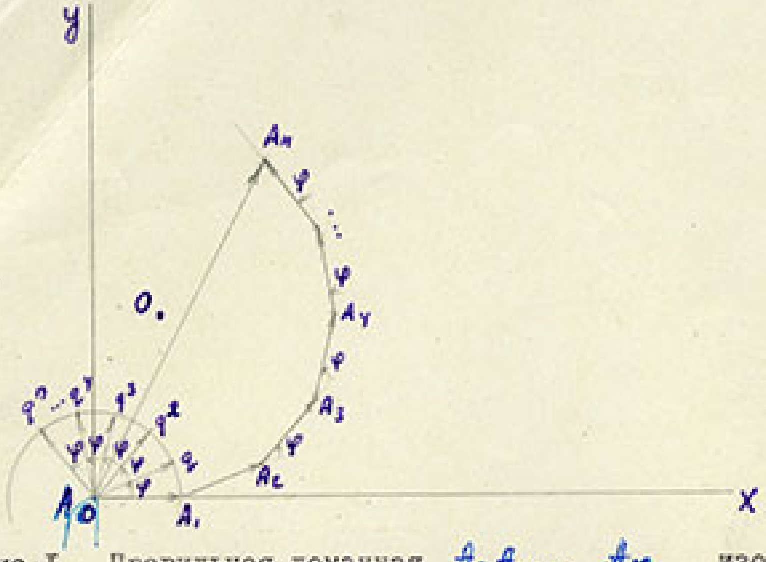



Рис. I. Правильная ломанная $A_0A_1\ldots A_n$ изображает геометрическую унимодулярную прогрессию.

Восстановим в серединах отрезков $A_0A_1$, $A_1A_2$ перпендикуляры. Они пересекутся в точке $O$. Нетрудно показать, что треугольники $OA_0A_1$, $OA_1A_2$, ..., $OA_{n-1}A_n$ равны между собой, т.е. точки $A_0, A_1, \dots, A_n$ лежат на окружности с центром $O$ и радиусом

$$R = OA_0 = OA_1 = \ldots = OA_n. \tag{3}$$

Таким образом, $A_0, A_1, \dots, A_n$ есть равносторонняя равноугольная ломаная, лежащая на окружности. Такую ломаную мы будем называть п р а в и л ь н о й. Увеличивая $n$, мы можем обойти полную окружность (или больше), но при этом не обязательно попадем в точку $A_0$.

Для того, чтобы правильная ломаная $A_0 \ldots A_n$ при некотором $n$ стала замкнутой, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}. \tag{4}$$

Тогда $A_n = A_0$, правильная ломаная становится правильным $n$-угольником.

Можно рассмотреть геометрическую прогрессию более общего вида, знаменатель которой не является унимодулярным числом

$$\Sigma = 1 + rq + r^2q^2 + \ldots + r^{n-1}q^{n-1}, \tag{5}$$

$r$ - вещественное число.

Геометрической прогрессии такого рода можно дать аналогичную интерпретацию.

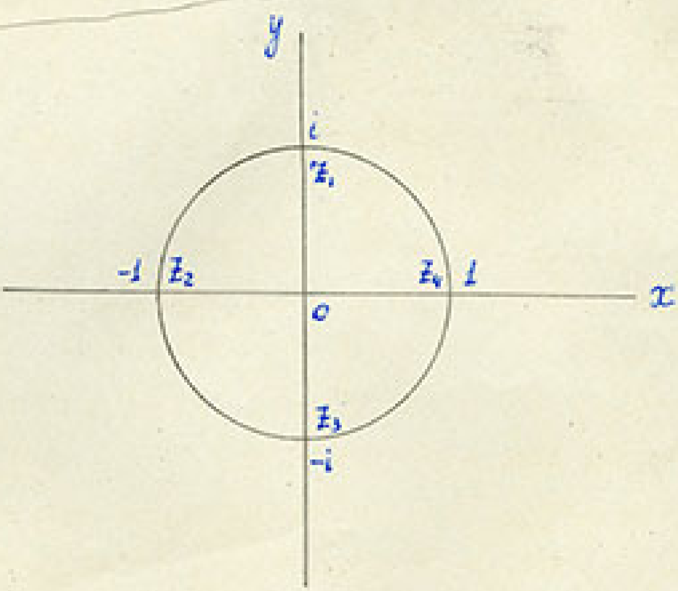
Предлагаем читателю сделать соответствующее построение.

## п.2. Корни из единицы.

Перейдем к вопросу, который тесно связан с комплексными числами, а именно, к решению уравнений вида:

$$z^n = 1. \qquad (6)\ (1)$$

Рассмотрим сначала более простой вопрос о степенях числа $i$. Умножение на $i$ равносильно повороту на угол $\frac{\pi}{2}$. Пользуясь этим получаем следующую таблицу степеней (см. рис. 2):




$$i^2=-1, \quad i^3=-i, \quad i^4=1. \qquad (7)\ (2)$$

Рис.2. Степени мнимой единицы.

Отсюда следует, что $i$ является решением (корнем) уравнения

$$z^4 = 1. \qquad (7)\ (3)$$

Корни уравнения (7)(3) могут быть получены разложением на множители выражения $z^4-1$:

$$z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)=0\,. \qquad (8)(4)$$

После чего находятся корни квадратных уравнений

$$\begin{aligned} &z^2-1=0\,, \quad z_2=-1\,, \quad z_4=+1\,; \\ &z^2+1=0 \quad z_1=i\,, \quad z_3=-i\,. \end{aligned} \qquad (9)(5)$$

Объединение корней этих уравнений дает совокупность корней уравнения (3)(7). Расположение этих корней весьма интересно.

Возьмем корень $z_1=i$.

Все остальные корни получаются при возведении в степень корня $z_1$ Такой корень называется п е р в о о б р а з н ы м . Достаточно найти первообразный корень, чтобы получить все остальные корни. Заметим, что $z_1=i$ - корень с наименьшим аргументом, отличным от нуля. Первообразным является также корень $z_3=-i$ , комплексно сопряженный корню $z_1$ . Возводя в степень корень $z_2=-1$, мы не получим всех корней уравнения. $z_2$, $z_4$ не являются первообразными корнями.

Рассмотрим понятие первообразного корня на примере уравнения 6-й степени:

$$z^6-1=0\,. \qquad (10)(6)$$

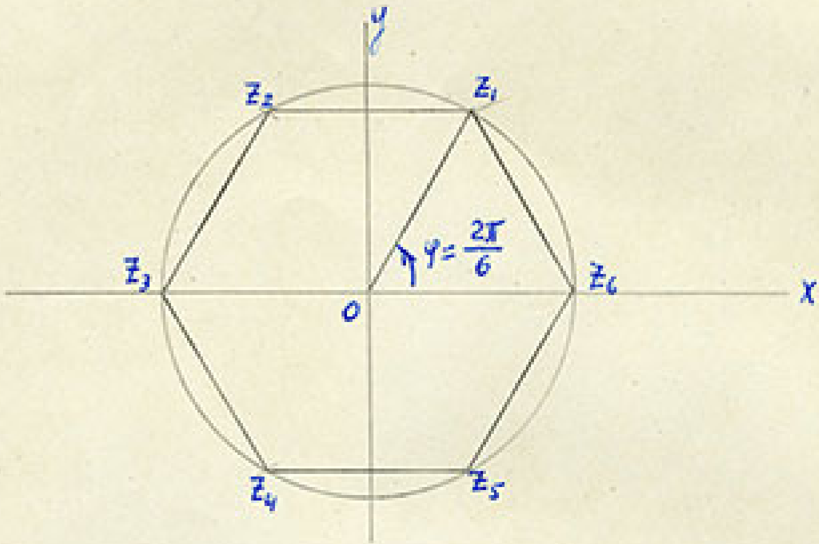



Рис.3. Корни уравнения $z^6 - 1 = 0$.

Покажем, что

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \qquad (11)\,(7)$$

есть корень уравнения (10) (6).

Умножение на $z_1$ равносильно повороту на $\varphi = \frac{2\pi}{6}$. Пользуясь этим получаем следующую таблицу степеней:

$$\left.\begin{aligned}
z_1^2 &= z_2 = \cos 2\frac{2\pi}{6} + i\sin 2\cdot\frac{2\pi}{6}\,, \\
z_1^3 &= z_3 = \cos 3\cdot\frac{2\pi}{6} + i\sin 3\frac{2\pi}{6} = \cos\pi = -1\,, \\
z_1^4 &= z_4 = \cos 4\cdot\frac{2\pi}{6} + i\sin 4\cdot\frac{2\pi}{6}\,, \\
z_1^5 &= z_5 = \cos 5\cdot\frac{2\pi}{6} + i\sin 5\cdot\frac{2\pi}{6}\,, \\
z_1^6 &= z_6 = \cos 6\frac{2\pi}{6} + i\sin 6\cdot\frac{2\pi}{6} = 1\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)\,(8)$$

Мы убедились, что $z_1$ есть корень уравнения (10)(6).

Покажем, что $z_1$ - первообразный корень, т.е., что его степени являются снова корнями уравнения. Очевидные соотношения

$$z_m^6 = (z_1^m)^6 = (z_1^6)^m = 1 \ , \quad m = 2, 3, \ldots, 5 \qquad (13)(9)$$

доказывают утверждения.

Числа $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ являются корнями уравнения (10)(6), больше корней быть не может (см. рис. 3). Это следует из геометрической интерпретации умножения унимодулярных чисел. Получим корни (10)(6) с помощью разложения на множители:

$$z^6 - 1 = (z^3 - 1)\cdot(z^3 + 1) = 0. \qquad (14)(10)$$

Рассмотрим сначала уравнение

$$z^3 - 1 = 0. \qquad (15)(11)$$

Пусть $z_6 = 1$, тогда $z_2, z_4$ удовлетворяют уравнению

$$z^2 + z + 1 = 0. \qquad (16)(12)$$

Корни этого уравнения имеют вид:

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ ,$$
$$z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \ . \qquad (17)(13)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = 0 \ . \qquad (18)(14)$$

Его корни имеют вид:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \,,$$

$$z_3 = -1 \,, \qquad (19) \; (15)$$

$$z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \,.$$

Рассмотрим теперь уравнение (1) (6). Как найти его первообразный корень? Мы полагаем:

$$1 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \,. \qquad (20) \; (16)$$

Тогда

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \qquad (21) \; (17)$$

есть корень, соответствующий минимальному отличному от нуля аргументу, который является первообразным. Действительно, применяя формулу Моавра, имеем:

$$z_1^n = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^n = \cos 2\pi = 1 \,. \qquad (22) \; (18)$$

Положим:

$$z_m = z_1^m \qquad m = 2, \ldots, n \,. \qquad (23) \; (19)$$

Тогда

$$z_m^n = (z_1^m)^n = (z_1^n)^m = 1^m = 1 \,. \qquad (24) \; (20)$$

Таким образом, $z_m$ из (23) (19) являются корнями уравнения (1) (6), ~~Больших корней нет~~ и других корней нет!

п. 3 Двучленные уравнения

Нетрудно теперь указать корни уравнения

$$z^n = a, \qquad (25) \quad (1)$$

где $a$ — любое вещественное число.

~~Рассмотрим сначала случай $a > 0$. Докажем, прежде всего, что существует вещественный положительный корень числа~~

~~$$s = \sqrt[n]{a} \qquad (26)$$~~

~~который мы будем называть арифметическим корнем уравнения (25)~~

~~Пусть $s_1$, $s_2 > s_1$ два положительных числа, которые обладают тем свойством, что~~

~~$$s_1^n < a < s_2^n \qquad (26)$$~~

~~? Такие два числа всегда найдутся.~~

Рассмотрим сначала случай $a > 0$. Докажем, ~~сначала~~ что существует вещественный положительный корень уравнения (25). Мы будем его обозначать символом

$$s = \sqrt[n]{a} \qquad (26) \quad (2)$$

и называть арифметическим значением корня $n$-ой степени из $a$.

Пусть $a_1$, $b_1 > a_1$ — два вещественных положительных числа, которые обладают тем свойством, что

$$a_1^n < a < b_1^n. \qquad (27) \quad (3)$$

Такие числа всегда найдутся.

Построим теперь последовательность вложенных отрезков $[a_i, b_i]$, концы которых представляют собой приближенные (с недостатком и избытком) значения корня n-ой степени из $a$.

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам; ~~Если~~ ~~Половины~~ ~~$a_1$~~ обозначим $\frac{a_1+b_1}{2}$ через $c$. Если ~~$c=\frac{a_1+b_1}{2}$ если~~ $c^n = a$, то задача решена, $c$ есть арифметический корень (25) (1) и мы положим $a_i = b_i = c$ $(i=2,3,\dots)$. Если $c^n \neq a$, то полагаем

$$a_2 = c,\quad b_2 = b_1 \quad \text{в случае} \quad c^n < a, \qquad (\cancel{28})\ (4)$$

$$a_2 = a_1,\quad b_2 = c \quad \text{в случае} \quad c^n > a. \qquad (\cancel{29})\ (5)$$

Мы получили половинный отрезок $[a_2, b_2]$, содержащий искомый корень. Поступая аналогично с $[a_2, b_2]$ получим последовательность ~~вложенных~~ Кантора. Она обладает свойством

$$a_i^n \le a,\quad b_i^n \ge a \qquad (\cancel{30})\ (6)$$

и определяет число $\varrho > 0$ такое, что

$$a_i^n \le \varrho^n \le b_i^n. \qquad (\cancel{31})\ (7)$$

Из неравенств (~~30~~), (~~31~~) (6), (7) следует, что

$$\varrho^n = a. \qquad (\cancel{32})\ (8)$$

Утверждение доказано.

После этого можно определить все корни уравнения (~~25~~) (1) по формуле:

$$z_m = \varrho \cdot q^m,\quad m = 0, 1, \dots, n-1; \qquad (\cancel{33})\ (9)$$

где

$$q = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n} \qquad (\cancel{34})\ (10)$$

есть первообразный корень из 1.

Если $a < 0$, решение (~~25~~) (1) дается формулой

$$z_m = \varrho \cdot q_0 \cdot q^m,\quad m = 0, 1, \dots, n-1; \qquad (\cancel{35})\ (11)$$

где

$$\rho = \sqrt[n]{-a}\,, \qquad (36)\ (12)$$

$$q_0 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\,, \qquad (37)\ (13)$$

$q$ берётся из (34) (10).

Нетрудно видеть, что $q_0$ есть корень $n$-ой степени из $-1$, $\rho q_0$ — корень $n$-ой степени из $a$.

~~Наконец, если $a$~~

Наконец, если $a$ — произвольное комплексное число, которое можно представить в виде

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,\quad r>0\,, \qquad (38)\ (14)$$

то уравнение (1) (25) имеет корни

$$z_m = \rho\cdot q_0\cdot q^m\,,\quad m = 0,1,\dots,n-1; \qquad (39)\ (15)$$

где

$$\rho = \sqrt[n]{r} > 0\,, \qquad (40)\ (16)$$

$$q_0 = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\,, \qquad (41)\ (17)$$

$q$ определяется из (34) (10).

~~Нетрудно~~ Ясно, что $q_0$ есть корень $n$-ой степени из $\cos\varphi + i\sin\varphi$, $\rho q_0$ — корень $n$-ой степени из $a$. Полученные формулы решения (1) (25) показывают, что корни (1) (25) ~~получаются~~ могут быть получены умножением какого-либо корня (1) (25) на степени первообразного корня из 1.

~~т.е., что справедливо представление~~ (26).

Наконец, если $a$ - произвольное комплексное число, которое можно представить в виде:

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r > 0 \tag{38}$$

то уравнение (25) имеет корни

$$z_m = \rho \cdot q_0 q^m \quad m = \tag{39}$$

где $\rho$ - положительное число:

$$\rho = \sqrt[n]{r} \tag{35}$$

$q$ - унимодулярное число:

$$q = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n} \tag{36}$$

## п.4. Разрешимость уравнений n-ой степени.

~~п.7.~~ Введение комплексных чисел стало явной необходимостью на некотором этапе развития математики. Оно позволило связать воедино многие ~~некоторые~~ факты алгебры и геометрии, которые до этого носили случайный и изолированный характер.

Введение комплексных чисел позволило Гауссу сформулировать теорему: Любое уравнение $n$ -ой степени

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

~~(37)~~

где $a_k$ - вещественные числа,

имеет $n$ корней.

Например, квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ в поле вещественных чисел может не иметь корней. В поле комплексных чисел оно обязательно имеет два корня.

Мы умеем находить корни уравнений вида: $z^n=1$ или $z^n=a$. Уравнения эти простые, корни их допускают простую геометрическую интерпретацию.

Перед математиками издавна стоял вопрос, можно ли решение уравнений более общего вида сводить к последовательному решению уравнений более простого вида, решения которого мы умеем находить.

Если решение более сложных уравнений сводится к последовательному решению дву~~черных~~членных уравнений, то говорят что уравнение разрешимо в р а д и к а л а х . Известно, что уравнения 3-й и 4-й степени всегда разрешимы в радикалах. Абель доказал, что уравнение 5-й степени в общем случае не разрешимо в радикалах.

Галуа доказал, что уравнение степени $n>4$, за исключением некоторых частных случаев, не решается в радикалах. Особый интерес представляет случай, когда решение уравнения сводится к последовательному решению квадратных уравнений, т.е. разрешимо в квадратичных радикалах.

Известно, что построения с помощью циркуля и линейки могут быть сведены к последовательному решению квадратных уравнений, и наоборот, решение квадратного уравнения можно осуществить с помощью циркуля и линейки.

Гауссу удалось доказать, что построение с помощью циркуля и линейки при решении уравнений вида $z^p=1$ ($p$ – простое) возможно, когда $p$ представимо в виде

$$p=1+2^n. \tag{38}$$

В частности, это возможно при $p=3,\ 5,\ 17$.
Соответствующие правильные $p$-угольники можно построить с помощью циркуля и линейки.

п.5. Решим задачу: построить пятиугольник с помощью циркуля и линейки.

Вначале построим десятиугольник, затем, соединяя ~~точки~~ его вершины [illegible] через одну, построим пятиугольник

Улучшить чертеж

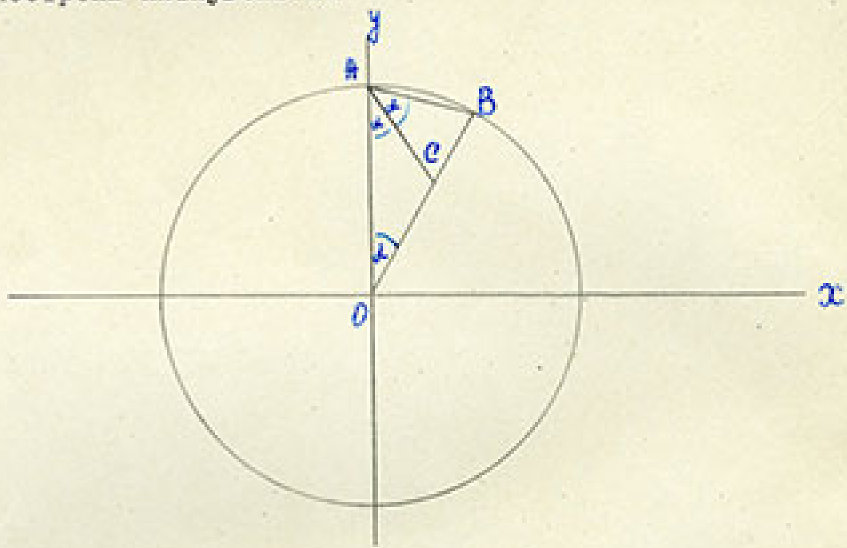



Рис.4. Построение правильного IO-угольника. $OC = AC = AB$,
$\angle AOC = \angle OAC = \angle CAB = \alpha = \frac{\pi}{5}$.

Пусть $A$ и $B$ - соседние точки правильного десятиугольника, $AC$ - биссектриса угла $BAO$ (см. рис. 4).
$\Delta AOB$ - равнобедренный, при этом $\angle AOB = \alpha$, $\angle BAO = \angle ABO = 2\alpha$. Отсюда следует

$$\alpha = \frac{\pi}{5}. \tag{39}$$

Очевидны соотношения

$$OC = AC = AB. \tag{40}$$

Так как биссектриса угла делит противолежащую сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то имеем:

$$\frac{OC}{CB} = \frac{OA}{AB} = \frac{OB}{OC}\,. \qquad (41)\ (3)$$

Мы пришли к задаче: дан отрезок $OB$, найти такую точку $C$, что имеет место пропорция :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{CB}\,. \qquad (42)\ (4)$$

В этом случае говорят, что точка делит отрезок $OB$ в среднем и крайнем отношении.

Из пропорции (4) (42) имеем:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OB+OC}{OC+CB}\,, \qquad (43)\ (5)$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OB+OC}{OB}\,.$$

Обозначая $OB = R$, $OC = \ell_1$ $OB + OC = \ell_2$ ,

имеем:

$$\ell_1 \cdot \ell_2 = R^2, \qquad (44)\ (6)$$
$$\ell_2 - \ell_1 = R.$$

Мы пришли к известной задаче построения отрезков по их разности и произведению. Положим:

$$-\ell_1 = x_1\ , \quad \ell_2 = x_2 \qquad (45)\ (7)$$

Тогда из (6) (44) имеем:

$$x_1 + x_2 = R\,, \qquad x_1 x_2 = -R^2\,. \qquad (46)\ (8)$$

По теореме Виета $x_1$, $x_2$ являются корнями уравнения:

$$x^2 - Rx - R^2 = 0 \qquad (47) \ (9)$$

и представляются выражениями

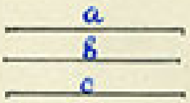
$$x_{1,2} = \frac{R}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} R. \qquad (48) \ (10)$$

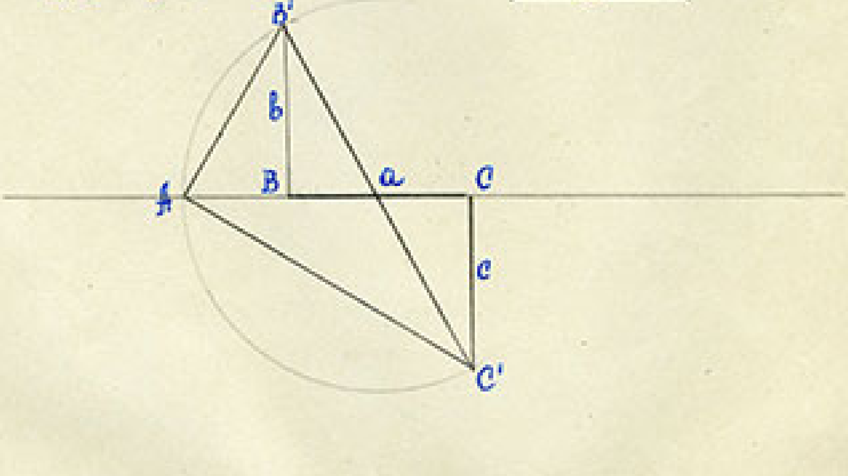
Отсюда

$$l_1 = OC = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1), \qquad l_2 = OC + CB = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1). \qquad (49) \ (11)$$

Покажем, как построить отрезки AB, AC, если заданы их разность и произведение:

$$AC - AB = a,$$
$$AC \cdot AB = b \cdot c.$$




Улучшить рисунок
Сделать разными
a, b, c

Рис.5. Построение отрезков по их разности и произведению.

Отрезок $BC$ равен заданному отрезку $a$ . Из точек $B$ и $C$ восстановим в $BC$ по разные стороны перпендикуляры $BB'$ , $CC'$ длинами соответственно $b$ и $c$ . На отрезке $B'C'$ как на диаметре построим окружность, которая пересечет продолжение отрезка $BC$ в точке $A$.

Тогда отрезки $AB$, $AC$ - искомые. Докажем это.

Прямоугольные треугольники $ABB'$ $ACC'$ подобны, так как справедливы соотношения:

$$\angle AB'B = \angle CAC', \quad \angle B'AB = \angle AC'C,$$
$$\angle ABB' = \angle ACC' = \frac{\pi}{2}.$$
(50) (12)

Из подобия следует:

$$\frac{AB}{BB'} = \frac{CC'}{AC}.$$
(51) (13)

Отсюда

$$AB \cdot AC = BB' \cdot CC' = b \cdot c.$$
(52) (14)

Так как

$$AC - AB = a,$$
(53) (15)

то построение выполнено. Заметим, что оно всегда возможно, при любых $a, b, c$.

Лекция 17.

## Анализ в поле комплексных чисел.

### п.1. Расстояние в поле комплексных чисел.

Мы переходим к изучению анализа в поле комплексных чисел. Анализ в поле комплексных чисел (комплексный анализ) будет включать в себя как частный случай анализ в поле вещественных чисел (вещественный анализ). Многие факты вещественного анализа очень просто могут быть установлены в комплексном анализе.

Раньше мы ввели понятие предела последовательности вещественных чисел. Это понятие непосредственно обобщается на последовательности комплексных чисел.

Сходимость последовательности элементов $x_n$ к элементу $x$ означает неограниченное сближение $x_n$ и $x$, неограниченное уменьшение расстояния между этими элементами при неограниченном увеличении номера $n$.

Напомним, что расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между двумя комплексными числами:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \tag{1}$$

определяется как модуль разности этих чисел.

$$\rho(z_1, z_2) = |z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

Число $\rho(z_1, z_2)$ удовлетворяет следующим условиям:

I) Свойство симметрии:

$$\rho(z_1, z_2) = \rho(z_2, z_1). \qquad (3)$$

2) Свойство неотрицательности расстояния:

$$\begin{aligned} &\rho(z_1, z_2) > 0 \quad \text{если } z_1 \neq z_2, \\ &\rho(z_1, z_2) = 0 \quad \text{если } z_1 = z_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

3) Неравенство треугольника:

$$\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) \geq \rho(z_3, z_1). \qquad (5)$$

Последнее соотношение выражает тот факт геометрии, что сумма длин двух любых сторон треугольника не меньше длины третьей стороны.

Из неравенства треугольника следует, что для произвольных $n$ чисел $z_1, \ldots, z_n$ имеем:

$$\rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3) + \ldots + \rho(z_{n-1}, z_n) \geq \rho(z_1, z_n). \qquad (6)$$

Неравенство (6) выражает, что длина ломаной, проходящей через точки $z_1, \ldots, z_n$ не меньше длины отрезка $z_1 z_n$, соединяющего начальную и конечную точки ломаной.

Неравенство (6) мы можем записать также в виде:

$$|z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \cdots + |z_n - z_{n-1}| \geq |z_n - z_1|. \qquad (7)$$

Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ — $n$ произвольных векторов. Тогда справедливо неравенство

$$|\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \cdots + \bar{a}_n| \leq |\bar{a}_1| + |\bar{a}_2| + \cdots + |\bar{a}_n|, \qquad (8)$$

которое эквивалентно неравенствам (6), (7) и также является одной из формулировок неравенства треугольника.

## п.2. Неравенство треугольника и неравенство Коши-Буняковского.

Мы стоим на той точке зрения, что первичным является понятие числа, поэтому неравенство треугольника мы должны доказать арифметически.

Мы покажем, что неравенство треугольника следует из неравенства Коши-Буняковского.

Сформулируем неравенство Коши-Буняковского и покажем его аналитический и геометрический смысл.

Пусть $\bar{a}(x_1, y_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2)$ - два вектора.

Неравенство Коши-Буняковского запишется в виде:

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})^2 \leq \bar{a}^2\cdot\bar{b}^2. \qquad (1)$$

Докажем его аналитически, а затем выясним его геометрический смысл.

По определению скалярного произведения:

$$\begin{aligned} \bar{a}\cdot\bar{b} &= x_1x_2 + y_1y_2, \\ \bar{a}^2 &= x_1^2 + y_1^2, \qquad (2) \\ \bar{b}^2 &= x_2^2 + y_2^2. \end{aligned}$$

Докажем справедливость неравенства:

$$(x_1\cdot x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \qquad (3)$$

эквивалентного неравенству (I) в силу (2).

Составим выражения:

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2=x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2, \tag{4}$$

$$(x_1y_2-x_2y_1)^2=x_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2. \tag{5}$$

Складывая (4) и (5), получим:

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=x_1^2(x_2^2+y_2^2)+ \\ +y_1^2(x_2^2+y_2^2)=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует справедливость неравенства (3).

Знак равенства в соотношении (3) имеет место тогда, и только тогда, когда $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\mu$ , т.е. когда вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны.

Можно уточнить неравенство Коши-Буняковского следующим образом:

$(\bar{a}\cdot\bar{b})^2<\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2$ если $\bar{a}$, $\bar{b}$ не коллинеарны, (7а)

$(\bar{a}\cdot\bar{b})^2=\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2$ если $\bar{a}$, $\bar{b}$ коллинеарны . (7б)

Нетрудно установить геометрический смысл неравенства Коши-Буняковского.

Скалярное произведение векторов можно определить как произведение длин векторов на косинус угла между ними

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\ell_1\ell_2\cos\varphi, \tag{8}$$

где

$$\ell_1=|\bar{a}|,\quad \ell_2=|\bar{b}|,\quad \varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}}). \tag{9}$$

Тогда неравенство Коши-Буняковского означает, что

$$\cos^2\varphi \le 1. \tag{I0}$$

Рассмотрим треугольник со сторонами задаваемыми векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (см. рис. I):

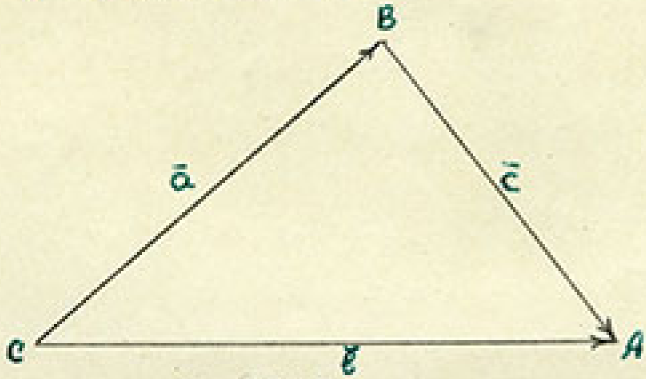



Рис. I Теорема косинусов для треугольника ABC.

Из рис. I следует:

$$\bar{c} = \bar{b} - \bar{a}. \tag{II}$$

Возведем обе части равенства (II) в квадрат

$$\bar{c}^2 = (\bar{b}-\bar{a})^2 = \bar{b}^2 - 2\bar{b}\cdot\bar{a} + \bar{a}^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\varphi. \tag{I2}$$

Равенство (I2) выражает теорему косинусов для треугольника ABC. Согласно неравенству Коши-Буняковского (I ) справедливо неравенство

$$\bar{a}\cdot\bar{b} \le \sqrt{\bar{a}^2}\cdot\sqrt{\bar{b}^2}. \tag{I3}$$

Из (I3) находим:

$$-2\bar{b}\cdot\bar{a} \leq 2\sqrt{\bar{a}^2}\cdot\sqrt{\bar{b}^2}. \qquad (I4)$$

Равенство (I2) с учетом неравенства (I4) дает:

$$\bar{c}^2 \leq \bar{a}^2+\bar{b}^2+2\sqrt{\bar{a}^2}\cdot\sqrt{\bar{b}^2} = \left(\sqrt{\bar{a}^2}+\sqrt{\bar{b}^2}\right)^2. \qquad (I5)$$

Из (I5) следует

$$|\bar{c}| \leq |\bar{a}|+|\bar{b}| . \qquad (I6)$$

Итак, неравенство треугольника доказано.

Мы установили, что неравенство треугольника есть следствие неравенства Коши-Буняковского.

## п. 3. Окрестность точки.

Под окрестностью точки $z_0$, вообще говоря, понимается множество точек достаточно близких к точке $z_0$. Уточним это понятие.

Пусть дана точка $z_0 = x_0 + iy_0$. Окрестностью точки $z_0$ называем множество точек, удовлетворяющих условию

$$|z - z_0| < \varepsilon, \qquad (I)$$

где $\varepsilon$ есть произвольное положительное число, которое может быть сколь угодно мало.

Неравенство $|z - z_0| < \varepsilon$ через координаты точек представляется в виде:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon \qquad (2)$$

Все точки, удовлетворяющие этому неравенству, лежат внутри круга радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $(x_0, y_0)$.

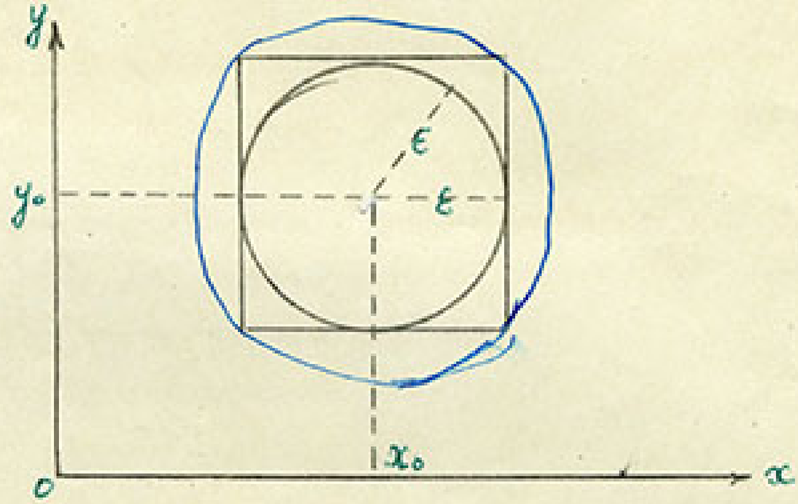



Рис. 2 . $\varepsilon$ - окрестность точки $z_0 = x_0 + iy_0$ .

Можно дать другое определение открестности точки $z_0$ .

Окрестностью точки $z_0$ называем множество точек плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$|x - x_0| < \varepsilon, \qquad (\ )$$

$$|y - y_0| < \varepsilon, \qquad (3)$$

где $\varepsilon$ - сколь угодно малое положительное число.

Неравенства (3) можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \\
&y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Множество точек, удовлетворяющих неравенствам (4) лежат внутри квадрата с центром в точке ($x_0, y_0$) и стороной, равной $2\varepsilon$ Итак, окрестность определяется точкой $z_0$ и параметром $\varepsilon$.

Рассмотренные окрестности мы будем называть $\varepsilon$ - окрестностями точки $z_0$ (см. рис. 2).

Окрестность точки $z_0$ мы могли бы определить и как множество точек, лежащих внутри эллипсоида, прямоугольника и т.п. с центром в точке $z_0$.

Окрестность-круг (I) будем обозначать $S_\varepsilon|z_0|$, $\cancel{|z_0|}$ окрестность-квадрат (3) - $R_\varepsilon|z_0|$.

В дальнейшем будем обозначать:

$z \in S_\varepsilon(z_0)$ если $z$ удовлетворяет (I),

$z \in R_\varepsilon(z_0)$ если $z$ удовлетворяет (3).

В вещественном анализе окрестность $S_\varepsilon = R_\varepsilon$ точки $x = x_0$ определяется соотношением

$x \in S_\varepsilon(x_0)$ если $|x - x_0| < \varepsilon$

или

$x \in S_\varepsilon(x_0)$ если $x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$.

## п. 4. Последовательности комплексных чисел.

Совокупность точек, или комплексных чисел $\{z_n\}$ называется последовательностью, если определен закон, согласно которому каждому натуральному числу $n$ ставится в соответствие определенное комплексное число $z_n$ совокупности $\{z_n\}$.

Последовательность называется ограниченной, если она целиком заключена в некотором круге

$$|z_n - a| < R. \qquad (I)$$

Можно дать другое определение ограниченной последовательности.

Каждому $z_n = x_n + iy_n$ соответствует пара вещественных чисел $x_n$ и $y_n$. Нетрудно показать, что для того, чтобы $\{z_n\}$ была ограниченной необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ были ограничены.

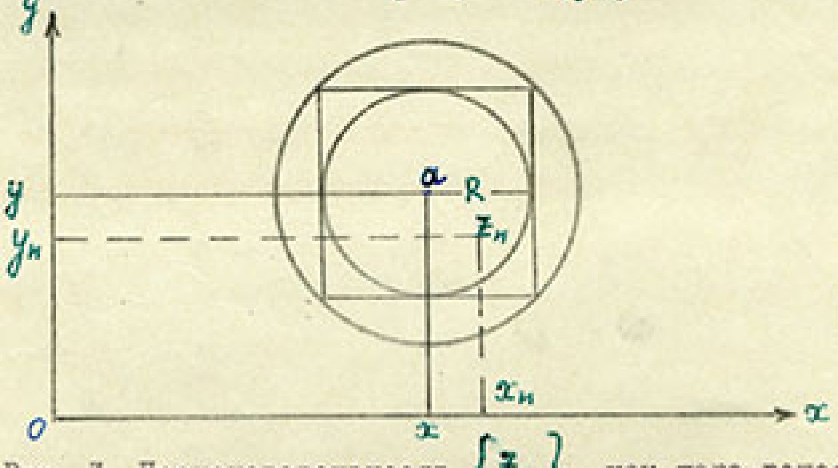



Рис. 3. Последовательность $\{z_n\}$ как пара вещественных последовательностей.

Так как последовательность $\{z_n\}$ ограничена, найдется такое $R$, что все точки последовательности лежат внутри круга радиуса $R$ с центром в некоторой точке $a = x + iy$ (см.рис.3).

Опишем около круга квадрат, тогда видно, что для проекций точек на оси координат выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
&x - R < x_n < x + R,\\
&y - R < y_n < y + R.
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Эти неравенства означают, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены. Обратно, если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены, то найдется такое $R$, что

$$
\begin{aligned}
&x - R < x_n < x + R,\\
&y - R < y_n < y + R.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Можно описать окружность около квадрата. Точки лежащие внутри круга, удовлетворяют неравенству $|z_n - a| < R\sqrt{2}$, что означает, что последовательность $\{z_n\}$ - ограничена.

Введем понятие точки сгущения.

Точка $w$ называется точкой сгущения последовательности $\{z_n\}$, если в произвольной $\varepsilon$ - окрестности точки $w$ имеется сколь угодно много точек последовательности $\{z_n\}$. Иными словами:

Для любого $\varepsilon$ сколь угодно малого, и для любого $N$ сколь угодно большого имеются точки $z_n$, $n \geq N$, принадлежащие окрестности точки $w$.

Зависит ли этот факт от выбора вида $\varepsilon$ - окрестности?

Пусть $w$ есть точка сгущения $\{z_n\}$. Построим $S_\varepsilon(w)$ и опишем квадрат $R_\varepsilon(w)$, внутри которого лежит $S_\varepsilon(w)$.

Мы будем обозначать

$$S_\varepsilon(w) \subset R_\varepsilon(w), \quad R_\varepsilon(w) \supset S_\varepsilon(w). \tag{4}$$

Ясно, что для любого $\varepsilon$ $R_\varepsilon(w) \supset S_\varepsilon(w)$ содержит бесконечно много точек $\{z_n\}$, т.е. $w$ есть точка сгущения $\{z_n\}$ относительно $R_\varepsilon$ окрестностей.

Наоборот, если $w$ есть точка сгущения $\{z_n\}$ по отношению $\{R_\varepsilon\}$, то описав около квадрата $R_\varepsilon$ круг $S_\rho(w)$, $\rho = a\sqrt{2}\varepsilon$ видим, что $S_\rho(w) \supset R_\varepsilon(w)$ и так как $\rho$ сколь угодно мало (вместе с $\varepsilon$), $w$ есть точка сгущения $\{z_n\}$ относительно $\{S_\rho\}$.

Мы видим, что свойство быть точкой сгущения не зависит от выбора вида $\varepsilon$ - окрестности, или иными словами, является инвариантным по отношению к выбору вида $\varepsilon$ - окрестности.

Если $w = x + iy$ является точкой сгущения последовательности $\{z_n\}$, то $x$ и $y$ являются точками сгущения последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Действительно, возьмем систему окрестностей $\{R_\varepsilon\}$. По определению, $w = x + iy$ есть точка сгущения $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ если в любой $R_\varepsilon$ содержится бесконечно много точек последовательности $\{z_n\}$. В силу (3.4) это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, найдутся $n \geqslant N$, такие что

$$\begin{aligned} &x_n \in (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon), \\ &y_n \in (y-\varepsilon,\ y+\varepsilon). \end{aligned} \tag{5}$$

Следовательно $x$ и $y$ являются точками сгущения последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Обратное утверждение несправедливо, как доказывает~~ся~~ следующий пример [ж)].

Рассмотрим последовательность точек $z_i = (x_i, y_i),\ i = 1, \dots, n \dots,$ заданную следующим образом (см. рис. 4):

$$x_i = \begin{cases} 1, & i = 2k+1, \quad k = 0, 1 \dots, \\ 2, & i = 2k, \quad k = 1, 2 \dots, \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & i = 2k+1, \quad k = 0, 1 \dots, \\ 2, & i = 2k, \quad k = 1, 2 \dots, \end{cases} \qquad (6)$$

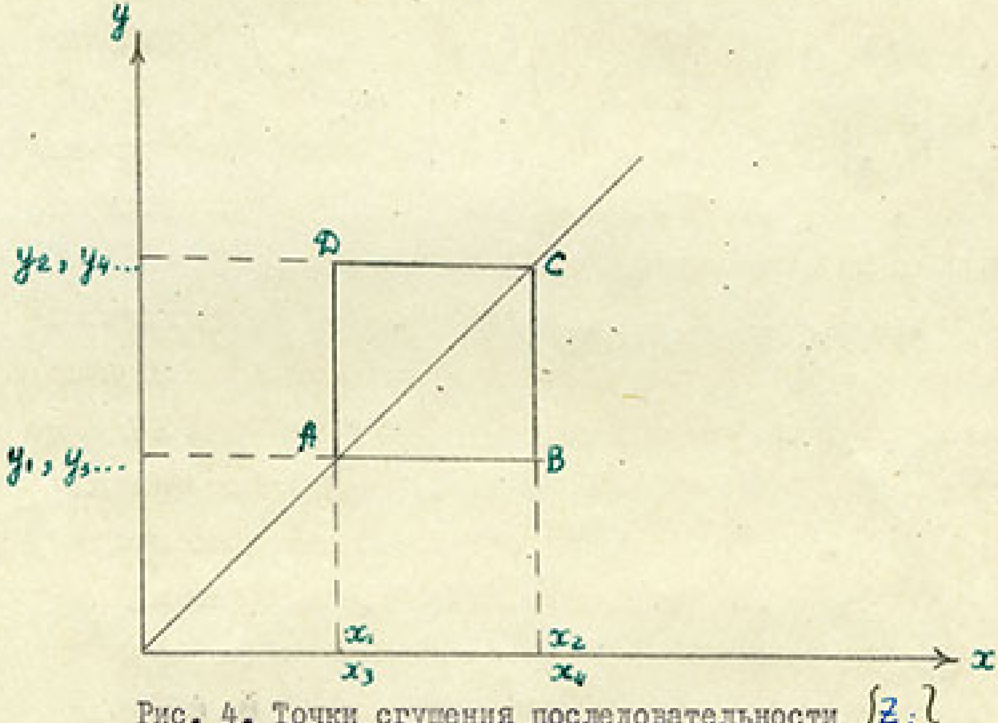



Рис. 4. Точки сгущения последовательности $\{z_i\}$ и ее проекции на оси $x$ и $y$.

Точки A, C являются точками сгущения $\{z_i\}$. Точки B, Д не являются точками сгущения $\{z_i\}$, тем не менее проекции B, Д

ж) Указан профессором П.П.Белинским.

на оси $x$ , $y$ являются точками сгущения последовательностей $\{x_i\}$ соответственно $\{y_i\}$ .

Справедлива теорема: Всякая ограниченная последовательность $\{z_i\}$ имеет точку сгущения.

с разрядкой, но с маленькими буквами

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $D = D_0$ есть квадрат, заключающий последовательность $\{z_i\}$ (см. рис. 5) .

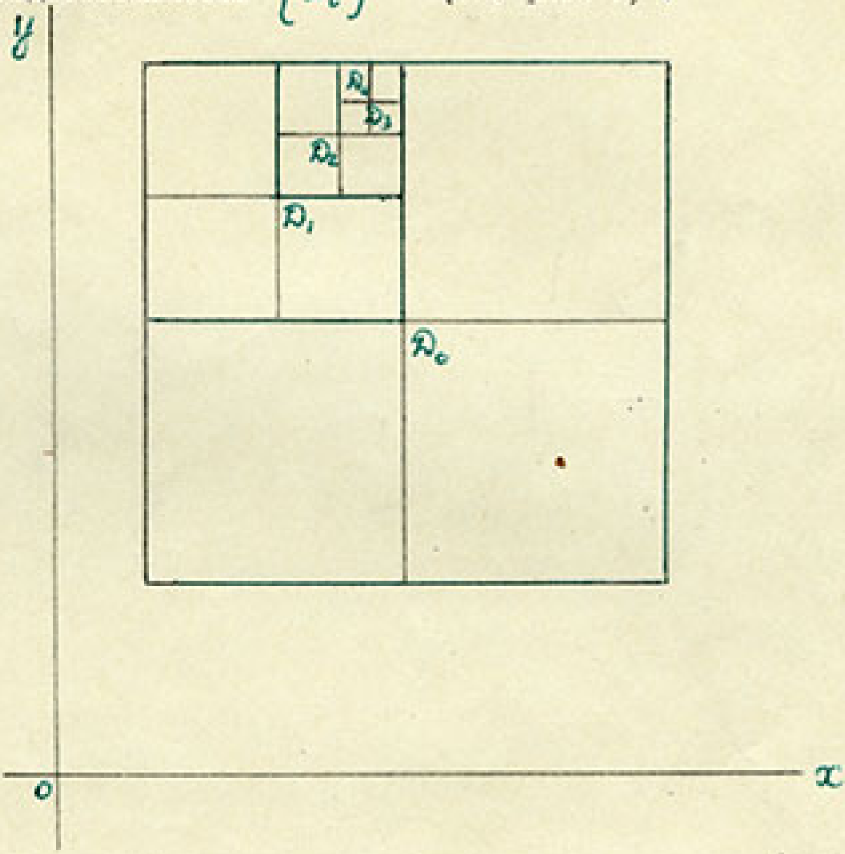



Рис. 5. Последовательность вложенных квадратов

Разделим квадрат $D_0$ на 4 равных квадрата и обозначим через $D_1$ тот из них, который содержит бесконечно много точек последовательности $\{z_i\}$ . Разобьем $D_1$ таким образом на 4 равных квадрата и выберем аналогично квадрат $D_2$ .
Продолжая аналогично дальше получим последовательность вложенных квадратов

$$\mathcal{D}_0 \supset \mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \supset \ldots \qquad (7)$$

стороны которых стремятся по длине к нулю.

Последовательности квадратов $\mathcal{D}_i$ отвечает две последовательности вложенных отрезков

$\{x_i^1, x_i^2\}$; $\{y_i^1, y_i^2\}$ - проекции квадратов $\mathcal{D}_i$ на оси $x, y$.

Первая последовательность определяет на оси $x$ точку $a$ вторая на оси $y$ - точку $b$.

Точка $z = a + ib$ есть точка сгущения последовательности $\{z_i\}$. Действительно, любая $\varepsilon$ - окрестность точки $z$ содержит все квадраты последовательности квадратов $\mathcal{D}_i$ за исключением может быть конечного числа, т.е. содержит бесконечно много точек последовательности $\{z_i\}$. Теорема доказана.

Введем понятие сходящейся последовательности.

Последовательность будем называть сходящейся, если она имеет единственную точку сгущения. Единственную точку сгущения назовем предельной точкой последовательности. В любой сколь угодно малой $\varepsilon$ окрестности предельной точки содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера $N$.

Подчеркнем еще раз различие между точкой сгущения и предельной точкой.

Если имеем точку сгущения, то любой ее окрестности сколь угодно много точек последовательности, но это не означает что вне окрестности конечное число точек.

Если имеем предельную точку, то вне любой $\varepsilon$ - окрестности ее содержится конечное число членов последовательности.

Справедливо утверждение:

**Для того, чтобы точка** $z = x + iy$ была предельной точкой последовательности $\{z_k\}$:

$$z_k = x_k + iy_k \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы $x$, $y$ были точками сгущения последовательности $\{x_k\}$, соответственно $\{y_k\}$.

Введем понятие фундаментальной последовательности.

Назовем последовательность $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что

$$\rho(z_n, z_m) < \varepsilon, \tag{9}$$

если $n, m > N(\varepsilon)$.

Иными словами, с увеличением номера члена последовательности точки, последовательности сближаются сколь угодно близко.

В данном определении используется, по существу, система окрестностей $\{S_\varepsilon\}$.

Мы могли бы дать определение фундаментальной последовательности с помощью системы $\{R_\varepsilon\}$. Последовательность называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} &|x_n - x_m| < \varepsilon, \\ &|y_n - y_m| < \varepsilon, \end{aligned} \tag{10}$$

если $n, m > N(\varepsilon)$

Эти определения эквивалентны. Из последнего определения следует:

Чтобы последовательность $\{z_n\}$ была фундаментальной необходимо и достаточно чтобы были фундаментальными последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема. Всякая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Действительно, пусть $\{z_n\}$ - фундаментальная последовательность. Отсюда следует, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ также фундаментальные.

Вещественные фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися. Пусть $x$ - предельная точка $\{x_n\}$, а $y$ - предельная точка последовательности $\{y_n\}$. Числа $x$ и $y$ определяют точку $z = x + iy$, которая является предельной для $\{z_n\}$, ч.т.д.

## п. 5. Бесконечная геометрическая прогрессия.

Введенные понятия являются весьма общими и эффективными и сразу позволяют получить ряд приложений.

Вычислим сумму бесконечной геометрической прогрессии.

Рассмотрим геометрическую прогрессию из $n+1$ члена:

$$S_{n+1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n , \tag{I}$$

где

$$q = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) . \tag{2}$$

Заставляя $n$ пробегать числа натурального ряда мы получаем последовательность конечных сумм $S_n$. Спрашивается, сходится ли эта последовательность?

Мы покажем, что $\{S_n\}$ сходится, если

$$r = |q| < 1 . \tag{3}$$

Покажем, что последовательность $\{S_n\}$ является фундаментальной последовательностью. Пусть $S_n$, $S_m$ - две суммы:

$$S_n = 1 + q + \ldots + q^{n-1}; \quad S_m = 1 + q + \ldots + q^{m-1} .$$

Для определенности положим, что $m > n$. Тогда

$$S_m - S_n = q^n + \ldots + q^{m-1} = q^n(1 + q + \ldots + q^{m-n-1}) = q^n \frac{1-q^{m-n}}{1-q} , \tag{4}$$

$$\rho(S_m, S_n) = |S_m - S_n| = \left| \frac{1-q^{m-n}}{1-q} \right| r^n . \tag{5}$$

Зададимся $\varepsilon > 0$ и покажем, что при достаточно больших $n$ и $m$

$$|S_m - S_n| < \varepsilon . \tag{6}$$

Учитывая (3), видим, что $r^n = |q^n|$ при достаточно большом $n$ может быть сделано сколь угодно малым:

$$r^n \leq \delta, \tag{7}$$

как только

$$n \geq N = N(\delta). \tag{8}$$

Пользуясь неравенством треугольника, имеем:

$$|1 - q^{m-n}| \leq 2, \tag{9}$$

$$\frac{1}{|1-q|} \leq \frac{1}{A} = \frac{1}{1-r}. \tag{I0}$$

Отсюда

$$|S_m - S_n| \leq \frac{2r^n}{A} \tag{I1}$$

Для выбранного $\varepsilon$ положим $\delta = \frac{A\varepsilon}{2}$.

(I2)

Отсюда следует, что

$$r^n \leq \frac{A}{2}\varepsilon, \quad |S_m - S_n| < \varepsilon, \tag{I3}$$

как только

$$n \geq N, \quad m \geq N. \tag{I4}$$

Это означает, что последовательность $\{S_n\}$ является фундаментальной, следовательно, она сходится и имеет предел. По определению, этот предел мы назовем суммой бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \tag{I5}$$

Лекция I8.

## п.I. Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots \qquad (I)$$

По определению, предел частичных сумм $S_n=1+\ldots+q^{n-1}$ и есть сумма геометрической прогрессии.

Как известно (см. лекцию I5).

$$S_n=\frac{q^n-1}{q-1}. \qquad (2)$$

Если предположить, что $r=|q|<1$, то $q^n\to 0$ при $n\to\infty$.

Отсюда следует:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-q}. \qquad (3)$$

Преобразуем $S$ к обычному представлению комплексного числа

$$S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{1-r\cos\varphi-ir\sin\varphi}= \qquad (4)$$

$$=\frac{1-r\cos\varphi+ir\sin\varphi}{(1-r\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi}=\frac{1-r\cos\varphi+ir\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

Имея в виду, что два комплексных числа равны, когда равны их вещественные и мнимые части, используя формулу Моавра для каждого члена (I) и приравнивая вещественные части (I) и (4) получаем:

$$1+r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi+\ldots+r^n\cos n\varphi+\ldots=\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} \quad (5)$$

Приравнивая мнимые части, получаем

$$r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+\ldots+r^n\sin n\varphi+\ldots=\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} \quad (6)$$

Эти формулы назовем формулами Эйлера.

В левой части равенств (5), (6) мы имеем бесконечные суммы, которые называются тригонометрическими рядами.

Мы видим тесную связь комплексной геометрической прогрессии с вещественными тригонометрическими рядами.

Заметим, что равенства (5), (6) справедливы при $r<1$.

### п. 2. Ряды. Универсальный признак сходимости.

Введем в рассмотрение понятие числового ряда.

Пусть имеется последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел $\{z_n\}$.

Поставим в соответствие $\{z_n\}$ последовательность $\{S_n\}$ сумм $\{S_n\}$

$$S_n=z_1+z_2+\ldots+z_n, \qquad n=1,2,\ldots \quad (I)$$

Мы говорим, что можно построить ряд

$$z_1+z_2+z_3+\ldots+z_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} z_k \quad (2)$$

частичными суммами которого являются $S_n$ .

Возникает вопрос, как определить сумму ряда (2) и всегда ли она существует?

По определению, сумма ряда равна $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Если последовательность частичных сумм сходится, то говорят, что ряд сходится, если последовательность частичных сумм не сходится, то говорят, что ряд расходится. Таким образом, есть ряды сходящиеся и расходящиеся.

Ранее мы доказали теорему: для того, чтобы последовательность была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной (универсальный признак сходимости Коши).

Следовательно, для того, чтобы ряд (2) сходился, необходимо и достаточно чтобы последовательность его частичных сумм была фундаментальной.

лишнее, но можно вставить

~~Можно сказать еще так, если рассмотреть усеченную последовательность, то ее диаметр не больше, чем~~ $\varepsilon$

В применении к рядам универсальный признак Коши означает, что для частичных сумм

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n \,,$$
$$S_m = z_1 + z_2 + \ldots + z_m \,, \quad m > n \qquad (3)$$

имеем

$$|S_m - S_n| = |z_{n+1} + \ldots + z_m| < \varepsilon \,, \qquad (4)$$

как только

$$n, m > N(\varepsilon) \,. \qquad (5)$$

Условия (4), (5) составляют универсальный признак сходимости рядов.

Покажем, как он работает.

Если имеем геометрическую прогрессию

$$1 + r + r^2 + \ldots \quad (r < 1), \tag{6}$$

то ее члены очень быстро убывают, это обеспечивает выполнение (4), (5) и ее сходимость.

упр-е

Доказать геометрическую прогрессию (6) можно представить как бесконечную сумму дробей

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{1}{a^n} + \ldots, \tag{7}$$

где $a = \frac{1}{r} > 1$.

Знаменатели дробей в (7) быстро растут возрастая в $a > 1$ раз с возрастанием номера на единицу.

Рассмотрим сумму дробей

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{8}$$

упражнения

В этой сумме знаменатели возрастают как арифметическая прогрессия, т.е. медленнее, чем в ряде (I).

Покажем, что ряд (8) является расходящимся. Этот ряд носит название <u>гармонического</u> и широко известен в анализе.

Заметим, что анализ использует наряду со сходящимися и расходящиеся ряды.

Мы покажем, что гармонический ряд (8) не удовлетворяет универсальному критерию сходимости. Наряду с суммой

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \tag{9}$$

рассмотрим сумму

$$S_m = S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}. \tag{I0}$$

Вычитая из выражения (I0) выражение (9), получим:

$$S_m - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}. \tag{II}$$

Из критерия Коши должно следовать $|S_{2n} - S_n| < \varepsilon$, если $n$ достаточно велико. Если такое частное утверждение не справедливо, то критерий Коши не выполняется.

В нашем случае

$$|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2} \tag{I2}$$

при любом $n$, значит, критерий Коши не выполняется и, следовательно, гармонический ряд расходится, ч.т.д.

Из признака Коши следует, что общий член ряда стремится к нулю.

Действительно, по признаку Коши,

$$|a_n| = |S_n - S_{n-1}| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{I3}$$

### п. 3. Абсолютно сходящиеся ряды.

Сформулируем более частный критерий сходимости.

Признак Вейерштрасса:

Ряд $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ сходится, если сходится ряд из модулей:

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + \ldots + |z_n| + \ldots \tag{I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим через $S_n$ соответственно $\mathcal{S}_n$ частичные суммы исходного ряда и ряда из модулей

$$\begin{aligned} S_n &= z_1 + z_2 + \ldots + z_n\,, \\ \mathcal{S}_n &= |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|\,. \end{aligned} \tag{2}$$

В силу сходимости ряда из модулей имеем:

$$|\mathcal{S}_m - \mathcal{S}_n| = |z_{n+1}| + \ldots + |z_m| < \varepsilon \tag{3}$$

для $m, n > N(\varepsilon)$.

Применяя неравенство треугольника, получаем оценку:

$$|S_m - S_n| = |z_{n+1} + \ldots + z_m| \leq |z_{n+1}| + \ldots + |z_m| \cancel{+ |\mathcal{S}_m - \mathcal{S}_n|} < \varepsilon\,, \tag{4}$$

которая означает выполнение критерии Коши для исходного ряда. Утверждение доказано.

Заметим сразу, что если ряд из модулей $|z_1| + |z_2| + \ldots$ расходится - это не означает, что исходный ряд $z_1 + z_2 + \ldots$ расходится.

Таким образом, признак Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым.

Пример

Ряды, для которых сходятся ряды из модулей, называются абсолютно сходящимися рядами.

Ряд из модулей является вещественным и содержит положительные члены. Вещественные ряды с положительными или неотрицательными членами играют в анализе особую роль.

Для ряда с неотрицательным общим членом имеем

$$S_{n+1} = S_n + a_n \geqslant S_n \,. \qquad (6)$$

Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является монотонно не убывающей.

Для сходимости такой последовательности достаточно, чтобы она была ограничена сверху.

Для рядов с неотрицательными членами можно установить ряд частных признаков сходимости.

Рассмотрим ряды, обладающие следующими свойствами:

I) $a_i \geqslant 0$,

2) $a_{i+1} \leqslant a_i$.

Для таких рядов можно установить интересные критерии сходимости.

Мы установили, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \,. \qquad (7)$$

Будет ли этот ряд сходиться?

Покажем, что ряд (7) сходится.

Нам достаточно показать, что последовательность частичных сумм ограничена. Сгруппируем члены ряда (7) по два, по четыре и т.д. Имеем при $n = 2^{k+1} - 1$:

$$S_n = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}}_{2\ \text{члена}} + \underbrace{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}}_{4\ \text{члена}} + \underbrace{\frac{1}{8^2} + \ldots + \frac{1}{15^2}}_{8\ \text{членов}} + \ldots$$

$$\underbrace{\ldots + \frac{1}{(2^k)^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2}}_{2^k\ \text{членов}} \leq \qquad (8)$$

$$\leq 1 + 2\frac{1}{2^2} + 4\frac{1}{4^2} + 8\frac{1}{8^2} + \ldots + 2^k\frac{1}{(2^k)^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^k}.$$

Так как частичные суммы геометрической прогрессии ограничены, то и частичные суммы ряда (7) ограничены, значит ряд (7) сходится.

Рассмотрим ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \qquad (9)$$

S- малое

При каких $s$ ряд сходится?

Если $s$ - отрицательное, ряд расходится. При $s=1$ как гармонический ряд также расходится, при $s=2$ - ряд сходится. Покажем, что ряд Дирихле будет сходиться при $s>1$. Это делается той же группировкой членов:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots + \frac{1}{7^s} + \ldots + \frac{1}{(2^k)^s} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^s} < 1 + 2\frac{1}{2^s} + 4\frac{1}{4^s} + 8\frac{1}{8^s} + \ldots + 2^k\frac{1}{(2^k)^s} = \qquad (10)$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{s-1})^k}$$

Положим

$$q = \frac{1}{2^{s-1}} . \tag{II}$$

Тогда

$$S_n < 1 + q + q^2 + \ldots + q^k, \quad n < 2^{k+1} . \tag{I2}$$

Мы получили частичную сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q$ .

При $q < 1$ мы получаем, что частичные суммы прогрессии ограничены, значит при $q < 1$ ограничены и частичные суммы ряда (9). Отсюда следует: ряд Дирихле сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leq 1$ .

Лекция 19.

## п.1. Теорема Коши.

Мы рассмотрели сходимость рядов Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ в зависимости от показателя $s$: если $s > 1$, ряд Дирихле сходится, если $s \leq 1$, то ряд расходится.

Оценки частичных сумм ряда мы проводили с помощью определенной группировки членов и пользовались свойством положительности и монотонности членов ряда. Обобщение этого приема составляет содержание теоремы Коши о сходимости рядов.

См. на об. ~~Пусть имеем ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ и пусть члены этого ряда удовлетворяют следующим требованиям~~

$$\begin{aligned} &1) \quad a_i \geq 0, \\ &2) \quad a_i \geq a_{i+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда этот ряд сходится или расходится одновременно с рядом

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i a_{2^i}. \tag{2}$$

Введем обозначения

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ - частичная сумма ряда (1),

$\sigma_k = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i a_{2^i}$ - частичная сумма ряда (2).

Оценим $S_n$. Пользуясь монотонностью и группируя члены, находим:

$$a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{2\text{ члена}} + \underbrace{a_4 + \ldots + a_7}_{4\text{ члена}} + \ldots + \underbrace{a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k - 1}}_{2^{k-1}\text{ членов}} \leq$$

$$\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^{k-1}}.$$

Пусть имеем ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \qquad (1)$$

и пусть члены этого ряда удовлетворяют следующим требованиям:

Отсюда:

$$S_n \leqslant \sigma_k \,, \quad \text{если} \quad n < 2^k . \tag{3}$$

Мы получили первую оценку. Группируя несколько иначе, получим вторую оценку:

$$\underbrace{a_1}+\underbrace{a_2}+\underbrace{a_3+a_4}_{2\text{ члена}}+\underbrace{a_5+\ldots+a_8}_{4\text{ члена}}+\ldots+\underbrace{a_{2^{k-1}+1}+\ldots+a_{2^k}}_{2^{k-1}\text{ членов}}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+4a_8+\ldots+2^{k-1}a_{2^k}=$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+4a_4+\ldots+2^k a_{2^k})=\frac{1}{2}\sigma_{k+1} .$$

Откуда

$$S_n \geqslant \frac{1}{2}\sigma_{k+1}, \ \text{если} \quad n \geqslant 2^k . \tag{4}$$

Теперь вспомним признак сходимости рядов с положительными членами: для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы частичные суммы были ограничены.

Предположим, что сходится ряд (2), тогда $\sigma_k$ ограничены. Из неравенства (3) следует, что и $S_n$ ограничены.

Предположим, что сходится ряд (1), тогда $S_n$ ограничены. Из неравенства (4) следует, что и $\sigma_k$ - ограничены, а следовательно, сходится ряд (2). Теорема доказана.

Имеется много приемов доказательства сходимости. Рассмотрим один из них, применив его для ряда Дирихле с $s=2$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} .$$

При $n \geq 2$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1)n} . \qquad (5)$$

В то же время справедливо тождество

$$\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} . \qquad (6)$$

Суммируя неравенства (5), находим

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 - \frac{1}{n} . \qquad (7)$$

Откуда

$$S_{n+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n} < 2 .$$

Частичные суммы ограничены, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который есть ряд с положительными членами, сходится.

п. 2. Признак Даламбера.

Рассмотрим ряды с положительными членами, для которых можно применить сравнение с геометрической прогрессией.

Самый простой признак такого ряда есть **признак Даламбера**.

Для ряда с положительными членами

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i , \quad a_i > 0 \qquad (I)$$

образуем величину

$$q_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} . \qquad (2)$$

Если имеем геометрическую прогрессию, то $q_i$ - постоянно и мы можем сказать, что ряд сходится, если $q_i = q < 1$.

В общем случае $q_i$ зависит от $i$.

Признак Даламбера говорит, что если

$$\lim_{i \to \infty} q_i = q < 1, \tag{3}$$

то ряд сходится. Прежде чем убедиться в правильности признака Даламбера, сделаем два замечания:

I. При оценке сходимости ряда можно отбросить конечное число первых $n$ членов ряда, и это не влияет на сходимость ряда.

2. Если имеем два ряда с положительными членами $a_i$, $b_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i , \quad \sum_{i=1}^{\infty} b_i \tag{4}$$

и начиная с некоторого номера $N$

$$a_i \leq b_i , \quad i \geq N, \tag{5}$$

то из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда. Перейдем теперь к доказательству признака Даламбера. Для данного ряда построим ряд, который окажется геометрической прогрессией.

Зададимся $\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$q + \varepsilon < 1. \tag{6}$$

Для этого $\varepsilon$ определим число $m = m(\varepsilon)$ такое, что

$$|q_i - q| < \varepsilon, \quad i > m \tag{7}$$

или что то же

$$q - \varepsilon < q_i < q + \varepsilon \qquad \text{при } i > m. \tag{7'}$$

Запишем ряд неравенств. Первое из неравенств (7') имеет вид:

$$q - \varepsilon < q_{m+1} < q + \varepsilon. \tag{8}$$

Умножая обе части неравенства (8) на $a_{m+1}$, находим

$$a_{m+1}(q-\varepsilon) < a_{m+2} < a_{m+1}(q+\varepsilon). \tag{9}$$

Умножая неравенство (9) на $q_{m+2}$, приходим к неравенству

$$a_{m+1} q_{m+2}(q-\varepsilon) < a_{m+3} < a_{m+1} q_{m+2}(q+\varepsilon). \tag{10}$$

Пользуясь неравенствами (7') усилим неравенство (10):

$$a_{m+1}(q-\varepsilon)^2 < a_{m+3} < (q+\varepsilon)^2 a_{m+1}. \tag{11}$$

Продолжая аналогично дальше, приходим к цепи неравенств:

$$\begin{aligned} &a_{m+1}(q-\varepsilon) < a_{m+2} < a_{m+1}(q+\varepsilon), \\ &a_{m+1}(q-\varepsilon)^2 < a_{m+3} < a_{m+1}(q+\varepsilon)^2, \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &a_{m+1}(q-\varepsilon)^{k-1} < a_{m+k} < a_{m+1}(q+\varepsilon)^{k-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{m+1}(q+\varepsilon)^k$ есть геометрическая прогрессия. Он сходится в силу (6). Значит и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится в силу второго замечания.

Теорема доказана.

Рассмотрим, в качестве примера, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \tag{I3}$$

где

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots n, \qquad 0! = 1, \quad 1! = 1. \tag{I4}$$

Общий член ряда (I3) имеет вид

$$a_n = \frac{1}{n!}. \tag{I5}$$

Отсюда

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}, \tag{I6}$$

$$\lim_{n\to\infty} q_n = 0. \tag{I7}$$

Признак Даламбера удовлетворяется, следовательно, ряд (I3) сходится. Его сумма оказывается равной числу $e$ . Позднее мы определим $e$ с помощью другого предельного перехода.

п. 3. Признак Коши.

На сравнении с геометрической прогрессией основан также признак Коши сходимости рядов.

Образуем для ряда (2.I) величину

$$\rho_n = \sqrt[n]{a_n} . \qquad (I)$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = \rho < 1 , \qquad (2)$$

то ряд сходится.

Действительно, из существования предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m(\varepsilon)$, что для всех $i > m(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$|\rho_i - \rho| < \varepsilon \qquad (3)$$

или, что то же

$$\rho - \varepsilon < \rho_i < \rho + \varepsilon , \qquad i > m . \qquad (3')$$

Из (3') следует

$$\begin{gathered} (\rho - \varepsilon)^i < \rho_i^i < (\rho + \varepsilon)^i , \\ a_i < (\rho + \varepsilon)^i , \qquad i > m . \end{gathered} \qquad (4)$$

Выберем $\varepsilon$ столь малым, чтобы

$$\rho + \varepsilon < 1 . \qquad (5)$$

Из (4) следует, что члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, начиная с некоторого номера, меньше членов сходящейся геометрической прогрессии, значит, ряд сходится.

п. 4. Пример.

Если мы имеем геометрическую прогрессию $a_n = \rho^n$ с положительным знаменателем $\rho$, то

$$\rho_n = \sqrt[n]{a_n} = \rho. \tag{I}$$

При $\rho < 1$ выполняются признаки Коши и Даламбера.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, общий член которого определяется формулой

$$\begin{aligned} &b_k = \rho^k, \quad k = 2i+1, \quad i = 0, 1, \ldots, \\ &b_k = 2\rho^k, \quad k = 2i, \quad i = 1, \ldots . \end{aligned} \tag{2}$$

Образуем выражение $q_k$:

$$q_k = \frac{b_{k+1}}{b_k} = \rho \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 2i, \\ 2, & k = 2i+1. \end{cases} \tag{3}$$

$q_k$ не стремится ни к какому пределу, признак Даламбера не работает. Образуем выражения $\rho_k$:

Возможно доказать предел NB Сослаться на предел или же перенести сопоставление признаков Коши и Даламбера дальше после неравенства Бернулли и формулы бинома.

$$\rho_k = \sqrt[k]{b_k} = \rho \sqrt[k]{\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}}. \tag{4}$$

Принимая во внимание, что

$$\lim \sqrt[k]{2} = 1 \quad (k \to \infty) \tag{5}$$

имеем:

$$\lim \rho_n = \rho \lim \sqrt[k]{\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \rho. \tag{6}$$

Итак, в этом случае признак Коши работает.
Мы покажем, что признак Коши является более общим нежели признак Даламбера. Предварительно мы докажем теорему о среднем арифметическом.

## п. 5. Теорема Штольца о среднем арифметическом.

Пусть имеется сходящаяся последовательность $\{a_i\}$, имеющая предел $a$:

$$\lim a_i = a, \quad i \to \infty. \tag{I}$$

Образуем последовательность $\{b_n\}$, общий член которой равен

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{2}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} b_n = a. \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Представим $b_n$ в виде

$$b_n = \frac{\overbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}^{m}}{n} + \frac{\overbrace{a_{m+1} + \ldots + a_n}^{n-m}}{n} = b_n' + b_n'', \tag{4}$$

где $m < n$ число, подлежащее определению.
Зададимся ~~$m = m(\varepsilon)$~~ произвольным сколь угодно малым числом $\varepsilon > 0$.
Определим $m = m(\varepsilon)$, обладающее тем свойством, что

$$a - \frac{\varepsilon}{3} \le a_i \le a + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad i > m(\varepsilon). \tag{5}$$

т.е., что $a_i$ с номерами $i > m$ попадают в $\frac{\varepsilon}{3}$ - окрестность точки $a$.

Надо найти такое $N(\varepsilon)$, чтобы

$$a - \varepsilon \leq b_i \leq a + \varepsilon, \quad i > n(\varepsilon). \tag{6}$$

Возьмем $N(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы выполнились условия:

$$|b'_n| = \left| \frac{a_1 + \ldots + a_m}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n > N(\varepsilon) \tag{7}$$

или что то же

$$-\frac{\varepsilon}{3} < b'_n < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n > N(\varepsilon). \tag{7'}$$

Складывая неравенства (5):

$$a - \frac{\varepsilon}{3} < a_{m+1} < a + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$a - \frac{\varepsilon}{3} < a_{m+2} < a + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\vdots$$

$$a - \frac{\varepsilon}{3} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{3}$$

находим

$$(n-m)(a - \varepsilon/3) < a_{m+1} + \ldots + a_n < (n-m)\left(a + \frac{\varepsilon}{3}\right). \tag{8}$$

Разделив неравенство (8) на $n$, получим

$$\frac{n-m}{n}(a - \varepsilon/3) < \frac{a_{m+1} + \ldots + a_n}{n} < \frac{n-m}{n}(a + \varepsilon/3) \tag{9}$$

или что то же

$$\frac{n-m}{n}\left(a-\varepsilon/3\right) < b''_n < \frac{n-m}{n}\left(a+\frac{\varepsilon}{3}\right). \tag{9'}$$

Усилим неравенство (9'):

$$a-\frac{m}{n}a-\frac{\varepsilon}{3} < b''_n < a+\frac{m}{n}a+\frac{\varepsilon}{3} \tag{I0}$$

Потребуем в качестве второго условия на $N(\varepsilon)$ :

$$\frac{m}{n}|a| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{II}$$

Ясно, что можно найти $N(\varepsilon)$ столь большое, чтобы условия (7'), (II) выполнялись при $n > N(\varepsilon)$.

Тогда из (I0), (II) следует:

$$a-\frac{2}{3}\varepsilon < b''_n < a+\frac{2}{3}\varepsilon \; . \tag{I2}$$

Сложив неравенства (7') и (I2), получим:

$$a-\varepsilon < b_n < a+\varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon). \tag{I3}$$

Это означает, что $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Теорема доказана.

Итак, если посоедовательность $\{a_n\}$ сходится к $a$, то последовательность $\left\{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right\}$ среднеарифметических также сходится к $a$.

Обратное утверждение несправедливо.

Рассмотрим, например, последовательность

$$a_1=1,\ a_2=-1,\ a_3=1,\ a_4=-1,\ \ldots \tag{14}$$

Последовательность $\{a_n\}$ расходится.
Последовательность средних арифметических

$$b_1=1,\ b_2=0,\ b_3=1/3,\ b_4=0,\ b_5=1/5,\ \ldots \tag{15}$$

сходится.

п. 6. Суммирование по Чезаро.

Мы дадим другой более интересный пример применения теоремы о среднем арифметическом. Вернемся к предыдущей лекции и рассмотрим формулы Эйлера (I.5), (1.6):

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\varphi = 1+r\cos\varphi+r^2\cos 2\varphi+\ldots+r^n\cos n\varphi+\ldots=\frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin n\varphi = r\sin\varphi+r^2\sin 2\varphi+\ldots+r^n\sin n\varphi+\ldots=\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}. \tag{2}$$

Эти формулы справедливы только при $r<1$.
Если в равенствах (1), (2) формально положить $r=1$, то слева получим расходящиеся ряды, справа конечные выражения:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\varphi = 1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi \backsim \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\varphi = \sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi \backsim \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}. \tag{4}$$

В соотношениях (3), (4) мы используем знак $\backsim$ эквивалентности, а не равенства.

Покажем, как можно получить знак равенства, если соответствующим образом суммировать ряды в левых частях (3), (4).

Рассмотрим вместо последовательности частичных сумм

$$S_n = \sin\varphi + \ldots + \sin n\varphi \tag{5}$$

последовательность средних арифметических

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n}. \tag{6}$$

По известной формуле (см. лекцию 15)

$$S_n = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{n+1}{2}\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos(2n+1)\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что если $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$, то, величины $S_n$ являются при любом $n$ ограниченными, но не стремятся ни к какому пределу. Рассмотрим теперь величину

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \ldots + S_n}{n} = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} - \frac{\cos\frac{3\varphi}{2} + \cos\frac{5\varphi}{2} + \ldots + \cos\frac{(2n+1)}{2}\varphi}{2n\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{8}$$

Применяя вновь формулу Моавра, так как это мы делали в лекции 17, мы убеждаемся в справедливости формулы:

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\frac{3\varphi}{2}} + e^{i\frac{5\varphi}{2}} + \ldots + e^{i\frac{2n+1}{2}\varphi}\right] = \cos\frac{3\varphi}{2} + \ldots + \cos\frac{2n+1}{2}\varphi \tag{9}$$

Выражение в скобках вычисляется по формуле геометрической прогрессии:

$$e^{i\frac{3\varphi}{2}}+\ldots+e^{i\frac{2n+1}{2}\varphi}=e^{i\frac{3\varphi}{2}}\left[1+e^{i\varphi}+\ldots+e^{i(n-1)\varphi}\right]=$$

(I0)

$$=e^{i\frac{3\varphi}{2}}\frac{e^{in\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}\ .$$

Отсюда следует обычным образом:

$$\cos\frac{3\varphi}{2}+\ldots+\cos\frac{2n+1}{2}\varphi=\frac{\sin\frac{n+2}{2}\varphi\ \cos\frac{n}{2}\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\ . \qquad \text{(II)}$$

Подставляя (II) в (8), переходя в (8) к пределу при $n\longrightarrow\infty$ и принимая во внимание ограниченность (II) находим

$$\lim\sigma_n=\frac{1}{2\,tg\frac{\varphi}{2}}\ . \qquad \text{(I2)}$$

Итак, мы доказали, что если вместо предела $s_n$ брать предел их среднеарифметических $\sigma_n$, то соотношение (4) становится точным равенством.

Такой метод суммирования рядов называется с у м м и р о в а н и е м  п о  Ч е з а р о. Мы убедились на примере рядов Эйлера (1), (2), что суммирование по Чезаро позволяет определить сумму расходящегося ряда.

### п. 7. Сравнение признаков Даламбера и Коши.

Какая же связь существует между признаками Даламбера и Коши?

Из теоремы о среднем геометрическом, как следствие, имеем:

Если последовательность положительных чисел $a_i$ сходится к $a$, то среднее геометрическое $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}$ сходится также к $a$.

Забегая несколько вперед, заметим, что каждому числу $x>0$ можем поставить в соответствие вещественное число $\ln x$, так что для любых чисел $x_1, x_2$ имеем:

$$\ln (x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 . \tag{1}$$

Отсюда в частности следует:

$$\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} . \tag{2}$$

Можно ~~сказать~~ утверждать (это будет строго доказано в лекциях об элементарных функциях), что если $a_i \to a$, то

$$\ln a_i \longrightarrow \ln a . \tag{3}$$

Представим величину $s_n$ в виде:

$$s_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}, \tag{4}$$

где положено: (5)

$$q_1 = a_1, \quad q_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} .$$

Предположим, что критерий Даламбера выполнен. Тогда

$$q_i \to q < 1 . \tag{6}$$

Отсюда

$$\lim s_n = \lim \sqrt[n]{q_1 \cdots q_n} = \lim q_n = q . \tag{7}$$

Если выполнен критерий Даламбера, то будет выполнен критерий Коши. Обратное неверно, как было показано в п.4.

На этом мы закончим краткий обзор рядов.

В следующих лекциях мы перейдем к рассмотрению функций.

Л е к ц и я 20.

# Ф У Н К Ц И Я

## п.I. Определение функции.

Понятие последовательности, которое мы рассматривали, является весьма эффективным и оно позволило нам решить ряд задач. Но понятия последовательности недостаточно, чтобы решить все задачи анализа. Более общим является понятие функции. Вспомним, как определяется последовательность? Каждому натуральному числу ставится в соответствие вещественное число $a_n$. Это соответствие в одну сторону является однозначным. Но в обратную сторону это соответствие не обязательно является однозначным.

Например, последовательность

$$a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \tag{I}$$

получается, если числу $n$ натурального ряда поставить в соответствие I в случае $n$ нечетного и 0 в случае $n$ четного:

$$\begin{matrix} I & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \dots \\ I & 0 & I & 0 & I & 0 & I \dots \end{matrix} \tag{2}$$

Ясно, что такое соответствие однозначно только в одну сторону. Введем понятие функции, которое является более общим и которое включает в себя понятие последовательности.

Пусть мы имеем некоторое множество $X$ элементов $x$ и некоторое множество $Y$ элементов $y$.

Функцией $y=f(x)$ мы называем закон, по которому каждому элементу $x$ множества $X$ ставится в соответствие элемент $y$ из множества $Y$.

Множество $X$ называется областью определения функции $y=f(x)$ .

Пусть $x$ пробегает все множество $X$ . Тогда $y=f(x)$ пробегает некоторое множество $Y'$ , которое является подмножеством $Y$, $Y'$ мы назовем областью значений функции $y=f(x)$. В нашем примере множество $X$ есть $\{x\}=\{n\}$, $n=1,2,3\dots$ Множество $Y'$ есть $\{y\}=\{0,1\}$.

22.

п.2. Точечные множества.

В дальнейшем мы будем рассматривать множества точечные. Под $x$ и $y$ будем понимать точки прямой или плоскости, или что то же, вещественные или комплексные числа.

Рассмотрим простейшие примеры точечных множеств.

Интервал ( $a$, $b$ ) есть множество вещественных чисел $x$ , удовлетворяющих условию

$$a < x < b, \qquad (1)$$

где $a$, $b$ - два вещественных числа (концы интервала). Таким образом, интервал - множество точек, заполняющих отрезок $[a, b]$ , но не содержащие концов отрезков.

Множество точек $\varepsilon$ - окрестности точки $x_0$ , представляет интервал

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon, \qquad (2)$$

Сегмент $[a, b]$ есть множество вещественных чисел, удовлетворяющих условию

$$a \le x \le b. \qquad (3)$$

Концы $a$, $b$ отрезка принадлежат сегменту.

П о л у и н т е р в а л или п о л у с е г м е н т , есть множество точек, удовлетворяющих условию

$$a < x \leq b \tag{4}$$

или

$$a \leq x < b. \tag{4'}$$

В случае полуинтервала (полусегмента) один из концов отрезка принадлежит, другой не принадлежит множеству. Имеется два основных типа конечных множеств: замкнутые и открытые.

Множество $\{x\} = A$ назовем о т к р ы т ы м , если для любого $x_0 \in A$ найдется такое $\varepsilon > 0$ , что $\varepsilon$ -окрестность точки $x_0$ принадлежит $A$ :

$$S_\varepsilon(x_0) \in A. \tag{5}$$

Иными словами, открытое множество содержит любую свою точку вместе с некоторой ее окрестностью.

Интервал является открытым множеством. Его концы ему не принадлежат, а потому для любой точки интервала можно найти такую $\varepsilon$ - окрестность, которая будет принадлежать интервалу. Прежде чем определить замкнутое множество, введем понятие т о ч к и с г у щ е н и я м н о ж е с т в а .

без разрядки

Точка $a$ е с т ь т о ч к а с г у щ е н и я м н о ж е с т в а $\{x\} = A$ если в любой $\varepsilon$ -окрестности точки $a$ содержатся точки множества $A$ .
Заметим, что точка сгущения не обязана быть точкой нашего множества.

В случае интервала $(a, b)$ точки $a$ и $b$ являются точками сгущения множества $(a, b)$ , но не принадлежат ему.

З а м к н у т о е множество - это множество точек $\{x\}=A$ обладающее свойством: каждая точка сгущения принадлежит множеству $A$ .

Сегмент есть пример замкнутого множества.

Как показывает пример интервала, не всякое множество является замкнутым.

Наряду с некоторым множеством мы можем рассматривать множество его точек сгущения.

Когда мы присоединяем к нашему множеству множество точек сгущения, то получаем замкнутое множество. Справедлива

<u>Теорема:</u> Пусть $X=\{x\}$ есть точечное множество, $A=\{a\}$ -множество точек $a$ сгущения множества $X$ . Тогда множество

$$\bar{A} = X + A \tag{6}$$

есть замкнутое.

<u>Доказательство</u>:

Пусть $b$ есть точка сгущения $\bar{A}$ . В любой $\varepsilon$-окрестности $b$ содержится бесконечно много точек $y \in A$ . Если в любой $\varepsilon$-окрестности точки $b$ содержатся точки $x \in X$, то $b$ есть точка сгущения $X$ , т.е. $b \in A$ и, следовательно, $b \in \bar{A} = X + A$ . Если же $\varepsilon$- окрестность содержит точку сгущения $a \in A$ (и не обязательно принадлежащую $X$), то найдется $\delta$-окрестность $a$ целиком лежащая в $\varepsilon$-окрестности $b$ и содержащая бесконечно много точек $X$ . Итак, во всех случаях любая $\varepsilon$-окрестность $b$ содержит бесконечно много точек $x$ , т.е. $b$ есть точка сгущения $X$ и тем более $\bar{A}$ .

Теорема доказана.

Интервал - открытое множество, присоединяя к нему все его точки сгущения, в том числе концы интервала, мы получаем сегмент - замкнутое множество.

Множество $\{x\} = X$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором сегменте $[a, b]$ :

$$\{x\} = X \subset [a, b] \tag{7}$$

т.е. любая точка $x \in X$ содержится в сегменте $[a, b]$ :

$$x \in [a, b]. \tag{8}$$

Рассмотрим, например, сегмент $[0, 1]$.

Множество рациональных чисел, лежащих в этом сегменте, не совпадает с ним, но является ограниченным множеством.

Поставим вопрос: можно ли найти наименьший сегмент $[\alpha, \beta]$ который содержит точки данного ограниченного множества $X$. Тогда $\beta$ будем называть точной верхней гранью $X$, $\alpha$ - точной нижней гранью $X$.

Пусть $[a, b]$ - сегмент, содержащий все точки множества $\{x\} = X$.

Дадим более точное определение.

Определим сначала верхнюю грань множества. *Верхней гранью* нашего множества называем число $\beta$, удовлетворяющее условию: для всех $x \in X$ таких, что $x \leq \beta$.

*Точная верхняя грань* множества есть наименьшая верхняя грань, т.е. наименьшее число $\beta$ обладающее свойством: $x \leq \beta$ для всех $x \in X$.

повторение

Если $\beta$ является верхней гранью, то $\beta + \varepsilon$ также является верхней гранью.

Если $\beta$ является точной верхней гранью, то число $\beta - \varepsilon$ не может ~~бы~~ являться верхней гранью, т.е. сегмент $[\beta - \varepsilon, \beta]$ содержит точки множества.

Аналогично определяется н и ж н я я   г р а н ь   и   т о ч н а я   н и ж н я я   г р а н ь . Существует ли точная верхняя грань ограниченного множества ?

NB 83 Теорема

Покажем, что это так, образовав последовательность вложенных отрезков.

Разобьем отрезок $[a, b] \supset X$ пополам и выберем из двух отрезков тот, который содержит хотя бы одну точку $x \in X$.

Если оба отрезка содержат $x \in X$, то тогда выберем правый. Обозначим этот отрезок через $[a_1, b_1]$. Ясно, что $b_1$ есть верхняя грань $X$. Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и снова выберем правый отрезок $[a_2, b_2]$, содержащий $x \in X$. Продолжая аналогично, получим последовательность вложенных отрезков $[a_i, b_i]$, которые обладают следующими свойствами: $[a_i, b_i]$ содержит хотя бы одну точку $x \in X$ ($b_i$ есть верхняя грань $X$).

Последовательность $[a_i, b_i]$ определяет точку $\beta$.

Точка $\beta$ есть верхняя грань. Действительно, пусть это не так, т.е. найдется точка $x \in X$ такая, что $x > \beta$. Тогда при $n$ достаточно большом $b_n < x$, чего не может быть, так как $b_n$ есть верхняя грань $X$. Таким образом $\beta$ есть верхняя грань $X$, т.е. для всех $x \in X$ справедливо $x \leq \beta$.

повторение.

В то же время при любом $\varepsilon$ сегмент $[\beta - \varepsilon, \beta]$ содержит точки $x \in X$. Действительно, при достаточно большом $n$ $a_n > \beta - \varepsilon$.

Следовательно, найдутся точки $x \in X$ такие, что $x \geq a_n > \beta - \varepsilon$. Так как для всех $x \in X$ справедливо $x \leq \beta$, то $x \in [\beta - \varepsilon, \beta]$. Итак, $\beta$ есть точная верхняя грань. Аналогично доказывается существование нижней грани $\alpha$.

Верхняя грань $X$ обозначается супремум $X$, коротко, $\sup X$ или $\sup\{x\}$, $x \in X$, нижняя грань $X$ обозначается инфимум $X$, коротко, $\inf X$ или $\inf\{x\}$ $x \in X$. Заметим, что $\inf X$, $\sup X$ не обязательно принадлежат $X$. Например, конечные точки 0, I интервала (0,I) являются его точными нижней соответственно верхней гранями, но не принадлежат ему.

Введем понятие диаметра множества. Пусть $x_1$, $x_2$ - любые два числа множества $X$, образуем число $\rho(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$. Точная верхняя грань чисел $\rho$, по определению, есть д и а м е т р $d(X)$ множества $X$:

$$d(X) = \sup \rho(x_1, x_2), \quad x_i \in X, \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Для интервала $X = (0, I)$, $d(X) = 1$. В этом случае нет точек $x_1, x_2 \in X$ таких, что $\rho(x_1, x_2) = 1$, всегда найдутся такие точки, расстояние между которыми сколь угодно близко к I.

п.3. Функция как отображение.

Вернемся теперь к понятию функции (см.п.I).

Пусть точечное множество $A \subset X$ есть некоторое подмножество $X$. Когда $x$ пробегает множество $A$, то $y$ пробегает множество $B \subset Y'$. Мы будем говорить, что отображение элементов $x \to y = f(x)$ влечет за собой (и н д у ц и р у е т) отображение подмножеств:

$$A \longrightarrow B = f(A). \tag{I}$$

Назовем $y=f(x)$ образом точки $x$.
Совокупность всех $x\in X$ таких, что

$$f(x)=y \tag{2}$$

назовем прообразом $y$.

Аналогично, $B$ назовем образом $A$. Прообразом $B$ назовем множество всех $x\in X$, обладающих тем свойством, что

$$f(x)=y\in B. \tag{3}$$

Пример. Рассмотрим функцию

$$y=x^2. \tag{4}$$

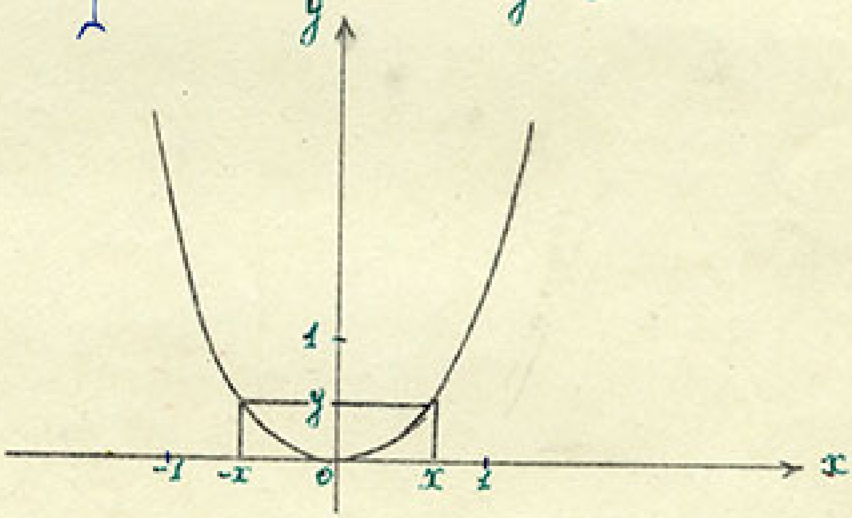



Рис. I. Соответствие $x \to y$.

Функция (4) определена для всех точек действительной оси:

$$-\infty<x<\infty. \tag{5}$$

$X=(-\infty,\infty)$ - есть область заданной функции.

Область значений функции (4) есть

$$Y=[0,\infty).\qquad(6)$$

Графически легко видеть соответствие между $x$ и $y$ (см.рис.I).

$y$ - образ точки $x$, прообраз $y$ есть совокупность двух точек: $-x, x$.

Ось $Ox$ отобразилась на верхнюю полуось $Oy$.

Рассмотрим теперь отображение множеств.

Пусть множество $A$ есть сегмент $0 \le x \le 1$.

Нетрудно видеть, что множество $A$ отобразится в множество

$$B=f(A)\;;\qquad 0\le y\le 1.$$

Множество $B$ есть образ $A$. Прообразом $B$ является множество, являющееся о б ъ е д и н е н и е м множеств $A, A'$ (мы обозначаем это множество $A \cup A'$), где $A'$ есть сегмент $-1 \le x \le 0$.

NB

Ввести понятие sign x.

## п.4. Ступенчатая функция.

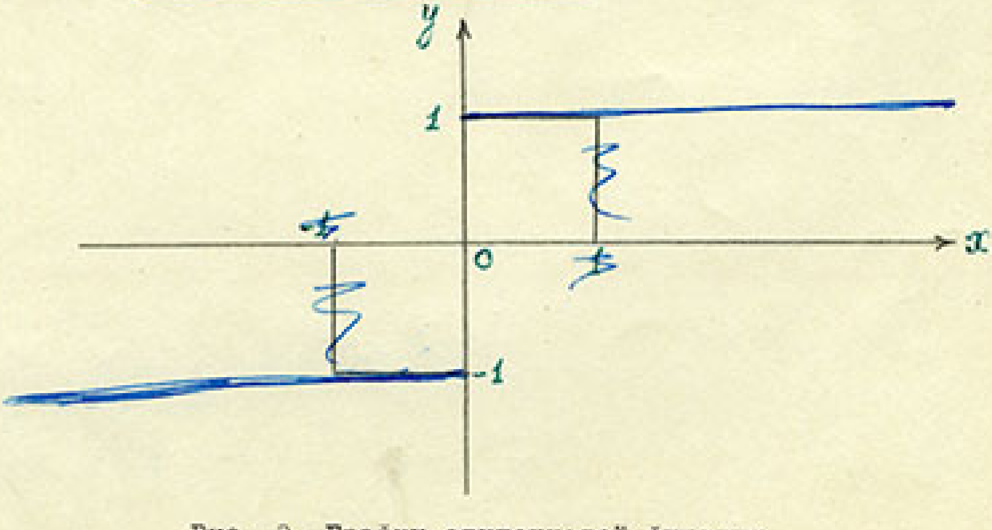



Рис. 2. График ступенчатой функции.

Математики ХУШ века понятие функции связывали с плавными гладкими функциями, задаваемыми одной формулой, но определение функции данное выше, является более общим.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ , которая определена ~~в сегменте $-1 \le x \le 1$~~ на вещественной оси следующим образом:

~~если $-1 \le x < 0$~~ $y=-1$ , если $x<0$;

~~если $0 < x \le 1$~~ $y=1$ , если $x>0$ (I);

~~$x=0$~~ $y=0$ , если $x=0$.

$X=\boxed{[-1,1]}=(-\infty,\infty)$ есть область определения функции, $Y=\{-1,0,1\}$ - область значений функции, состоящая из трех точек $y=-1, y=0, y=1$.

Нетрудно видеть, что для любого точечного множества $A\subset(-\infty,0)$ множество $B=f(A)$ состоит из одной точки $y$ = - I. Аналогично для любого множества $A\subset(0,\infty)$, $B=f(A)$ состоит из одной точки $y=1$ . Таким образом любой интервал, лежащий или целиком в $(-\infty, 0)$ или целиком в $(0,\infty)$ отображается в точку, т.е. множество диаметра 0 .

Рассмотрим теперь $\varepsilon$ -окрестность точки 0, т.е. интервал $A=(-\varepsilon, \varepsilon)$. При любом $\varepsilon$ имеем:

$$B=f(A)=Y=\{-1,0,1\} \tag{2}$$

при $\varepsilon\to 0$ $dA\to 0$.

В то же время

$$dB=df(A)=2 . \tag{3}$$

Итак, рассмотренная функция обладает тем свойством, что имеются множества $A$ сколь угодно малого диаметра, которые отображаются в множестве $B = f(A)$ конечного диаметра. Такие функции называются р а з р ы в н ы м и. Функцию, определяемую равенствами (1), обозначают значком $y = \operatorname{sign} x$ (4)

N B! Нумерация формул сдвинулась!

## п. 5. Непрерывная функция, определенная на открытом множестве.

Мы рассмотрели пример разрывной функции. Введем теперь понятие непрерывной функции. Определим сначала непрерывность функции в случае, когда область определения функции есть открытое множество.

Определение I.

Функция $f(x)$ н е п р е р ы в н а в т о ч к е $x_0$, если для любого произвольного $\delta > 0$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что если

$$|x - x_0| < \varepsilon, \tag{4}$$

то

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta. \tag{5}$$

Иными словами, найдется такая $\varepsilon$ - окрестность $x_0$, образ которой целиком лежит в $\delta$ - окрестности точки $y_0 = f(x_0)$. Поясним понятие непрерывности на примере той же функции $y = f(x) = x^2$. Докажем, что эта функция непрерывна в каждой точке $x = x_0$. Пусть для определенности $x_0 > 0$ и $y_0 = x_0^2$. Покажем, что для любой $\delta$ - окрестности точки $y$:

$$y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \tag{6}$$

найдется $\varepsilon$ - окрестность точки $x_0$ :

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \tag{7}$$

такая, что из (7) следует

$$x_0^2 - \delta < x^2 < x_0^2 + \delta. \tag{8}$$

Будем считать $\varepsilon$ столь малой, что $x_0 - \varepsilon > 0$ . Тогда из (7) следует:

$$(x_0 - \varepsilon)^2 < x^2 < (x_0 + \varepsilon)^2 \tag{9}$$

Принимая во внимание (9), видим, что неравенство (8) выполняется если удовлетворяются неравенства:

$$x_0^2 - \delta \leq (x_0 - \varepsilon)^2, \tag{I0}$$

$$(x_0 + \varepsilon)^2 \leq x_0^2 + \delta. \tag{II}$$

Из (I0) следует

$$-\delta \leq -2x_0\varepsilon + \varepsilon^2. \tag{I2}$$

Откуда

$$2x_0\varepsilon - \varepsilon^2 \leq \delta. \tag{I3}$$

Если

$$2x_0\varepsilon < \delta, \quad \varepsilon < \frac{\delta}{2x_0}, \tag{I4}$$

то неравенство (I3), (I2), (I0) выполняются.

Из (II) следует

$$2x_0\varepsilon + \varepsilon^2 = \varepsilon(2x_0 + \varepsilon) < \delta. \tag{I5}$$

Так как мы можем $\varepsilon$ предполагать сколь угодно малым, то при

$$\varepsilon < x_0 \tag{16}$$

неравенство (15) выполняется, если

$$\varepsilon < \frac{\delta}{3x_0}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что неравенства (10), (11) выполняются, если

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta}{2x_0}, \frac{\delta}{3x_0}, x_0\right\}. \tag{17}$$

Утверждение доказано.

Если функция непрерывна в каждой точке $x_0 \in X$ ($X$ - открытое множество), то она называется непрерывной в $X$.

п. 6. Непрерывная функция, определенная на произвольном множестве.

В случае, когда область определения функции $X$ есть открытое множество, $\varepsilon$ - окрестность любой точки $x_0 \in X$ при достаточно малом $\varepsilon$ принадлежит $X$, и можно говорить об отображении $x_0$ вместе с его $\varepsilon$ - окрестностью. В случае произвольного множества это не так. Например, в случае функции, определенной на сегменте $[a, b]$ никакая $\varepsilon$ - окрестность концевых точек $a, b$ не принадлежит $[a, b]$. Или же если $X$ есть множество рациональных чисел сегмента $[a, b]$, никакая $\varepsilon$ - окрестность точки $x_0 \in X$ не принадлежит $X$. Поэтому данное нами в п. 5 определение нужно уточнить.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 \in X$, если для любого $\delta > 0$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что для всех точек $x \in X$ и удовлетворяющих условию

Заметим, что понятие функции непрерывной на точечном множестве X можно ввести только в том случае, когда множество X <u>плотно в себе</u>, т.е. для любой точки $x_0 \in X$, в любой ее $\varepsilon$-окрестности содержатся точки $x \in X$, отличные от $x_0$. Иными словами каждая точка $x_0 \in X$ есть точка сгущения мн-ва X. Множество рациональных чисел и, в частности, множество конечных разрядных дробей являются плотными в себе. Эти множества, кроме того, плотны в множестве всех вещественных чисел, т.е. любое вещественное число является точкой сгущения чисел этих множеств.

$$|x - x_0| < \varepsilon \tag{I}$$

мы будем иметь

$$|y - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \delta . \tag{2}$$

~~Заметим, что~~ Множество точек $x \in X$ и удовлетворяющих (I) принадлежит одновременно $X$ и $\varepsilon$ - окрестности точки $x_0$, т.е. есть пересечение этих множеств. Пересечение множеств $A$, $B$ обозначается символом $A \cap B$.

где понятие пересечения множеств

Функция, непрерывная в каждой точке $x_0 \in X$ называется н е п р е р ы в н о й в $X$.

Мы можем придать понятию непрерывности другие формы.

<u>Определение 3.</u> Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 \in X$, если для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что любое множество $A \subset X$ удовлетворяющее условиям

$$x_0 \in A, \tag{3}$$

$$dA = \varepsilon \tag{4}$$

отобразится в множестве $B = f(A)$,

удовлетворяющее условиям

$$y_0 \in B, \tag{5}$$

$$dB \leq \delta . \tag{6}$$

<u>Определение 4.</u> Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a \in X$, если любая последовательность $x_i \in X \; (i = 1, 2, ..)$ сходящаяся к $a$ отображается в последовательность $y_i = f(x_i)$, сходящуюся к $b = f(a)$.

(см. на об.)

~~Мы предлагаем читателю самому доказать эквивалентность определений 2-4.~~

Определение 5. Функция $f(x)$ непрерывна в $X$, если она переводит любое замкнутое подмножество $A \subset X$ в замкнутое подмножество $B = f(A) \subset Y$.

Определение 6. Функция $f(x)$ непрерывна в открытом множестве $X$, если прообраз $A = f^{-1}(B) \subset X$ любого открытого подмножества $B \subset Y$ есть открытое множество.

Мы предлагаем читателю самому убедиться в эквивалентности различных определений непрерывности (см. упражнения).