

п. I. Натуральные числа

В теории чисел первым понятием является понятие натурального числа.

Натуральные числа — это ряд чисел, которые получаются последовательным прибавлением 1 к 1.

Мы можем дать геометрическое объяснение ряду натур-х чисел.
Отложим на прямой две точки A_0 и A_1 и будем считать отрезок A_0A_1 отрезком единичной длины. Начиная от точки A_0 , будем откладывать отрезок A_0A_1 на прямой, отмечая концы отложенных отрезков номерами 2, 3, 4, 5, 6, ... *и обозначая их буквами A с соответствующим индексом* 2, 3, 4, 5, 6, ... Тогда ряду натуральных чисел будет соответствовать последовательность точек прямой (A_0, A_1, A_2, \dots) *равноотстоящих* *(или: A_0, A_1, A_2, \dots)*

Рис. 1. *Геометрическая интерпретация ряда натуральных чисел*
Натуральному ряду чисел можно дать геометрическую интерпретацию, как последовательности точек, которые являются концами отрезков, *равных* *единичному отрезку A_0A_1*

Свойства натуральных чисел

- 1) Сумма двух натуральных чисел есть натуральное число.
- 2) Произведение двух натуральных чисел есть натуральное число.
- 3) Разность двух натуральных чисел не всегда является натуральным числом.

Например: $4 - 2 = 2$

В этом случае разность двух натуральных чисел является натуральным числом.

Но $2 - 4 = -2$

-2 не является натуральным числом.

4) Частное двух натуральных чисел не всегда является натуральным числом.

Например: $4:2 = 2$, но $2:4 = \frac{1}{2}$ не есть натуральное число

п.2. Целые числа

Если к числам натурального ряда присоединим 0 и отрицательные числа, то получим совокупность целых чисел

... -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Для целых чисел имеют место первые два свойства натуральных чисел, говорящие о том, что сумма и произведение двух целых чисел являются целыми числами. К тому же разность двух целых чисел является целым числом. Таким образом, операции сложения, вычитания, умножения применимые к целым числам, всегда приводят к целым же числам. Мы будем кратко говорить, что совокупность (множество) целых чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения. Но прежнему частное двух целых чисел не всегда есть целое число.

п.3. Теорема разложимости.

Мы говорим, что натуральное число n является составным, если оно представимо в виде произведения натуральных чисел, больших 1 и меньших данного:

$$n = n_1 \cdot n_2, \quad n_1 > 1, \quad n_2 > 1, \quad n_1 < n, \quad n_2 < n.$$

Если такое представление возможно только, когда n_1 или n_2 равны единице, то число n называется простым.

Примеры:

$$1 = 1 \cdot 1, \quad 1 - \text{простое число}$$

$$2 = 1 \cdot 2, \quad 2 - \text{простое число}$$

$$3 = 1 \cdot 3, \quad 3 - \text{простое число}$$

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 4 - \text{составное число}$$

$$5 = 1 \cdot 5, \quad 5 - \text{простое число}$$

$$6 = 3 \cdot 2, \quad 6 - \text{составное число}$$

$$7 = 1 \cdot 7, \quad 7 - \text{простое число}$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2, \quad 8 - \text{составное число}$$

Какие доказательства были известны

из следующей схемы: ~~сначала доказано~~
~~предположение~~ ~~предположение~~, что ~~предположение~~
~~теоремы справедливо для~~ ~~натуральных~~ ~~всех~~ ~~чисел~~ $\leq n$.
 В этом предположении

~~Сначала доказано, что утверждение справедливо~~
~~Сначала мы доказали, что предположение~~
~~справедливо для~~ ~~каждого из~~ ~~конкретных~~ ~~n~~ (в каждом

~~случае 2).~~ Затем доказано предположение,
 что предположение справедливо для
 некоторого n , на котором мы фиксируемся
 конкретным. ~~Всех~~ ~~натуральных~~ ~~чисел~~ $\leq n$, где
 n - некоторое натуральное число.
 Исторически первый пример можно увидеть
 в ~~предположении~~ ~~справедливо~~ при $n=1$.
 Затем ~~то~~ а ~~пред~~ ~~доказано~~ предположение,
 что ~~предположение~~ утверждение справедливо
 при некотором (конкретно мы фиксируем)
 для ~~всех~~ ~~натуральных~~ ~~чисел~~ n , ~~тогда~~
 $1, 2, \dots, n$ ~~тогда~~ ~~до~~ ~~некоторых~~ ~~чисел~~
 n , которые конкретно мы фиксируем.
 В предположении ~~справедливо~~ ~~на~~ ~~основании~~
 этого предположение доказано, что
 утверждение справедливо для $n+1$, т.е.
~~с~~ ~~тем~~ ~~самым~~ ~~для~~ ~~всех~~ ~~натуральных~~
~~чисел~~. Таким ~~образом~~ ~~доказано~~
~~что~~ ~~нашими~~ ~~методами~~ ~~натуральных~~

Перебирая в возрастающем порядке натуральные числа, видим среди них и простые и составные числа. Простые числа обладают тем свойством, что не могут быть представлены в виде произведения простых чисел меньших данного числа. Составные числа представимы в виде произведения простых чисел.

Справедлива теорема I: Любое натуральное число n разлагается в произведение простых чисел.

Доказательство: *Утверждение справедливо при $n=2$. Это справедливо.*
 Предположим, что доказана справедливость данного утверждения для всех ^{натуральных} чисел до числа n включительно, т.е. для чисел $1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим следующее число $n+1$.

Число $n+1$ либо простое, либо составное. Если $n+1$ - простое, утверждение доказано, так как тождество $n+1 = 1 \cdot (n+1)$ есть искомое разложение.

Если число $n+1$ - составное, то оно представимо в виде произведения двух чисел n_1 и n_2 меньших $n+1$: $n_1 \leq n$, $n_2 \leq n$. Числа n_1 , n_2 , согласно предположению, представимы в виде произведения простых чисел. Следовательно, и число $n+1$ представимо в виде произведения простых чисел.

Теорема доказана методом математической индукции.

Примеры: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
 $64 = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
 $666 = 6 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$

п. 4. Теорема единственности разложения.

Мы доказали, что любое натуральное число представляется в виде произведения простых чисел. Возникает вопрос, единственно ли представление числа в виде произведения простых чисел.

См. 24
 Будет ли
 единственное
 разложение
 на простые
 множители?
 см. 34

См. 27

Заметим, что если p_1, p_2, \dots, p_r — простые делители натурального числа n , то n представимо в виде

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$ (1)

Если среди чисел p_i есть равные, то натуральное число n представимо в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$, где p_1, p_2, \dots, p_s — различные простые делители n , а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — натуральные числа.

Если среди чисел p_i есть равные, то натуральное число n представимо в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$, где p_1, p_2, \dots, p_s — различные простые делители n , а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — натуральные числа.

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение натурального числа n . Тогда $\alpha_k > 0$ ($k=1, 2, \dots, s$) — натуральные числа, $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ — различные простые делители n .

Каждому натуральному числу n можно сопоставить набор натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ и набор различных простых делителей p_1, p_2, \dots, p_s натурального числа n .

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначением (1), (2).

Мы будем предполагать, что p_1, p_2, \dots, p_r — различные простые делители n .

1.4. Теорема единственности разложения
 натурального числа n в произведение (3.2) единственно,
 т.е. если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$

то любое другое разложение
 натурального числа n в произведение
 простых чисел с натуральными показателями
 совпадает с ним.

Например, 666 может разлагаться следующим образом:

$$666 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 111 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$$

$$666 = 2 \cdot 333 = 2 \cdot 3 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$$

На этом примере мы убедились, что
 разлагая натуральное число на простые
 мы приходим в конечном итоге к одному
 и тому же результату. Можно доказать,
 что разложение числа на простые множители
 единственно. Впервые это был
 доказано Гауссом. Более полно утверждение
 можно сформулировать следующим образом:

Лемма 2. Пусть

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad (1)$$

$$n = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s}$$

если оба представления числа n таковы, что

$$p_i, q_i - \text{простые}, \quad p_1 < p_2 < \dots < p_r, \quad q_1 < q_2 < \dots < q_s$$

α_i, β_i - натуральные.

тогда

$$r = s, \quad \alpha_i = \beta_i, \quad p_i = q_i, \quad \alpha_i = \beta_i \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2)$$

Супердупло
Теорема 2: Если число ~~натуральное~~ *составное*, то его представление в виде произведения простых чисел единственно.

Рассмотрим число составное, например,

$$666 = 3 \cdot 222 = 3 \cdot 2 \cdot 111 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$$

$$666 = 2 \cdot 333 = 2 \cdot 3 \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$$

Разлагая по разному составное число на множители, мы приходим ~~к одному и тому же результату~~ *к одному и тому же результату*.

~~Можно доказать, что разложение числа на простые множители является единственным. Впервые это было доказано Гауссом (—).~~

См. 3.1
нм
Мы рассмотрим ~~алгоритм~~ *представления* Эвклида, который поможет доказать теорему 4, единственности представления чисел в виде произведения простых чисел.

Определение: Целое число d есть общий делитель (о.д.) ~~натуральных~~ *натуральных* чисел m, n если m и n делятся без остатка на d .

Введем понятие общего наибольшего делителя (о.н.д.) ~~чисел~~ *чисел* m, n . О.н.д. — это есть наибольший общий делитель, ~~чисел~~ *чисел* m, n .

Для нахождения ~~о.н.д.~~ *о.н.д.* чисел m и n берем все общие делители m и n и среди них выбираем самый большой.

Если о.н.д. чисел m, n равен 1, то m, n называются взаимно простыми.

Для определения о.н.д. служит алгоритм Эвклида.

Предположим, что $m > n$ Тогда

$$m = n \cdot q + r_0, \quad 0 \leq r_0 < n \quad (4) \quad \text{см. 3.1}$$

Если $r_0 = 0$, то m делится на n без остатка и, следовательно, их о.н.д. будет равен n .

^{x)} Под алгоритмом в математике понимают последовательность операций, которые необходимо проделать для получения какого-то результата.

7.1. 9.1. 9.2. - натуральные числа
 9.3. - натуральные числа

4a -

p_1, p_2 и p_3
 соответствующие d_1, d_2, d_3
 перемещения, d_1, d_2, d_3
 $p_1, d_1; p_2, d_2; p_3, d_3$
 эти значения p и d g
 перемещения p мены d

Если p и d g m, n

$70 - 0$
 n_3 p d g m, n g m, n g m, n
 0.9 m, n g m, n g m, n g m, n
 0.9 m, n g m, n g m, n g m, n
 0.9 m, n g m, n g m, n g m, n

(5)
 (cm of 5)

Пусть $2 < d$, тогда $0 < 2_0 < n$. Пусть некоторое число d является общим делителем m и n , тогда 2_0 делится на d без остатка. *Следовательно,*

Итак, любой делитель m и n является делителем и 2_0 . Общий делитель m и n является общим делителем n и 2_0 и обратно.

Мы свели исходную задачу нахождения общего делителя пары чисел (m, n) к нахождению *о.н.д.* общего делителя пары чисел $(n, 2_0)$, так же как m и n являются *натуральными* числами, но числа $n, 2_0$ меньше соответственно чисел m и n , и поэтому задача нахождения *о.н.д.* $(n, 2_0)$ проще, чем задача нахождения *о.н.д.* (m, n) .

Мы можем продолжить этот процесс дальше, положив: $n = 2_0 \cdot q_0 + 2_1$, *Аналогично,* задачу нахождения *о.н.д.* $(n, 2_0)$ сводим к задаче нахождения *о.н.д.* $(2_0, 2_1)$, причем целые числа $2_0, 2_1$ меньше соответственно чисел n и 2_0 .

Продолжая этот процесс, мы приходим к цепи равенств:

$$m = n \cdot q + 2_0$$

$$n = 2_0 \cdot q_0 + 2_1$$

$$2_0 = 2_1 \cdot q_1 + 2_2$$

$$2_{k-1} = 2_k \cdot q_k + 2_{k+1}$$

Для цепочки чисел $m, n, 2_0, 2_1, 2_2, \dots, 2_k, 2_{k+1}$ *натуральные* имеем:

$$\text{о.н.д.}(m, n) = \text{о.н.д.}(n, 2_0) = \text{о.н.д.}(2_0, 2_1) = (7)$$

$$= \text{о.н.д.}(2_k, 2_{k+1}) =$$

Целые положительные числа $2_0, 2_1, \dots, 2_k, 2_{k+1}$ *уменьшаются*, и, следовательно, через конечное число шагов, при каком-то значении $k = l$ мы получим $2_{l+1} = 0$. Тогда *целые неотрицательные* $\text{о.н.д.}(2_l, 2_{l+1}) = 2_l$ и, следовательно $2_l = \text{о.н.д.}(m, n)$.

Таким образом, о.н.д. (m, n) есть последний отличный от нуля остаток в цепочке остатков $z_0, z_1, z_2, \dots, z_k$

Из алгоритма Эвклида следуют утверждения:

Лемма 1. $q_0(m, n)$ есть делитель о.н.д. (m, n) .

Лемма 2. Если m, n, d, l - целые числа, и о.н.д. $(m, n) = d$ то о.н.д. $(ml, nl) = d \cdot l$

Лемма 3. Если произведение $m \cdot n$ целых чисел m, n делится на p , где p - простое ($\frac{m \cdot n}{p} = \text{целое}$), то или m делится на p или n делится на p , или каждое делится на p .
Лемма 1 (2) очевидна. Докажем лемму 3

Предположим, для определенности, что m не делится на p .
Рассмотрим пару (m, p) . о.н.д. $(m, p) = 1$ Тогда m и p взаимно просты. По лемме 2 о.н.д. $(mp, pn) = n$. По условию леммы 3 $m \cdot n$ делится на p . Но также pn делится на p . Следовательно, $p = \text{о.д.}(mp, pn)$. Но, по лемме 1 о.н.д. делится на любое о.д., а поэтому n делится на p .

Лемму 3 можно обобщить: если m_1, m_2, \dots, m_k - целые числа и произведение $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ делится на целое число d , то по крайней мере один из сомножителей делится на число d .

Докажем теперь теорему 2, что представление целого числа в виде произведения простых чисел однозначно.

Будем доказывать теорему методом индукции, считая ее доказанной для чисел $1, 2, \dots, n$

Итак, пусть $n+1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ и одновременно $n+1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$.
Докажем, что наборы простых чисел (p_1, p_2, \dots, p_k) и (q_1, q_2, \dots, q_s) совпадают^{x)}.

^{x)} Для удобства рассмотрения, мы представим степень d^k какого-либо простого числа d в виде произведения:

Кроме того, в разложение не входит 1, все числа в разложении больше 1.

x) Мы используем предположение (1) пункта 3

По ~~лемме 3~~ ^{следствие леммы 3} (в общей формулировке) (для определенности p),
по крайней мере одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_k делится на p . Так
как числа p_1, p_2, \dots, p_k простые, это означает, что $p = p_k = p_1$.

Тогда число $m = \frac{n+1}{p} = \frac{p_1 \dots p_{k-1} p_{k+1} \dots p_s}{p} = \frac{n+1}{p_1 \dots p_s}$
по предположению индукции, имеет единственное представление

Теорема доказана.

п.5. Теорема Эвклида. Имеется сколь угодно большие простые числа.
Утверждение не очевидно. Тем удивительнее, что оно может быть
просто доказано. Приводимое доказательство принадлежит Эвклиду.
Предположим противное, т.е., что имеется конечное число простых
чисел

$$1, 2, 3, \dots, p$$

и все числа, большие p - составные.

Рассмотрим число P равное произведению всех существующих
простых чисел плюс единица:

$$P = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots p) + 1$$

Оно не делится ^{ни} на одно простое, так как всякий раз в остатке
остается единица. В то же время мы доказали, что каждое целое
число представляется в виде произведения простых чисел. Следова-
тельно число P - простое, большее p . Мы пришли к противо-
речию. Теорема доказана.

Имеется много утверждений о простых числах. Рассмотрение
теории чисел и простых чисел не входит в нашу задачу. К тому же
теория потребовала бы знаний, которых у нас нет. Из теории чисел
мы берем лишь то, что нам необходимо для выяснения понятия веще-
ственного числа.

Интересующая нас теория чисел
и особенно к монотонным функциям
И.М. Виноградова "Избранные труды" и "Введение в арифметику".

п.6. Понятие рационального числа.

Будем называть рациональным числом число вида $\frac{m}{n}$, где m и n - целые числа, причем n отлично от 0. Сумма, разность, произведение рациональных чисел - есть рациональное число. Частное двух рациональных чисел (если делитель не равен нулю) - есть рациональное число. Итак, элементарные арифметические (сложение, вычитание, умножение, деление) действия с рациональными числами не выводят за пределы множества рациональных чисел.

Говорят, что множество или совокупность всех рациональных чисел замкнуто относительно элементарных арифметических операций.

п.7. Соизмеримые отрезки. Геометрическое представление рациональных чисел.

Мы пользовались геометрическим представлением целого числа. Полезно пользоваться геометрическим представлением рационального числа.

В геометрии понятие рационального числа связывается с длиной отрезка, каждый отрезок имеет определенную длину, которой поставлено в соответствие определенное число.

Целому числу ставят в соответствие любой отрезок, концы которого совпадают с отмеченными целочисленными точками m, n ($m < n$). Длина любого такого отрезка ^{или кратность} ~~равна~~ числу $n - m$, поскольку в нем целое число ($n - m$) раз откладывается единичный отрезок AA_1 .

Что поставить в соответствие рациональному числу?

Введем понятие соизмеримых отрезков. Два отрезка называются соизмеримыми, если имеется отрезок, который укладывается целое число раз в обоих отрезках.

Как проверить, соизмеримы или не соизмеримы данные отрезки? Надо выяснить, найдется ли такой отрезок, который целое число раз уложится в каждом из данных отрезков.

Наши ~~рассуждения~~ ^{построения} будут использовать аксиому Архимеда:

Если имеется два отрезка AB , AC и $AB < AC$, то можно найти такое целое число m , что $m \cdot AB > AC$.

Укажем два способа определения соизмеримости.

С п о с о б п е р е б о р а. Пусть имеем отрезки AB и AC , $AB < AC$, и пусть AB не укладывается в AC целое число раз. Разделим AB на две части и проверим укладывается ли половина отрезка AB в AC целое число раз.

Если не укладывается, то разделим отрезок AB на три части и проверим укладывается ли треть отрезка AB и AC целое число раз. Продолжая этот процесс, может оказаться, что найдется отрезок длины $\frac{AB}{m}$, который укладывается целое число (n) раз в AC :
 $\frac{AB}{m} \cdot n = AC$. В этом случае отрезки AB соизмеримы, в противном — несоизмеримы. Способ перебора не является достаточно экономичным.

Рассмотрим способ, который напоминает алгоритм Евклида нахождения о.н.д. пары целых чисел.

Мы будем называть этот способ также способом и с - чер п ы в а н и я.



Если AB укладывается в AC целое число раз, то отрезки AB , AC соизмеримы. Если это не так, то по аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число q , что $q \cdot AB < AC$, $(q+1) \cdot AB > AC$.

Рассмотрим остаточный отрезок $B^I C = AC - q \cdot AB$

Ясно, что $B^I C < AB$. Если $B^I C$ откладывается целое число раз в AB , то он откладывается целое число раз и в AC , т.е. отрезки AB , AC соизмеримы. Если $B^I C$ не откладывается целое число раз в AB , то найдется такое q_0 , что:

$$q_0 \cdot B^I C < AB, (q_0 + 1) B^I C > AB$$

Остаточный отрезок

$$B''B = AB - q_0 \cdot B^I C, B''B < B^I C$$

будем откладывать в $B^I C$ и т.д.

Если отрезки соизмеримы, то процесс закончится через конечное число шагов. Мы приходим к тому, что последний остаточный отрезок отложится в предыдущем остаточном отрезке. Обратно, если процесс исчерпывания заканчивается через конечное число шагов, отрезки соизмеримы. В случае соизмеримых отрезков алгоритм исчерпывания вполне аналогичен алгоритму Евклида. В случае несоизмеримых отрезков алгоритм исчерпывания не обрывается.

Мы рассмотрели метод проб и метод исчерпывания для выяснения соизмеримости отрезков.

п.8. Свойства рациональных чисел

Рассмотрим ряд свойств рациональных чисел, отличающих их от целых.

Совокупность рациональных чисел замкнута относительно 4-х арифметических операций, совокупность целых — только относительно первых трех.

Множество целых чисел дискретно. Это означает, что между n и $n+1$ не существует промежуточного целого числа.

Являются ли рациональные числа дискретными? Существует ли такая пара рациональных чисел, что между ними нет рационального числа, т.е. существует ли пара соседних чисел? Оказывается, нет.

Вопрос

См. на об.

действительно, если $a_1 = \frac{m_1}{n_1}, a_2 = \frac{m_2}{n_2}$

$$a_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad a_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

для рациональных чисел, то можно

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$$

таким образом, рациональные и их суммы a_1, a_2 между ними, если только $a_1 \neq a_2$. В итоге следует, что между любыми двумя рациональными числами a_1, a_2 существует рациональное число.

Существование $\frac{1}{2}$ суммы рациональных чисел, сколь угодно малые, т.е. сколь угодно близкие к нулю.

действительно, если $a_1 = 0, a_2 = \frac{m}{n}$, то

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_2}{2} = \frac{m}{2n}$$

таким, что меньше, чем a_2 :

$$0 < a < a_2 = \frac{a}{2}$$

Пусть $\varepsilon = \frac{m}{n}$ некоторое положительное рациональное число. Тогда $\frac{1}{N} < \varepsilon \leq \frac{1}{N-1}$ для некоторого натурального N .

$$0 < \frac{1}{N} < \varepsilon \leq \frac{1}{N-1}$$

(1)

действительно, по аксиоме Архимеда найдется такое N , что $N\varepsilon > 1$. А остальное следует из неравенства (1).

$$N\varepsilon < 1 \quad (N-1)\varepsilon \leq 1, \quad N\varepsilon > 1 \quad (2)$$

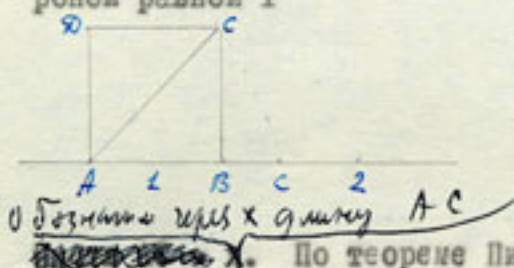
А остальное следует из неравенства (1)

✓ Какое бы рациональное число n взяли, всегда существует рациональное число сколь угодно близкое. Действительно, рациональные числа $z_1 = \frac{m}{n}$ и $z_2 = \frac{m}{n} + \frac{1}{N}$ сколь угодно близки при N целом, ^и достаточно большом. Это свойство множества рациональных точек мы называем свойством плотности: ~~множества рациональных чисел~~ ^{плотности}. ~~Если взять любой рациональный отрезок, то в нем бесконечное множество рациональных точек. Иными словами, множество рациональных точек не имеет изолированных точек~~

п.1. Иррациональность чисел

Поставим вопрос: исчерпывают ли рациональные точки все точки отрезка прямой? Оказывается, нет. Отрезки можно получать не только посредством деления данного отрезка ^{в целое число раз} и откладывания ^{целых} части отрезка.

Рассмотрим пример. Найдем длину диагонали квадрата со стороной равной 1



~~Получим иррациональную длину AC~~. По теореме Пифагора имеем:

$$x^2 = 2$$

Предположим, что x — рациональное число. Тогда x равно рациональной дроби $\frac{m}{n}$. Можно считать, что $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Поскольку $x = \frac{m}{n}$, то

$$x^2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad (I)$$

Так как $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, то оба числа m и n не могут быть четными. Следовательно, только одно из них может быть четным.

Записав равенство (I) в виде

$$m^2 = 2 \cdot n^2 \quad (2)$$

видим, что m^2 — число четное.

Поэтому m должно быть также четным и, следовательно, m^2 должно делиться на 4. ^{Не тогда как (2) требует, чтобы} Получается, что $\sqrt{m^2}$ должно делиться на 2, ~~тогда n^2 — четное~~ ^{м.е.} следовательно, n также четное. Мы полу-

чили, что m и n оба четные, следовательно, дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что противоречит нашему предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Следовательно, x не является рациональным числом.

Отрезок AC не является рациональным отрезком.

Докажем, что нет рационального числа, удовлетворяющего равенству $x^2 = p$ где p - простое число.

Доказывая способом от противного, предположим, что x - рациональное число. Так как p простое, x не может быть целым. Пусть $x = \frac{m}{n}$. Можно считать, что $\frac{m}{n}$ - несократимая дробь.

Мы знаем, что любое целое число представимо в виде произведения простых чисел единственным образом:

$$\begin{aligned} m &= p_1 p_2 \dots p_k \\ n &= q_1 q_2 \dots q_s \end{aligned} \quad (3)$$

Так как дробь $\frac{m}{n}$ - несократимая, то в наборе (p_1, p_2, \dots, p_k) нет ни одного числа из набора (q_1, q_2, \dots, q_s) и наоборот, в наборе (q_1, q_2, \dots, q_s) нет ни одного числа из набора (p_1, p_2, \dots, p_k) . Используя (3), для m^2 и n^2 получаем следующие разложения

$$\begin{aligned} m^2 &= p_1^2 p_2^2 \dots p_k^2 \\ n^2 &= q_1^2 q_2^2 \dots q_s^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что $\frac{m^2}{n^2}$ тоже несократимая дробь

Поскольку $x = \frac{m}{n}$, то $x^2 = \frac{m^2}{n^2} = p$ (5)

Из последнего равенства следует $m^2 = p \cdot n^2$ (6)

Подставляя разложение n^2 , имеем

$$m^2 = p \cdot q_1^2 q_2^2 \dots q_s^2$$

где p - простое число.

Следовательно, мы получили для целого числа m^2 два различных представления в виде произведения простых чисел:

$$\begin{aligned} m^2 &= \cancel{p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot 2 \cdot 2} \dots & p_1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \dots & p_2 \cdot p_2 & (8) \\ m^2 &= \cancel{3 \cdot p \cdot p' \cdot q' \cdot q' \cdot 2' \cdot 2'} \dots & p \cdot q_1 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_2 \dots & q_5 \cdot q_5 \end{aligned}$$

что противоречит теореме о единственности представления целого числа в виде произведения простых чисел. Следовательно, наше предположение о том, что x есть рациональное число неверно.

Вполне аналогично можно доказать, что нет рационального числа x , удовлетворяющего уравнению $x^h = p$, где h — некоторое ^{натуральное} ~~целое~~ число, p — простое число.

Числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

п.2. Представление чисел цепными дробями.

Наша задача будет состоять в представлении иррациональных чисел посредством рациональных.

Рассмотрим, прежде всего, представление иррациональных чисел рациональной цепной дробью.

Представление, или как еще говорят, разложение иррационального числа в цепную дробь, производится с помощью алгоритма, аналогичному алгоритму Евклида или алгоритму исчерпывания.

Покажем это сначала на примере рационального числа. Пусть $S = \frac{m}{n} > 1$ есть рациональное число. Тогда полагаем, следуя алгоритму Евклида

$$m = q_0 \cdot n + r_0$$

$$n = q_1 \cdot r_0 + r_1$$

$$r_0 = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

$$\dots$$

$$r_{\ell} = q_{\ell+1} \cdot r_{\ell+1}$$

$$0 \leq r_0 < n$$

$$0 \leq r_1 < r_0$$

$$0 \leq r_2 < r_1$$

(I)

$$0 \leq r_{\ell+1} < r_{\ell}$$

$$r_{\ell+1} = 0$$

Равенства (I) мы перепишем в виде:

$$\begin{aligned} S = \frac{m}{n} &= q_0 + \frac{r_0}{n} = q_0 + \frac{1}{n/r_0} \\ \frac{n}{r_0} &= q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{r_0/r_1} \\ \frac{r_0}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{r_1/r_2} \\ &\vdots \\ \frac{r_{l-1}}{r_l} &= q_{l+2}, \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя в цепи равенств (2) последовательно нижележащие в верхние, получим:

$$\frac{m}{n} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots q_{l+1} + \frac{1}{q_{l+2}}}}} \quad (3)$$

Выражение в правой части равенства (3) называется конечной цепной дробью.

Мы показали, что рациональное число представляется конечной цепной дробью. Нетрудно видеть, что обратно, конечная целная дробь есть рациональное число. Иными словами, конечность цепной дроби есть необходимое и достаточное условие рационального числа.

В случае иррационального числа $a > 1$ процесс сравнения чисел a и 1 , соответствующий алгоритму Евклида, является бесконечным.

По аналогии с равенствами (2) мы можем записать

$$\begin{aligned} \frac{a}{1} &= q_0 + \frac{r_0}{1} = q_0 + \frac{1}{1/r_0} & 0 \leq r_0 < 1 \\ \frac{1}{r_0} &= q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{r_0/r_1} & 0 \leq r_1 < r_0 \\ \frac{r_0}{r_1} &= q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{r_1/r_2} & 0 \leq r_2 < r_1 \\ &\vdots & \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{2_k}{2_{k+1}} = q_{k+2} + \frac{2_{k+2}}{2_{k+1}} = q_{k+2} + \frac{1}{2_{k+1}/2_{k+2}}, \quad 0 \leq 2_{k+2} < 2_{k+1},$$

но цепь равенств (4) не обрывается.

Здесь

$$q_0 = [x], \quad q_1 = \left[\frac{1}{x_0}\right], \quad q_2 = \left[\frac{2_0}{2_1}\right], \dots, \quad q_{k+2} = \left[\frac{2_k}{2_{k+1}}\right] \quad (5)$$

где $[x]$ означает целую часть x , т.е. целое число m обладающее свойством:

$$m = [x] \leq x, \quad m+1 = [x]+1 > x \quad (6)$$

Если оборвать равенства (4) на каком-то индексе $k = \ell$, то получим подходящую дробь.

Применим указанный алгоритм к числу $x = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{2} &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} \\ &= 1 + \frac{2}{2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}} = \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Продолжая процесс получаем бесконечную периодическую цепную дробь

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}} \quad (8)$$

Будем последовательно вычислять подходящие дроби

$$\frac{A_0}{B_0} = 1, \quad \frac{A_0^2}{B_0^2} = 1 < 2$$

$$\frac{A_1}{B_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{A_1^2}{B_1^2} = \frac{9}{4} > 2$$

$$\frac{A_2}{B_2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}, \quad \frac{A_2^2}{B_2^2} = \frac{49}{25} < 2$$

(9)

$$\frac{A_3}{B_3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}, \quad \frac{A_3^2}{B_3^2} = \frac{289}{144} > 2$$

$$\frac{A_0}{B_0} < \sqrt{2}, \quad \frac{A_1}{B_1} > \sqrt{2}, \quad \frac{A_2}{B_2} < \sqrt{2}, \quad \frac{A_3}{B_3} > \sqrt{2}$$

Можно показать, что вообще

$$\frac{A_{2k}}{B_{2k}} < \sqrt{2}, \quad \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} > \sqrt{2}$$

(10)

п. I. Разрядные числа.

Определение. Положительное рациональное число

$$z = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{n^k} \quad (I)$$

будем называть разрядным числом или конечной разрядной дробью, если выполняются условия:

- 1) α_0 - произвольное целое число
 2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ - натуральные числа
 3) $0 \leq \alpha_1 < n, 0 \leq \alpha_2 < n, \dots, 0 \leq \alpha_k < n$

Число n называется основанием дроби, k - порядком. Аналогично определяется отрицательное разрядное число:

$$-z = -\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{n^k}\right) \quad (I')$$

Конечная разрядная дробь обозначается символом

$$z = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \quad (2)$$

Ясно, что при этом следует дополнительно указать основание n .

Частным случаем разрядных дробей являются двоичные, ... десятичные, ... и т.д. дроби. Двоичная дробь есть разрядная дробь с основанием 2, десятичная дробь есть разрядная дробь с основанием 10, и т.д.

Пример:

$$1\frac{3}{8} = 1 + \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,011$$

$$1,459 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{9}{10^3}$$

Отрицательные разрядные числа можно представить тем же символом

$$z = -(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

где все числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ - неотрицательные.

Сумма, разность, произведение разрядных чисел есть число разрядное. Правила действий с разрядными дробями аналогичны правилам действий с десятичными.

п.2. Представление иррациональных и рациональных чисел разрядными дробями с заданной точностью.

Начнем с примера.

Будем находить значение $\sqrt{2}$ *с помощью бинарных дробей*. Разобьем отрезок $[1, 2]$ пополам. Ясно, что $(1)^2 < 2 < (3/2)^2$, т.е. корень уравнения $x^2 = 2$ лежит в интервале $1 < x < 3/2$. Этот интервал делим пополам и выбираем тот интервал, в котором лежит корень уравнения $x^2 = 2$, это есть интервал $1 \frac{1}{4} < x < 1 \frac{1}{2}$.

Продолжая этот процесс, мы находим все меньшие отрезки содержащие точку $x = \sqrt{2}$ (см. рис. *Длина отрезка*).
характеризует погрешность в определении
 Концам отрезков соответствуют числа вида

$$1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots$$

$a_i = 0, 1 \quad i = 1, 2, \dots$



т.е. конечные двоичные дроби.

Мы видим, что для числа $\sqrt{2}$ можно найти двоичные дроби приближенно равные ему (с избытком и с недостатком), при этом погрешность можно сделать сколь угодно малой.

Ниже приводятся приближенные значения $\sqrt{2}$ с избытком и с недостатком с окончательной точностью $\epsilon = \frac{1}{2^5}$

С избытком	С недостатком
1	$1 \frac{1}{2}$
$1 \frac{1}{4}$	$1 \frac{1}{2} = 1 \frac{2}{4}$
$1 \frac{3}{8}$	$1 \frac{1}{2} = 1 \frac{4}{8}$

$$\begin{array}{rcl}
 & - & 3 & - \\
 1 \frac{3}{8} & = & 1 \frac{6}{16} & \quad 1 \frac{7}{16} \\
 \hline
 1 \frac{13}{32} & & 1 \frac{7}{10} = 1 \frac{14}{20} & \\
 \hline
 \end{array}$$

Указанную таблицу можно переписать в виде двоичных дробей

с недостатком	с избытком
1,00000 ...	1,10000
1,01000 ...	1,10000
1,01100 . . .	1,10000
1,01101	1,01110

Конечные двоичные дроби являются рациональными числами, поэтому $\sqrt{2}$ не может быть представлен конечной двоичной дробью, однако с заданной точностью $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ число $\sqrt{2}$ может быть представлено (с недостатком и избытком) парой конечных двоичных дробей. Мы будем говорить, что $\sqrt{2}$ представляется бесконечной двоичной дробью.

Рассмотрим теперь положительную десятичную дробь. Общий вид ее

$$\begin{aligned}
 & \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots + \frac{\alpha_k}{10^k} = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_k \dots, \\
 & \text{где } \alpha_0 - \text{необязательное целое,} \\
 & 0 \leq \alpha_i < 10 \quad \boxed{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} \quad \boxed{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} \quad i = 1, \dots, k
 \end{aligned}$$

Используем десятичную дробь для приближенного представления $\sqrt{2}$. Для этого разобьем отрезок $[1, 2]$ на десять равных частей. Ясно, что $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$, т.е. корень уравнения $x^2 = 2$ лежит в интервале $1,4 < x < 1,5$. Этот интервал делим на десять равных частей и выбираем интервал, в котором лежит корень уравнения $x^2 = 2$. Это есть интервал $1,41 < x < 1,42$.

Продолжая этот процесс, мы находим все меньшие и меньшие отрезки, содержащие $\sqrt{2}$. Концам отрезков соответствуют числа

вида $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots$, т.е. конечные десятичные дроби.

Выпишем колонки десятичных дробей, приближающих $\sqrt{2}$ с недостатком и с избытком и окончательной точностью $\epsilon = \frac{1}{10^5}$

с недостатком	с избытком
1,40000	1,50000
1,41000	1,42000
1,41200	1,41300
1,41210	1,41220
1,41214	1,41215

Конечные десятичные дроби являются рациональными числами, поэтому число $\sqrt{2}$ не может быть представлено конечной десятичной дробью. Однако, с любой точностью $\epsilon = \frac{1}{10^n}$ число $\sqrt{2}$ может быть представлено (с недостатком и с избытком) парой конечных десятичных дробей. Мы будем кратко говорить, что $\sqrt{2}$ представляется бесконечной десятичной дробью.

Совершенно аналогичный алгоритм приведет к бесконечной десятичной дроби при нахождении положительного корня уравнения

$$x^m = p, \quad p - \text{простое, } m - \text{натуральное число} \quad (3)$$

Задаваясь точностью $\epsilon = \frac{1}{10^k}$, мы можем найти две конечных десятичные дроби k -го порядка

$$x_{2k-1} = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \quad (4)$$

$$x_{2k} = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$$

приближающие $x = \sqrt[m]{p}$ с недостатком и с избытком с точностью до $\epsilon = \frac{1}{10^k}$. Повышая точность, т.е. увеличивая k , мы получим бесконечную последовательность дробей x_{2k-1}, x_{2k} и

Проверка
по таблице
Бернулли

чисел α_k . Мы будем кратко говорить, что $\sqrt[m]{p}$ определится бесконечной десятичной дробью

$$x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots \quad (5)$$

Теперь мы можем дать общее определение произвольного вещественного числа x (иррационального или рационального) как бесконечной десятичной дроби. Это означает, что числа (конечные десятичные дроби) $\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}$ из равенства (4) определяют число x с точностью до $\varepsilon = \frac{1}{10^k}$ для любого k .

В дробях α_{2k-1} (дроби с недостатком) числа $\alpha_i, i \leq k$ не меняются с ростом k .

Аналогично определяется бесконечная разрядная дробь.

В отличие от цепной дроби разрядные дроби, представляющие рациональные числа, могут быть и бесконечными. Рассмотрим, например рациональные дроби в записи десятичных дробей:

$$\frac{1}{2} = 0,5 ; \quad \frac{1}{3} = 0,3333 \dots$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857 \dots \quad \frac{1}{9} = 0,111 \dots$$

Из этого примера видим, что рациональные дроби в десятичной записи изображаются либо конечными, либо бесконечными периодическими десятичными дробями.

Справедлива.

Теорема. Рациональное число представляется или конечной или бесконечной периодической десятичной дробью.

Доказательство.

Пусть $f = \frac{m}{n}$ есть рациональная дробь. Ее представление десятичной дробью получается в результате деления числа $m \cdot 10^n$

на n при целом все возрастающем N . При делении получаем последовательность остатков $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$ натуральных чисел, меньших n . Если один из остатков (z_k) равен нулю, то деление произошло нацело, дробь конечна. Если остаток z_p равен некоторому предыдущему остатку z_k , то деление повторится, и в десятичной дроби получаем п е р и о д, т.е. повторяющуюся группу цифр. Так как остаток z_k меньше n , то через конечное число делений придем или к нулевому остатку (конечная дробь) или к повторению остатков (бесконечная периодическая дробь).

Теорема доказана.

Конечную дробь можно рассматривать как периодическую с периодом, состоящим из цифры 0. Поэтому теорему можно сформулировать еще так:

Рациональное число представляется периодической десятичной дробью. Более общим образом можно утверждать: Рациональное число представляется периодической разрядной дробью.

Справедливо и обратное утверждение: Периодическая разрядная дробь есть рациональное число. Это утверждение мы докажем позже в разделе "геометрическая прогрессия".

Мы видим, что пользуясь десятичными дробями, рациональные числа тоже приходится выражать приближенно. Так вместо дроби $1/3$ ~~берут~~ берут ее недостаточные значения 0,33; 0,333 и т.д. (смотря по требуемой степени точности), или избыточные значения 0,34; 0,334 и т.д.

п.3. Последовательность Кантора.

Из теоремы предыдущего пункта следует, что иррациональные числа изображаются непериодическими десятичными дробями. Будем называть десятичной точкой точку, представляемую конечной де-

сятичной дробью.

Отрезок, концы которого являются десятичными точками, мы будем называть десятичным отрезком. Аналогично определяется разрядная точка, разрядный отрезок.

Тогда приближение иррационального числа бесконечной десятичной дробью можно геометрически истолковать, как построение последовательности десятичных отрезков, вложенных друг в друга, так что длина последующего ^{отрезка} интервала меньше предыдущего в 10 раз. Иррациональное число будет принадлежать всем этим ^{отрезкам} интервалам.

Аналогично, любое рациональное число (точку) можно заключить в последовательность вложенных друг в друга десятичных отрезков. В случае числа, представляемого конечной дробью, все отрезки, начиная с некоторого номера, вырождаются в точку. Аналогичное представление возможно для разрядных точек.

Теперь мы можем перейти к более общему понятию иррационального числа, следуя Кантору.

Рассмотрим две последовательности рациональных точек

$$\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \\ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} (6) \\ (6') \end{array}$$

$a_i \leq b_i$

Последовательностям (6) отвечает последовательность отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \dots, [a_n, b_n], \dots \quad (7)$$

Мы будем называть эти отрезки рациональными.

Последовательность рациональных отрезков (7) назовем последовательностью Кантора, если выполняются следующие требования:

I. Последующий отрезок $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ входит в предыдущий. Это означает, что выполняется условие

$$a_i \leq a_{i+1}, \quad b_{i+1} \leq b_i \quad (8)$$

В неравенствах (8) допустим только один знак равенства, например,

$$a_i = a_{i+1} \quad b_{i+1} < b_i$$

или

$$a_i < a_{i+1} \quad b_{i+1} = b_i$$

Случай $a_{i+1} = a_i \quad b_{i+1} = b_i$

возможен только тогда, когда $a_i = b_i$

2. Длина отрезка $[a_i, b_i]$ может быть сколь угодно мала, при i достаточно большом.

Иными словами: пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное рациональное число. Тогда для любого ε найдется натуральное число N_ε такое, что если

$$i \geq N_\varepsilon \quad (9)$$

$$\text{то} \quad b_i - a_i \leq \varepsilon \quad (10)$$

Поясним это на примере.

Рассмотрим пять десятичных отрезков, соответствующих десятичным дробям, приближающих $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-5} :

$$a_1 = 1,4; \quad a_2 = 1,41; \quad a_3 = 1,412; \quad a_4 = 1,4121;$$

$$a_5 = 1,41214;$$

$$b_1 = 1,5; \quad b_2 = 1,42; \quad b_3 = 1,413; \quad b_4 = 1,4122;$$

$$b_5 = 1,41215$$

Тогда, $\varepsilon = \frac{1}{10^5}$, $N_\varepsilon = 5$

Заметим, что методом оценок марков-
лампинского можно показать, что марков-
лампинский ~~метод~~ "справедлив" при
условии, что

$$a_i = b_i = a, \quad i = 1, \dots, n, \dots$$

тогда для марковлампинского оператора
имеет место

если мы найдем с a_1, b_1 \dots a_n, b_n \dots a_{n-1}, b_{n-1} \dots a_1, b_1
 Вообще, при приближении числа десятичными дробями, имеем

миллион $\epsilon = \frac{1}{10^m}$ $N\epsilon = m$

В наших конкретных примерах мы имели определенный алгоритм для построения последовательности Кантора (цепная дробь, двоичная, десятичная дробь). Этот алгоритм нетрудно было реализовать т.к. определяемые нами иррациональные числа удовлетворяли уравнениям типа $x^n = p$. Однако, существуют числа, которые не являются решениями какого-либо уравнения:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

с рациональными коэффициентами a_1, \dots, a_n

Таковыми числами, например, являются числа π, e . Поэтому требуется дать общее определение числа.

Определение: Число определяется рациональной последовательностью Кантора, т.е. последовательностью рациональных стягивающихся отрезков, удовлетворяющих условиям I, 2.

Построенные нами ранее приближения являются частными случаями последовательности Кантора.

Например: для $x = \sqrt{2}$ цепной дроби соответствует последовательность Кантора.

$$a_n = \frac{A_{2n}}{B_{2n}}, \quad b_n = \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}$$

Бесконечному десятичному числу.

$$x = 1, d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots \quad (0 \leq d_i < 10)$$

представляющему $\sqrt{2}$ соответствует последовательность отрезков Кантора

$$a_n = 1 + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n} = 1, d_1 \dots d_n$$

$$b_n = 1 + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_{n+1}}{10^n} = 1, d_1 \dots d_{n+1}$$

концы которых есть конечные десятичные дроби.

- ✓ Аналогичное справедливо для разрядных дробей. Таким образом, числа, представляемые десятичными дробями, представляются и последовательностями Кантора, т.е. определение чисел по Кантору является более широким.

Лекция № 4

Вещественные ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

На прошлой лекции мы определили понятие последовательности Кантора.

Последовательность Кантора обладает свойствами:

- 1) Каждый последующий отрезок содержится в предыдущем;
- 2) Длина отрезка может быть сделана меньше сколь угодно малого рационального числа $\varepsilon > 0$, если номер отрезка велик.

Всякая последовательность Кантора определяет вещественное число, рациональное или иррациональное.

Мы займемся теперь детальным анализом определения числа по Кантору.

п. I. Упорядочение чисел

Для любых двух рациональных чисел

$$z_1 = \frac{m_1}{n_1}, \quad z_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

мы всегда можем установить, какое из них является ¹большим, или же установить их равенство.

Считая для определенности n_1, n_2 натуральными числами, мы имеем:

$$z_2 > z_1, \text{ если } m_2 n_1 - n_2 m_1 > 0 \quad (I)$$

$$z_2 = z_1, \text{ если } m_2 n_1 = n_2 m_1 \quad (2)$$

Для рациональных чисел справедливо соотношение транзитивности.

всегда
линейно

Если

$$\downarrow z_1 < z_2, \quad z_2 < z_3 \quad (3)$$

то

$$z_1 < z_3 \quad (4)$$

Мы будем говорить, что множество рациональных чисел является упорядоченным. Является ли множество вещественных чисел, определенное последовательностями вложенных отрезков, упорядоченным? Пусть последовательность отрезков $\{a_n, b_n\}$

Аб

определяет число x , последовательность $\{c_n, d_n\}$ определяет число y .

Определение: $y > x$, если найдется такое натуральное число N что

$$b_i < c_N \quad (5)$$

для всех i ~~то~~ и меньших N :

$$i \geq N \quad (6)$$

Геометрически это означает, что начиная с номера $i = N$ последовательности $[a_i, b_i]$, $[c_i, d_i]$ отрезков, определяющих x , соответственно y , разойдутся, т.е. левые концы отрезков $[c_i, d_i]$ будут лежать правее правых концов отрезков $[a_i, b_i]$ (см. рис. I)



Рис. I.

Аналогично определяется соотношение $y < x$. В этом случае найдется такое N , что

$$d_i < a_N \quad (7)$$

для всех $i \geq N$ (см. рис. 2)

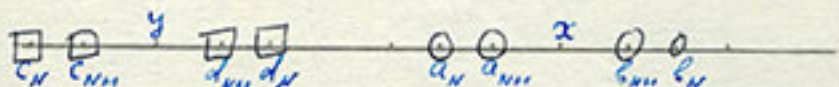


Рис. 2

Таким образом,

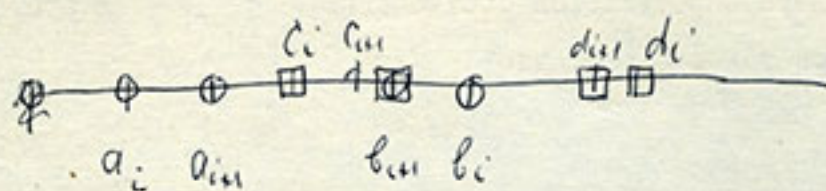
в случае $y > x$ или $y < x$ отрезки $([a_i, b_i])$, $([c_j, d_j])$ вначале могут перекрываться, но при достаточно большом номере $N: i \geq N, j \geq N$ последовательности отрезков разойдутся.

Можно сказать иначе: если $y \neq x$, то имеется рациональная точка z , разделяющая последовательности, т.е. начиная с некоторого номера, обе последовательности Кантора будут лежать по разные стороны от точки z .

Если не выполняются ^{ни} соотношения (5) ~~или (7)~~ ^{или соотношение} ~~или (7)~~, то, по определению, $y = x$. Последовательности $([a_i, b_i])$, $([c_i, d_i])$ представляют одно и то же число и называются в этом случае эквивалентными. Для эквивалентных последовательностей $(a_i, b_i), (c_i, d_i)$ не могут выполняться соотношения (5), (7).

Это означает, что выполняются условия

$$c_i \leq b_j, a_i \leq d_j, \quad i, j = 1 \dots n \dots \quad (8)$$



Пример 3.

пересечение отрезков $[a_i, b_i]$; $[c_i, d_i]$ состоит,
 тогда один из них не пересекает ни одного
 и другой. Если один из них
~~отрезок отрезка отрезка отрезка отрезка~~
 и пересекает другой. Следовательно,
 в каждом случае пересечение отрезков
 не пусто.

Если $b_i = c_i$ где $b_i = c_i$

или же

$a_i = d_i$ где $a_i = d_i$

то один из отрезков состоит
 из одной точки

$x \in [c_i, d_i]$

то есть $x \in [a_i, b_i]$ и $x \in [c_i, d_i]$ следовательно

то есть x принадлежит пересечению

этих отрезков. Следовательно, пересечение
 непусто. Если же $b_i < c_i$ или $a_i > d_i$
 то отрезки не пересекаются.

Таким образом, при любых номерах i, j отрезки $([a_i, b_i])$, $([c_j, d_j])$ переплетаются. *перекрываются (см. рис. 3)*

Ясно, что если в последовательности отрезков отбросить любое конечное число отрезков, то получим эквивалентную *последовательность*

Множество представлений одного числа различными эквивалентными последовательностями означает возможность получения числа с помощью различных алгоритмов. Так, применяя алгоритм исчерпывания, мы получили для $\sqrt{2}$ представление $\sqrt{2}$ цепной дробью.

Подходящие дроби

$$a_n = \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}}, \quad b_n = \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$$

представляют собой соответственно левые и правые концы отрезков, составляющих последовательность Кантора.

Применяя алгоритм дробления и взятия вилки мы получаем последовательность пар разрядных дробей x_{2n-1}, x_{2n} , которым также соответствует последовательность вложенных отрезков.

Укажем еще пример эквивалентных последовательностей.

Число $\frac{1}{3}$ определим следующей последовательностью Кантора:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0, & b_1 = \frac{1}{3} \\ a_2 = \frac{1}{6}, & b_2 = \frac{1}{3} \\ a_3 = \frac{1}{4}, & b_3 = \frac{1}{3} \\ a_4 = \frac{7}{24}, & b_4 = \frac{1}{3} \end{array}$$

т.е. левый конец каждого следующего отрезка является серединой крайнего правого отрезка, прилегающего к $\frac{1}{3}$, *приближаясь к нему*

Но теперь $1/3$ можно определить с помощью последовательности, которой соответствует бесконечная десятичная дробь.

$$\begin{array}{ll} c_1 = 0,3 & d_1 = 0,4 \\ c_2 = 0,33 & d_2 = 0,34 \\ c_3 = 0,333 & d_3 = 0,334 \end{array}$$

Эта последовательность приближает дробь с недостатком и с избытком к точке $1/3$ слева и справа.

Мы видим, что эта последовательность также изображает $1/3$.
Указанные последовательности эквивалентны.

п.2. Действия над числами.

Аз Так как числа определяются последовательностями отрезков, то действия над числами определяются с помощью действий над последовательностями. Начнем с определения сложения. Что такое сумма $x+y$, если числа x, y определены последовательностями $\{[a_i, b_i]\}$ соответственно $\{[c_i, d_i]\}$?

Определим новую последовательность отрезков

$$\begin{array}{l} \alpha_n = a_n + c_n \\ \beta_n = b_n + d_n \end{array} \quad (9)$$

Последовательность $\{\alpha_n, \beta_n\}$ будет последовательностью Кантора.

Действительно, складывая неравенства

$$a_n \leq b_n, \quad c_n \leq d_n \quad (10)$$

получаем

$$\alpha_n = a_n + b_n \leq \beta_n = b_n + d_n. \quad (II)$$

Из неравенства

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} & c_n &\leq c_{n+1} \\ b_n &\geq b_{n+1} & d_n &\geq d_{n+1} \end{aligned} \quad (I2)$$

следует

$$\begin{aligned} \alpha_n &= a_n + b_n \leq \alpha_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \\ \beta_n &= c_n + d_n \geq \beta_{n+1} = c_{n+1} + d_{n+1} \end{aligned} \quad (I3)$$

Таким образом, отрезок $[\alpha_n, \beta_n]$ вложен в отрезок $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$

Длина отрезка $[\alpha_n, \beta_n]$ может быть сделана сколь угодно малой. Действительно

$$\beta_n - \alpha_n = (b_n + d_n) - (a_n + c_n) = (b_n - a_n) + (d_n - c_n) \quad (I4)$$

интервал

а выражения, стоящие в скобках, могут быть сделаны сколь угодно малыми при достаточно больших n , как длины ~~интервалов~~ $([a_n, b_n])$, $([c_n, d_n])$.

Итак, $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ является последовательностью отрезков Кантора. Следовательно, последовательность $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ определяет число. ~~тоже~~ $x+y$.

см 69

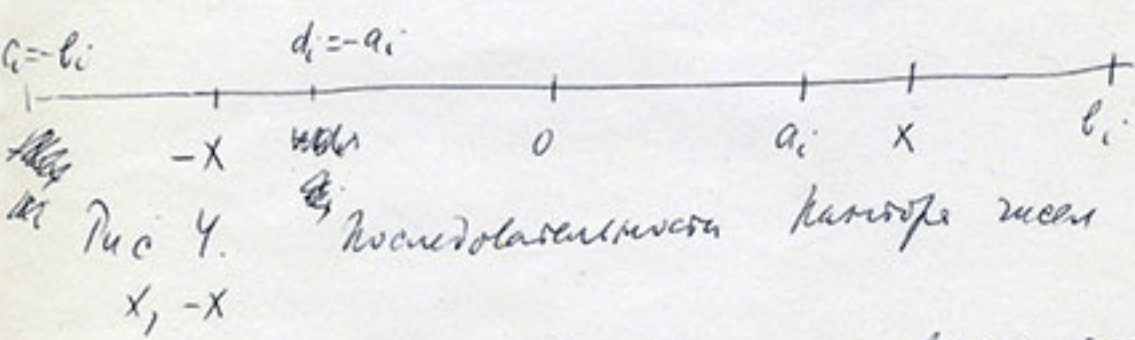
Как определить разность двух чисел x, y , определяемых с помощью последовательностей Кантора? Аналогично тому, как это делалось для суммы $x+y$, мы должны построить последовательность Кантора



Если $x > 0$ определяем x принадлежность к интервалу $[a_n, b_n]$, то $-x < 0$ ~~определяет~~ принадлежность к интервалу $[c_n, d_n]$, где $c_n = -b_n, d_n = -a_n$

~~Значит, если x принадлежит интервалу $[a_n, b_n]$, то $-x$ принадлежит интервалу $[c_n, d_n]$.~~

Если $x \in [a_n, b_n]$, то $-x \in [c_n, d_n]$ ~~или $-x \in [-b_n, -a_n]$~~ ~~или $-x \in [-b_n, -a_n]$~~
 т. е. $-x \in [-b_n, -a_n]$ ~~или $-x \in [-b_n, -a_n]$~~
 Отсюда следует $-x = [-b_i, -a_i]$ (15)



Отсюда следует, что если x принадлежит интервалу $[a_i, b_i]$, то $-x$ принадлежит интервалу $[-b_i, -a_i]$, и наоборот.

$a_i + b_i = 0, c_i + d_i = 0$ ~~или $-a_i = b_i, -b_i = a_i$~~
 $[0, 0]$ определяет число 0 и если $[c_i, d_i]$ определяет y , то $y = -x$.

Рассмотрим для определенности случай, когда $y > x$
Образуем последовательность

$$\alpha_n = c_n - b_n, \quad \beta_n = d_n - a_n \quad (15)$$

Докажем, что последовательность $\{\alpha_n, \beta_n\}$ есть последовательность Кантора.

Из равенства (15) следует:

$$\beta_n - \alpha_n = (d_n - c_n) + (b_n - a_n) \geq 0 \quad (16)$$

$$\alpha_n \leq \beta_n$$

Таким образом, α_n есть левый, β_n есть правый концы отрезка $([\alpha_n, \beta_n])$.

Из неравенств (12) следует

$$\alpha_n \leq \alpha_{n+1}, \quad \beta_n \geq \beta_{n+1} \quad (17)$$

т.е. отрезок $([\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}])$ вложен в отрезок $([\alpha_n, \beta_n])$

Длина отрезка $([\alpha_n, \beta_n])$ может быть сделана сколь угодно малой. Действительно,

$$\beta_n - \alpha_n = (d_n - a_n) - (c_n - b_n) = (b_n - a_n) + (d_n - c_n) \quad (18)$$

а выражения, стоящие в скобках, могут быть сделаны сколь угодно малыми при достаточно больших n как длины интервалов (a_n, b_n) , (c_n, d_n) .

Произведение определяется аналогичным образом.

Для определенности рассмотрим случай $x > 0, y > 0$
Последовательность $\{\alpha_n, \beta_n\}$, где $\alpha_n = a_n c_n, \beta_n = b_n d_n$ есть канторовская последовательность, она определяет число xy .

Здесь
минус

номе отворено множество
 первого глук $y-x$. Если
 мы заменим y на $y+(-x)$,
 то $x \in \text{int}([a_i, b_i])$,
 $y \in \text{int}([c_i, d_i])$. Тогда x и y
 $-x \in \text{int}([-b_i, -a_i])$, а y
 $y-x \in \text{int}([c_i - b_i, d_i - a_i])$. (16)

определено, пусть $x \in [a_i, b_i]$, $y \in [c_i, d_i]$, то
 в определении,
 $xy \in [a_i c_i, b_i d_i]$ (17)

предположим, что $x > 0$, то
 $[a_i c_i, b_i d_i]$ есть н.к. $\text{int}([a_i, b_i])$,
 $\text{int}([c_i, d_i])$ $\text{int}([a_i, b_i])$.
 Пусть $x \in [a_i, b_i]$, $y \in [c_i, d_i]$

Тогда при $a_i > 0$ $\text{int}([a_i, b_i])$ $\text{int}([c_i, d_i])$
 $\text{int}([a_i, b_i])$ $\text{int}([c_i, d_i])$ $\text{int}([a_i, b_i])$
 определено, что $\text{int}([a_i, b_i])$ $\text{int}([c_i, d_i])$
 $\text{int}([a_i, b_i])$ $\text{int}([c_i, d_i])$ $\text{int}([a_i, b_i])$

$\frac{1}{x} \in \text{int}([\frac{1}{b_i}, \frac{1}{a_i}])$ (18)
 тогда $\frac{1}{x} \in \text{int}([\frac{1}{b_i}, \frac{1}{a_i}])$ $\frac{1}{x} \in \text{int}([\frac{1}{b_i}, \frac{1}{a_i}])$
 (см. 7a)

Для определения частного $\frac{y}{x}$, $x \neq 0$ также строим последовательность Кантора $\{\alpha_n, \beta_n\}$. Для случая положительных x, y α_n, β_n определяем следующим образом:

$$\alpha_n = \frac{c_n}{b_n}, \quad \beta_n = \frac{d_n}{a_n}$$

~~Последовательность $\{\alpha_n, \beta_n\}$ образует последовательность Кантора. Это можно показать аналогично предыдущему.~~

Мы умеем, зная исходные последовательности, которые определяют числа x, y , строить последовательности, которые соответствуют сумме, разности, произведению и частному чисел x, y .

Так как представление чисел последовательностями отрезков не является однозначным, мы должны оправдать указанный нами алгоритм действия над последовательностями. Для этого мы должны доказать, что действия над эквивалентными последовательностями вновь приводят к эквивалентным. Докажем это для простейшей операции - сложения.

Пусть ~~$\{a_n, b_n\}$ и $\{A_n, B_n\}$ определяются двумя эквивалентными последовательностями~~ $\{a_n, b_n\}$, $\{A_n, B_n\}$, y определяется другими двумя эквивалентными последовательностями

$$\begin{aligned} x &\sim \{a_n, b_n\} \sim \{A_n, B_n\} \\ y &\sim \{c_n, d_n\} \sim \{C_n, D_n\} \end{aligned} \quad (20)$$

Докажем, что последовательности

$$\begin{aligned} \{\alpha_n, \beta_n\}, \quad \alpha_n &= a_n + c_n, \quad \beta_n = b_n + d_n \\ \{\delta_n, \omega_n\}, \quad \delta_n &= A_n + C_n, \quad \omega_n = B_n + D_n \end{aligned} \quad (21)$$

являются эквивалентными:

$$\{\alpha_n, \beta_n\} \sim \{\delta_n, \omega_n\} \quad (22)$$

Предположим, что x, y являются положительными числами. Тогда α_n, β_n определяются следующим образом:

Предположим, что $\{ \alpha_n, \beta_n \} \subset W$, $W \neq Z$, $W > W$

тогда



$\{ \delta_n, \omega_n \} \subset Z$ (23)

Предположим, что $\{ \delta_n, \omega_n \} \subset Z$, $W > W$

(24)

n

Предположим противное. Пусть $\{a_n, b_n\}, \{c_n, d_n\}$ не эквивалентны и определяют числа w, z и $w+z$.

Соответственно:

$w = \sup \{a_n, b_n\}$ определяет w , $z = \sup \{c_n, d_n\}$ определяет z .

Пусть для определенности $z > w$. Тогда, при $n > N$ справедливо соотношение:

$$b_n = b_n + d_n < b_n = a_n + c_n \quad (25) / (20)$$

По условию (8) эквивалентности последовательностей $\{a_n, b_n\}, \{c_n, d_n\}$ для любых n и m

$$b_n \geq a_m \quad (26) / (21)$$

Аналогично,

$$a_n \geq c_m \quad (27) / (21)$$

Складывая неравенства $(26), (27)$ и полагая $m = n$ получаем

$$b_n + d_n \geq a_n + c_n \quad (28) / (22)$$

Неравенство (28) противоречит неравенству (20) . (25)

Утверждение доказано.

Мы доказали единственность результата сложения. Аналогично

доказывается единственность остальных операций.

h.3. *Пациентальные последовательности.*
Определение числа с помощью последовательности вложенных отрезков является более общим, чем определение числа с помощью десятичных дробей. Это определение является более общим по форме, но не по содержанию.

Будет от нас, 200
Урагуны наводнения вондламентовт апартамент
ландс секторные и монеты вонд
вондламентовт, сани генерал вонд
се вонд вондламентовт вонд
вонд вондламентовт, 200 мн вондламентовт
вонд вондламентовт не вонд
вондламентовт, а вонд вондламентовт

Мы покажем далее, что определяя число с помощью десятичной дроби и последовательности вложенных отрезков, мы придем к одному и тому же результату. Однако, более общее определение становится полезным при теоретических исследованиях.

Введем ряд понятий.

Определение. Совокупность рациональных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ занумерованных ^{целыми} натуральными числами, будем называть рациональной последовательностью и обозначать символом $\{a_n\}$

Рациональную последовательность $\{a_n\}$ будем называть ограниченной, если существует два рациональных числа a, b такие, что

$$a \leq a_n \leq b \quad (1)$$

для всех n .

Последовательность $\{a_i\}$ будем называть монотонно возрастающей, если

$$a_i < a_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

монотонно неубывающей, если

$$a_i \leq a_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

монотонно убывающей, если

$$a_{i+1} < a_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

монотонно невозрастающей, если

$$a_{i+1} \leq a_i \quad (5)$$

Любую из 4-х указанных последовательностей мы будем называть просто монотонной, ~~или~~ последовательностью (2), (4) — отсюда можно вывести.

Примеры

1. Натуральный ряд чисел $1, 2, \dots, n, \dots$ образует монотонно возрастающую неограниченную последовательность.

2. Совокупность (множество) положительных рациональных чисел образует неограниченную последовательность.

Рассмотрим числа $z = \frac{m}{n}$,
 (m, n) - натуральные

Расположим числа z в определенном порядке, упорядочивая по сумме $s = m + n$

$$a_1 = \frac{1}{1} \quad s = 2$$

$$a_2 = \frac{2}{1} \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad s = 3$$

$$a_4 = \frac{3}{1} \quad a_5 = \frac{2}{2} \quad a_6 = \frac{1}{3} \quad s = 4$$

$$a_7 = \frac{4}{1} \quad a_8 = \frac{3}{2} \quad a_9 = \frac{2}{3} \quad a_{10} = \frac{1}{4} \quad s = 5$$

и т. д.

Мы получили последовательность, которая дает все положительные рациональные числа и является, следовательно, неограниченной.

Введем понятие точки сгущения. Точка x называется точкой сгущения последовательности $\{a_n\}$, если в любом рациональном отрезке $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное рациональное число, так что имеется бесконечно много точек последовательности рациональных чисел $\{a_n\}$ *справедливо*

Справедлива теорема 1: Ограниченная последовательность имеет точку сгущения.

Доказательство

Для доказательства вышеуказанного утверждения будем строить Канторовскую последовательность.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, т.е., по определению выполняется соотношение (1)

где a, b - некоторые рациональные числа.

Положим

$$a_1 = a, \quad b_1 = b$$

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам. По крайней мере, один из двух ~~положительных~~ ^{вышних} отрезков содержит бесконечно много точек последовательности. Действительно, если бы каждый отрезок содержал конечное число точек последовательности, то последовательность содержала бы конечное число точек, т.е. была бы конечной. Это противоречит условию. *до предположения*

Предположим, что ~~правый~~ ^{левый} отрезок содержит бесконечно много точек последовательности, ~~запишем его~~ ^{запишем} $[a_2, b_2]$. Отрезок $[a_2, b_2]$ содержится внутри отрезка $[a_1, b_1]$ и обладает тем свойством, что в нем бесконечно много точек последовательности. Делим пополам отрезок $[a_2, b_2]$. Отрезок, содержащий бесконечно много точек последовательности, обозначим $[a_3, b_3]$ и т.д.

Построенные ~~отрезки~~ ^{интервалы} $[a_i, b_i]$ представляют последовательность Кантора, так как это есть последовательность вложенных рациональных отрезков, длина которых ~~становится~~ ^{становится} сколь угодно малой при достаточно больших i .

[illegible]

Замечание, что
 Если $[a, b]$ - единичный отрезок $[m, m+1]$, то эта конструкция деления отрезков пополам является аналогом бесконечной двоичной дроби $m, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$

По определению последовательность Кантора определяет некоторое число x . Эта точка x и является точкой сгущения последовательности.

Это нетрудно доказать.

Зададимся $\varepsilon > 0$ и построим отрезок $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, содержащий точку x . В этот отрезок обязательно попадет какой-то отрезок нашей канторовской последовательности.

Действительно, если отрезок $[a, b] = [a_1, b_1]$ имеет длину ℓ то $[a_1, b_1]$ имеет длину $\frac{\ell}{2}$. $[a_n, b_n]$ имеет длину $\frac{\ell}{2^n}$. Если N таково, что $\frac{\ell}{2^N} \leq \varepsilon$, то отрезок $[a_N, b_N]$ попадает в отрезок $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$. Но в $([a_N, b_N])$ содержится бесконечно много точек последовательности $\{x_k\}$. Следовательно, в выбранном отрезке $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ содержится бесконечно много точек последовательности $\{x_k\}$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такой номер n что отрезок $[a_n, b_n]$ войдет в отрезок $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$.

Точка x есть точка сгущения. Теорема доказана.

Обратим внимание на следующее обстоятельство.

Не всякая последовательность имеет точку сгущения.

Например, последовательность натуральных чисел не имеет точки сгущения. Последовательность натуральных чисел неограничена. В нашей формулировке важно требование ограниченности.

Если, то ~~и наоборот~~ формулировка.

используем

ки будут готовы, 250 тысяч
расходных тал. вместо в количестве
всех беззачетных тал.

Имеет ли ограниченная последовательность одну или больше точек сгущения?

Мы видели, что множество рациональных точек образует некоторую последовательность, поскольку рациональные точки можно перенумеровать.

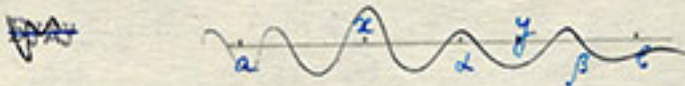
Если мы рассмотрим ~~какое-то~~ ^{произвольное} подмножество рациональных чисел, содержащееся в ^{любом} ~~некотором~~ отрезке $[a, b]$, то любая точка отрезка является точкой сгущения, поскольку мы видели, что любая рациональная точка может быть представлена посредством последовательности Кантора.

В случае множества рациональных точек на отрезке $[a, b]$ мы имеем бесконечно много точек сгущения.

Нам надо уметь выделить случаи, когда последовательность имеет единственную точку сгущения. Справедлива ~~теорема~~

Теорема: Ограниченная монотонная последовательность имеет единственную точку сгущения.

Для простоты рассмотрим конкретный случай. Пусть $\{a_i\}$ $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1}$ монотонно возрастающая ограниченная последовательность. $\{a_i\} : a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq$ $[a, b]$ внутри которого содержится наша последовательность: $a \leq a_i \leq b$.



Будучи ограниченной, последовательность $\{a_i\}$ имеет точку сгущения. Покажем, что она единственная.

Предположим, что имеются две точки сгущения x, y и пусть для определенности $y > x$. Заклучаем точку y в некоторый рациональный отрезок $[d, \beta]$, не содержащий точку x

По определению точки сгущения в отрезке $[d, \beta]$ будет находиться бесконечно много точек последовательности $\{a_i\}$. Пусть a_n лежит в отрезке $[d, \beta]$. Все члены, начиная с a_n будут находиться правее d : $a_i \geq d \quad i = n, n+1, \dots$

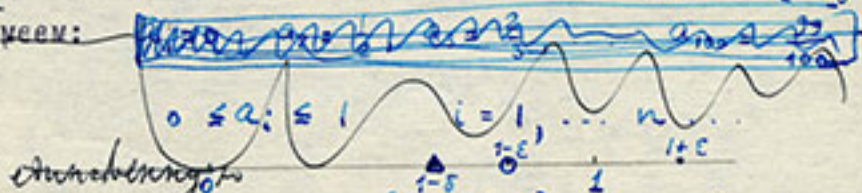
Так как $\{a_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность, то значит, начиная с некоторого номера, все точки будут справа от d . Но точка x расположена левее d , в окрестности точки x конечное число точек, \therefore точка x не может быть точкой сгущения.

Итак, в случае монотонной ограниченной последовательности существует единственная точка сгущения. Какими свойствами обладает точка сгущения? Пример.

Рассмотрим последовательность чисел

$$a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эта последовательность будет ограниченной монотонно возрастающей последовательностью, заключенной в отрезке $[0, 1]$, так что имеем:



Какой бы отрезок $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ мы ни взяли, в нем будет бесконечно много точек нашей последовательности $\{a_i\}$.

Никакая другая точка не может быть точкой сгущения. Рассмотрим точку $1-\delta$, $0 < \delta < 1$. Возьмем отрезок $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ ($\varepsilon < \delta$). Левый конец его лежит правее выбранной нами точки $1-\delta$. Вне отрезка $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ конечное число точек и, следовательно, выбранная точка $1-\delta$ не может быть точкой сгущения.

Нужен ли пример?

единственной точкой сгущения $a=1$

Метрика 3

Следствие. Если ограниченная последовательность имеет единственную точку сгущения x , то в этом случае в любом отрезке $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ содержатся все члены последовательности, за исключением конечного числа их.

Действительно, предположим, что это не так, и что имеется бесконечно много точек ~~вне~~ на отрезке $[a, b]$ вне отрезка $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ (см. рис.).



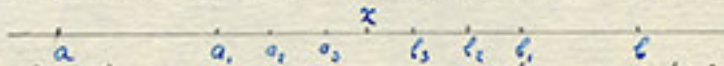
В этом случае мы можем найти $[x+\varepsilon, b]$ ^{или отрезок [a, x-ε]} ~~содержит~~ ^{содержит} бесконечно много точек последовательности. Тогда, построив последовательность Кантора, найдем вторую точку сгущения $y \neq x$, что противоречит нашему предположению о единственной точке сгущения на отрезке $[a, b]$.

Если последовательность имеет единственную точку сгущения, то будем называть ~~ее предельной точкой~~ ^{эту точку} предельной точкой. ~~а последовательность~~ ^{предельная} ~~сходящаяся к x~~ ^{предельная}. Предельная точка, это такая точка, что в любом отрезке $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ содержатся все точки последовательности, начиная с некоторого $n = N_\varepsilon$. Последовательность, имеющую единственную точку сгущения, мы будем называть сходящейся.

Теорема 3 ^{мы хотим} ~~монотонная~~ ^{монотонная} ограниченная последовательность сходится, ^{то} ~~то~~ ^{то} это эквивалентно тому, что она имеет единственную точку сгущения.

Не ~~каждая~~ ^{всегда, следовательно} последовательность является монотонной.

Вспомним, как ~~мы~~ ^{мы} получили монотонные последовательности.



Определим ^{мы} ~~точку~~ ^{точку} x с помощью последовательности Кантора. ^{интервалов} ~~Левые концы~~ ^{Левые концы} a_1, a_2, \dots, a_n ^{монотонно не убывающую} последовательность,

Правые концы ^{отрезков} интервалов $b_1 > b_2 > \dots$ - монотонно не возрастающая последовательность.

Рассмотрим такую последовательность $\{a_n\}$:

$$\begin{array}{lll} d_1 = a_1 & d_2 = b_1 & \\ d_3 = a_2 & d_4 = b_2 & d_{2k-1} = a_k \\ d_5 = a_3 & d_6 = b_3 & d_{2k} = b_k \end{array} \quad (6)$$

которая содержит как левые, так и правые концы интервалов, занумерованные в одном порядке.

Эта последовательность не является монотонной, тем не менее она имеет единственную точку сгущения.

Введем важное понятие фундаментальной последовательности.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если она обладает следующим свойством: ^{какое бы ни было} рациональное число $\varepsilon > 0$, найдется такое N_ε , что если числа $m, n \geq N_\varepsilon$, то $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
 Что это означает геометрически?

Если ^{мы} изображать точками члены нашей последовательности, тогда $|a_n - a_m|$ ^{означает расстояние} есть расстояние между точками a_n, a_m .
 Условие фундаментальной последовательности означает, что с ростом номеров расстояния между точками последовательности уменьшаются и могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Пример 1. $a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots$

Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ является фундаментальной.

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

является фундаментальной

Возьмем два числа a_n, a_m , $n > m$

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad a_m = 1 - \frac{1}{m}, \quad n > m \quad (10)$$

и приведем их к общему знаменателю:

$$a_n - a_m = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \quad (11)$$

Оценим ^{мал} эту разность, найдем:

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{m} \quad (12)$$

Зададимся каким-то малым рациональным $\varepsilon > 0$. Какое нужно выбрать N , чтобы $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$?

Нетрудно видеть, что в нашем примере $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$.

Итак, мы видим, что какое бы малое рациональное число ε ни взяли, найдется такой номер, что при номерах больше этого разность между числами последовательности меньше ε .

Итак, мы показали, что наша монотонная последовательность (9) является фундаментальной.

Лекция 5.

н.л. - ~~это~~

Универсальный признак сгущения
~~признак сгущения~~ по Насибишвили

кб

На прошлой лекции мы ввели понятие фундаментальной последовательности.

Справедлива

Теорема 1: Фундаментальная последовательность имеет единственную точку сгущения.

Доказательство

Вначале докажем, что фундаментальная последовательность является ограниченной. Зададимся произвольным рациональным $\varepsilon > 0$ и определим для него натуральное число $N = N(\varepsilon)$

и заключим точку a_n в отрезок $[a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]$

α a b $a_n - \varepsilon$ a_n $a_n + \varepsilon$ β
 находится такое $N = N(\varepsilon)$, что

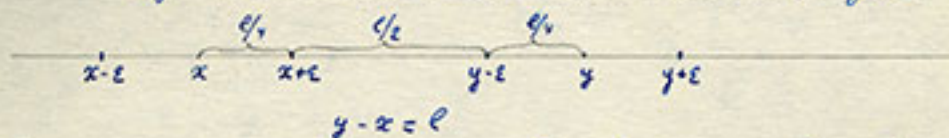
По определению фундаментальной последовательности, для всех точек последовательности, номера которых $n, n \geq N$ мы имеем $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$, т.е. точки отстоят одна от другой на расстояние не больше ε .

Когда $n \geq N$, a_n лежит в отрезке $[a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]$, точки a_1, \dots, a_{n-1} возможно не лежат в этом отрезке, но так как их конечное число, то они лежат в каком-то другом отрезке $[a, b]$.

Ясно, что можно построить отрезок $[a, b]$, содержащий все члены последовательности.

Значит, мы доказали, что фундаментальная последовательность является ограниченной. Как всякая ограниченная последовательность, она имеет точку сгущения. Остается доказать, что имеется единственная точка сгущения.

Предположим, что имеется две точки сгущения. Обозначим их x, y . Для определенности ^{положим} будем полагать, $y > x$ (см. рис.)



Положим ε ε ε

Обозначим длину отрезка $[x, y]$ через ℓ и возьмем $\varepsilon = \frac{\ell}{4}$.

Так как точки x и y , по предположению, являются точками сгущения, то по определению, в каждом из отрезков $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, $[y-\varepsilon, y+\varepsilon]$ содержится бесконечно много точек последовательности $\{a_n\}$, т.е. содержатся члены последовательности сколь угодно большими номерами.

Положим $\delta = \frac{\ell}{2}$ и по этому δ найдем N_δ такое, что $|a_n - a_m| \leq \delta$ как только $n, m \geq N_\delta$

Это возможно, по определению фундаментальной последовательности.

Так как точка x является точкой сгущения, то в отрезке $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ найдется точка a_n с номером $n \geq N_\varepsilon$

В силу того, что y является также точкой сгущения, в отрезке $[y-\varepsilon, y+\varepsilon]$ найдется точка a_m с номером $m \geq N_\varepsilon$. По условию фундаментальности последовательности, точки a_n, a_m должны быть на расстоянии не больше $\frac{\ell}{2}$, $|a_n - a_m| \leq \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2}$. Но этого быть не может, поскольку точки a_n, a_m лежат в разных отрезках $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ и $[y-\varepsilon, y+\varepsilon]$, расстояние между ближайшими концами которых равно $\frac{\ell}{2}$ (см. рис.).

Мы пришли к противоречию. Оно возникло из-за предположения, что имеются две точки сгущения. Следовательно, это предположение неверно, имеется единственная точка сгущения α 2. и т.д. Разберемся в чем дело.

А } Другой признак ~~тоже~~ имеет название
 универсального признака - сходности. или
~~признака Коуши~~ Впервые он был сформулирован
 ирландцем и доказан французским математиком
 Коуши.

Б } 1.2 Значительность определения также
 с помощью различных работ, а
 последовательности ~~каждой~~ сформулировал
 ирландец. и ~~функциональные последовательности~~
~~свой~~

В } монотонно не убывающая последовательность
 $\{a_i\}$ и \inf , монотонно убывающая
 имеет максимум. не убывающая
 последовательность $\{b_i\}$.

✍

и означает, что последовательность $\{a_n\}$ имеет
А это есть определение фундаментальной последовательности.

Итак, мы доказали теорему:

Для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела единственную точку сгущения необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной.

Тогда говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к точке x , а точку x называют предельной точкой последовательности $\{a_n\}$. Иными словами:

Для того чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы последовательность была фундаментальной.

Этот признак сходимости носит название признака Коши. По имени математика, впервые его сформулировал.

Вернемся теперь к вопросу об эквивалентности определений числа с помощью бесконечных разрядных дробей и произвольной последовательности Кантора.

Пусть число x определяется последовательностью стягивающихся отрезков $\{[a_i, b_i]\}$

Покажем, что x можно определить с помощью десятичных дробей. x является предельной точкой

Каждая из монотонных последовательностей $\{a_i\}, \{b_i\}$ имеет точку сгущения. Точка x является точкой сгущения левых концов, а также точкой сгущения правых концов.

Рассмотрим последовательность $\{d_k\}$, которая определяется как левыми, так и правыми концами отрезков:

$$d_{2k+1} = a_k \quad d_{2k} = b_k$$

Последовательность $\{x_k\}$ не является монотонной последовательностью, но она является фундаментальной. ^{это следует из свойства} ~~и имеет предел~~ последовательности вложенных отрезков. Она также имеет единственную точку сгущения и этой точкой сгущения является точка x .

Число x это есть точка сгущения последовательности, состоящей из левых и правых концов вложенных отрезков.

Заклучим x в отрезке $n \leq x \leq n+1$, где $n, n+1$ целые числа, ближайшие к x .

Если x целое число, то ^{т.е. доказано} ~~целое число является десятичной дробью.~~

Разделим отрезок $[n, n+1]$ на десять равных частей. Каждая точка ^{делится} ~~является~~ концом отрезка, есть десятичная точка.

Среди этих отрезков ^{делится} ~~имеется~~ один, в котором находится бесконечно много точек нашей последовательности $\{x_k\}$ и ^{каждый} ~~каждый~~ x_k .

Никакой другой отрезок таким свойством не обладает. Если бы имелся другой такой отрезок, то имели бы еще одну точку сгущения, но ^{это невозможно, так как $\{x_k\}$ —} ~~наша~~ последовательность фундаментальная и, следовательно, имеет единственную точку сгущения.

Выбранный отрезок снова делим на десять равных частей и выбираем отрезок, в котором находится бесконечно много точек нашей последовательности и т.д.

Мы получили последовательность десятичных отрезков, вложенных друг в друга. Эта последовательность будет определять число x . Таким образом, определение числа с помощью последовательности десятичных дробей и определение с помощью последовательности Кантора эквивалентны.

Определение Δ функции минимальной
последовательности $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ элементарной,
если они

Аналогия

✓ Определим число x , заданное Канторовской последовательностью, с помощью двоичных дробей.

Отрезок $[n, n+1]$ делим пополам, в одном из полученных отрезков - бесконечное число точек последовательности. Этот отрезок делим пополам и снова выбираем отрезок, содержащий бесконечное число точек последовательности, этот отрезок делим пополам и т.д. Получаем отрезки, концам которых соответствуют двоичные дроби. Аналогично ранее рассмотренному мы получаем, что число, заданное последовательностью Кантора, может быть определено с помощью ~~двоичных дробей~~ двоичных дробей.

Доказав эквивалентность определений числа с помощью произвольной последовательности Кантора и бесконечной разрядной дроби мы попутно доказали эквивалентность определений числа с помощью различных дробей.

п.3. Определение числа с помощью фундаментальной последовательности

Еще более гибким является определение числа с помощью рациональной фундаментальной последовательности. Справедлива Теорема: Рациональная фундаментальная последовательность определяет число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{a_i\}$ - фундаментальная (рациональная) последовательность. Как фундаментальная, она ограничена и может быть заключена в некотором рациональном отрезке $[a, b]$:

$$a \leq a_i \leq b$$

Тогда строя обычным образом последовательность половинных отрезков $\{[a_i, b_i]\}$, мы получим рациональную последовательность Кантора $\{[a_i, b_i]\}$, которая определяет точку x . Эта точка x является предельной точкой x последовательности $\{a_i\}$. Утверждение доказано. Две фундаментальные последовательности $\{a_i\}, \{b_i\}$ эквивалентны, если они определяют одну и ту же точку.

Абзац

Вот, что конструируется и как определяется число с помощью Канторовской последовательности

определяют

являют одно и то же число, т.е. имеют одну и ту же точку сгущения.

приведены к виду

Рассмотрим последовательность $\{c_i\}$, являющуюся объединением последовательностей $\{a_i\}, \{b_i\}$:

$$c_{2i-1} = a_i, \quad c_{2i} = b_i$$

Справедливо утверждение:

Фундаментальные последовательности $\{a_i\}, \{b_i\}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их объединение - последовательность $\{c_i\}$ - фундаментальна.

Предлагается читателю доказать это утверждение

В силу этого утверждения (предлагаем читателю доказать его самостоятельно) можно дать следующее определение вещественного числа: Вещественное число есть совокупность (класс) эквивалентных рациональных фундаментальных последовательностей.

Предоставим читателю доказать, что действия над эквивалентными фундаментальными последовательностями вновь приводят к эквивалентным фундаментальным последовательностям.

До сих пор мы рассматривали рациональные последовательности, в частности, рациональные фундаментальные последовательности.

Перейдем к произвольным последовательностям вещественных чисел.

Прежде всего, как определяется расстояние между вещественными числами x, y . Пусть x определяется рациональной канторовской последовательностью $\{[a_i, b_i]\}$, y - последовательностью $\{[c_i, d_i]\}$ и пусть, для определенности, $y > x$. Тогда рациональная канторовская последовательность

$$\{[\alpha_i, \beta_i]\}, \quad \alpha_i = c_i - b_i, \quad \beta_i = d_i - a_i$$

определяет число $p = y - x = |y - x| = |x - y|$, которое и есть расстояние между x, y : $p = y - x = |y - x| = |x - y| = p(x, y)$

доказательство

доказательство

Равенство

Поскольку мы знаем определенное расстояние
между приблизительным действительным
толщиной, а основные характеристики
толщина последовательности определяется
при расстоянии, ~~то~~ то же расстояние
или или определенная перемещается
без изменения на приблизительное
последовательности действительных чисел

Пусть $\{a_i\}$ — фундаментальная последовательность произвольных вещественных чисел, тогда по определению, ~~каждому~~ $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что: $\rho(a_i, a_j) = |a_i - a_j| \leq N(\varepsilon)$, $i, j > N(\varepsilon)$

Из свойства множества рациональных чисел
 \forall в каждом отрезке с концами a_i, a_{i+1} имеется рациональное число b_i , или же $a_{i+1} < a_i$

или $a_i \leq b_i \leq a_{i+1}$ или $a_{i+1} \leq b_i \leq a_i$

Нетрудно видеть, что рациональная последовательность $\{b_i\}$ является фундаментальной \forall определяет ~~некоторое~~ число α , которое является предельной точкой не только для последовательности $\{b_i\}$, но и для последовательности $\{a_i\}$.

Таким образом, произвольной фундаментальной последовательности можно поставить в соответствие эквивалентную рациональную фундаментальную последовательность. Иными словами: предельная точка произвольной фундаментальной последовательности является предельной точкой некоторой рациональной фундаментальной последовательности. иными словами:

Мы определили вещественные числа (рациональные и иррациональные) как предельные точки рациональных фундаментальных последовательностей. Таким образом, множество вещественных чисел получается присоединением к рациональным числам предельных точек рациональных фундаментальных последовательностей. Присоединяя к множеству вещественных чисел предельные точки произволь-

ных фундаментальных последовательностей, мы не выйдем из множества вещественных чисел. Это свойство вещественных чисел называется **плотностью**.

Мы видим, что плотность вещественных чисел является следствием того, что рациональные числа являются всюду плотными в себе и в множестве вещественных чисел. В частности из свойства пол-

ноты следует, что произвольная канторовская последовательность $\{a_n\}$ ~~вспомогательных~~ ^{вспомогательных} ~~вещественных~~ ^{вещественных} ~~чисел~~ ^{чисел},
определяет вещественное число.

Лекция 6

Предыдущие лекции были посвящены теории вещественного числа.

Первые попытки дать строгое определение числа указали на то, что мы не можем обойтись без понятия последовательности.

Число мы определили с помощью последовательности рациональных чисел. Потом мы показали, что число можно определить и с помощью произвольной последовательности вещественных чисел.

Решим ряд конкретных задач, в которых применяются понятия точки сгущения, предельной точки ~~и т.д.~~ ^{и сходимости}.

Возьмем число: $0 < q < 1$, и рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, $a_n = q^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (1)

Определим свойства этой последовательности.

1. ~~Наша~~ Последовательность ^{$\{a_n\}$} ограничена. Действительно, так как $q < 1$, то и любая положительная целая степень q меньше единицы:

$$0 < a_n = q^n < 1, \quad n \geq 1$$

(2) (3)

т.е. все члены последовательности удовлетворяют неравенству

$$0 < a_n \leq 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(3)

2. $\{a_n\}$ — монотонно убывающая последовательность.

Была доказана теорема о том, что ограниченная монотонная последовательность имеет предельную точку.

Покажем, что для нашей последовательности предельной является точка $x=0$

Нам потребуется следующее свойство пределов:

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет некоторый предел x , то последовательность $\{qa_n\}$ имеет предел qx .

Пусть $\{a_n\}$ имеет предел x .

Тогда последовательность $\{b_n\} = \{qa_n\}$ имеет предел qx .

Последовательности $\{a_n\}, \{b_n\}$, если отбросить первый член в последовательности $\{b_n\}$, совпадают и имеют общий предел x . Тогда имеем

$$qx = x, \quad (q-1)x = 0 \quad (4)$$

и так как $q-1 \neq 0, x=0$ ч.т.д.

Дадим второе доказательство, что точка $x=0$ является предельной. Предположим противное, что предельная точка x положительна: $x > 0$.

Выберем ε из условия, что число, полученное в результате умножения $x+\varepsilon$ на q , стало левее числа $x-\varepsilon$.

$$(x+\varepsilon)q < x-\varepsilon \quad \text{или} \quad xq + \varepsilon q < x - \varepsilon \quad (5')$$

Прибавим к обеим частям неравенства (5') ε :

$$xq + \varepsilon q + \varepsilon < x \quad (6)$$

Вычтем из обеих частей неравенства (6) xq

$$\varepsilon q + \varepsilon < x - xq \quad (7)$$

на доказательство
предельной
точки $x=0$

нужно ли?

Отсюда найдем значение ε :

$$\varepsilon < \frac{x(1-q)}{1+q} \quad (8)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию (8), и a_n - некоторый член последовательности, лежащий в отрезке $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.

Тогда $a_n \leq x + \varepsilon,$ (9)

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \leq q(x + \varepsilon) \leq x - \varepsilon \quad (10)$$

Следовательно,

$$a_{n+2} = q \cdot a_{n+1} < x - \varepsilon \quad (11)$$

и, вообще,

$$a_k < x - \varepsilon, \quad k \geq n+2, \quad (12)$$

Итак, левее точки $x - \varepsilon$ будет находиться бесконечно много точек последовательности, в отрезке $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ только один член последовательности. Следовательно, точка $x > 0$ не может быть точкой сгущения, и точкой сгущения может быть только точка $x = 0$.

Если $q > 1$, то последовательность будет неограниченная. Точки сгущения она не имеет. Символически мы можем записать:

$$a_n \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (13)$$

Последовательность (I) называется геометрической прогрессией. Геометрическая прогрессия есть последо-

если $x \rightarrow 0$, то $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$

Значит
если
раньше
77-го
раньше
много
→ ∞

вательность чисел, из которых каждое следующее получается из предыдущего умножением на одно и то же число q (знаменатель прогрессии). В общем случае более общая геометрическая прогрессия имеет вид:

$$a_n = a \cdot q^n \quad (I4)$$

Мы показали, что при $q < 1$ какое бы малое число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, всегда найдется такое N_ε , что для всех $n > N_\varepsilon$ члены нашей последовательности не будут больше ε , т.е. $q^n \leq \varepsilon$ ~~(для)~~. Это означает, что q^n может быть сколь угодно мало при $n \rightarrow \infty$:

$$q^n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad (I5)$$

Применим этот факт для нахождения суммы бесконечной геометрической прогрессии (I4) при $q < 1$.

Рассмотрим сумму $n+1$ членов геометрической прогрессии:

$$S_{n+1} = a(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \quad (I6)$$

Умножим обе части равенства (I6) на q

$$q S_{n+1} = a(q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}) \quad (I7)$$

Вычитая из (I6) (I7), находим:

$$S_{n+1} - q S_{n+1} = a(1 - q^{n+1}) \quad (I8)$$

Отсюда

$$S_{n+1} = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \quad (I9)$$

Полученное тождество можно переписать в виде:

$$(1 - q^{n+1}) = (1 - q)(1 + q + \dots + q^n) \quad (20)$$

Итак, мы нашли формулу для суммы $n+1$ членов нашей последовательности.

Заметим, что формула (19) справедлива для любого q , не равного единице, формула (20) и для $q = 1$.

Когда n невелико, то может оказаться, что проще пользоваться формулой $S_{n+1} = (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \cdot a$.

Но когда n велико, проще пользоваться формулой

$$S_{n+1} = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Определим теперь сумму бесконечной геометрической прогрессии (14).

Предположим, что $0 < q < 1$, $a > 0$. Рассмотрим последовательность чисел S_n из (16).

~~Мы~~ Последовательность $\{S_n\}$ ~~является~~ есть монотонная возрастающая последовательность. Действительно,

$$S_{n+1} = S_n + aq^n \quad (21)$$

Отсюда

$$S_{n+1} > S_n, \quad (22)$$

так как, по предположению, $aq^n > 0$

Проверить
конкретно
числа
Отсюда
 $\frac{q^n - 1}{q - 1} = n$
при $q \rightarrow 1$

Последовательность $\{s_n\}$ ограничена, ^{так как} на основании формулы (19) имеем:

$$s_{n+1} < a \cdot \frac{1}{1-q} \quad (23)$$

^{будем} ~~монотонной~~ ^{- и} ~~ограниченной~~ последовательность $\{s_n\}$ имеет предел, и этим пределом является $S = a \cdot \frac{1}{1-q}$

Для доказательства возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим отрезок $[S-\varepsilon, S+\varepsilon]$. Покажем, что каково бы ни было ε , можно найти такой номер N_ε , что все члены последовательности с номерами $n \geq N_\varepsilon$ будут лежать в этом отрезке. Очевидно,

$$s_{n+1} = S - \frac{aq^{n+1}}{1-q} \quad (24)$$

Тогда $N = N_\varepsilon$ определяется из условия

$$\frac{a \cdot q^{n+1}}{1-q} \leq \varepsilon, \quad q^{n+1} \leq \frac{\varepsilon(1-q)}{a} \quad (25)$$

Тогда $|s_{n+1} - S| \leq \varepsilon$, а это означает, что

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q} \quad \text{ч.т.д.} \quad (26)$$

Число S , по определению, есть сумма бесконечной геометрической прогрессии (14) при $a > 0, 0 < q < 1$

Теперь мы можем разрешить парадокс Зенона, который не смогли решить древние греки.

Можно
найти n ε
и $q^{n+1} < \varepsilon$

За какое время догонит Ахиллес черепаху, если он идет со скоростью 1, черепаха - со скоростью 0,5, начальное расстояние между ними равно 1.. Ясно, что ^{Ахиллес}~~он~~ догонит черепаху за время

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad (27)$$

Заметим, что число t есть двоичная периодическая дробь, которую в двоичном исчислении можно записать в виде:

$$t = 1,11\dots 1\dots \quad (28)$$

Ранее мы доказали, что всякое рациональное число есть конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь (см. задачу №3)

Теперь докажем обратную теорему:

Теорема: Всякая бесконечная периодическая десятичная дробь есть рациональное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим положительную периодическую десятичную дробь:

$$R = a_0, \underbrace{a_1 a_2 \dots a_k}_{k \text{ знаков}}, \underbrace{a_{k+1} \dots a_{k+p}}_{p \text{ знаков}}, \underbrace{a_{k+p+1} \dots a_{k+2p}}_{p \text{ знаков}} \dots \quad (29)$$

Бесконечная десятичная дробь периодическая бесконечная сумма:

$$R = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \dots + \frac{a_{k+p}}{10^{k+p}} + \frac{a_{k+p+1}}{10^{k+p+1}} + \dots + \frac{a_{k+2p}}{10^{k+2p}} + \dots$$

Здесь a_i ($i = 0, 1, \dots, n \dots$) - натуральные числа,

$$0 \leq a_i \leq 9 \quad i = 1, 2, \dots, n \dots$$

p - длина периода, периодичность дроби означает:

$$a_{m+p} = a_m, \quad m \geq k+1 \quad (30)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} z_0 &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} \\ z_1 &= \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{10^{k+2}} + \dots + \frac{a_{k+p}}{10^{k+p}} \\ z_2 &= \frac{a_{k+p+1}}{10^{k+p+1}} + \frac{a_{k+p+2}}{10^{k+p+2}} + \dots + \frac{a_{k+2p}}{10^{k+2p}} \neq \frac{z_1}{10^p} \\ z_3 &= \frac{a_{k+2p+1}}{10^{k+2p+1}} + \dots + \frac{a_{k+3p}}{10^{k+3p}} \neq \frac{z_1}{10^{2p}} \end{aligned} \quad (31)$$

Числа $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ — рациональные
условия периодичности
 Пользуясь (30), находим

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{a_{k+p+1}}{10^{k+p+1}} + \dots + \frac{a_{k+2p}}{10^{k+2p}} = \frac{1}{10^p} z_1 \\ z_3 &= \frac{a_{k+2p+1}}{10^{k+2p+1}} + \dots + \frac{a_{k+3p}}{10^{k+3p}} = \frac{1}{10^{2p}} z_1 \\ z_{n+1} &= \frac{1}{10^{np}} z_1 \end{aligned} \quad (32)$$

Наконец, из (29), (32) следует:

$$\begin{aligned} R &= \cancel{R} = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n+1} + \dots = z_0 + z_1 \left(1 + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \dots \right) = \\ &= z_0 + z_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} \end{aligned} \quad (33)$$

Теорема доказана. Итак, справедливо утверждение:

Чтобы бесконечная дробь представляла рациональное число необходимо и достаточно, чтобы она была периодической дробью. На этом закончим введение в теорию вещественных чисел.

Мы будем расширять понятие о числе. Мы рассмотрели рациональные числа и отождествили их с точкой прямой. Иррациональным числам мы также поставили в соответствие точки прямой.

Прямая есть совокупность всех вещественных чисел (рациональных и иррациональных). Теперь мы рассмотрим пары вещественных чисел и поставим им в соответствие точки плоскости.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

п. I. Векторы, как ориентированные отрезки.

Рассмотрим в плоскости пару точек M, N . Пара точек M, N или, как мы еще будем говорить, ориентированная пара точек взятых в определенном порядке, образует ориентированный отрезок \overrightarrow{MN} , который мы будем называть вектором.

Точку M будем называть началом, точку N — концом вектора \overrightarrow{MN} .

Определим равенство двух векторов $\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_2N_2}$.

Определение: Векторы $\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_2N_2}$ равны, если фигура $M_1N_1N_2M_2$ есть параллелограмм (см. рис. I).

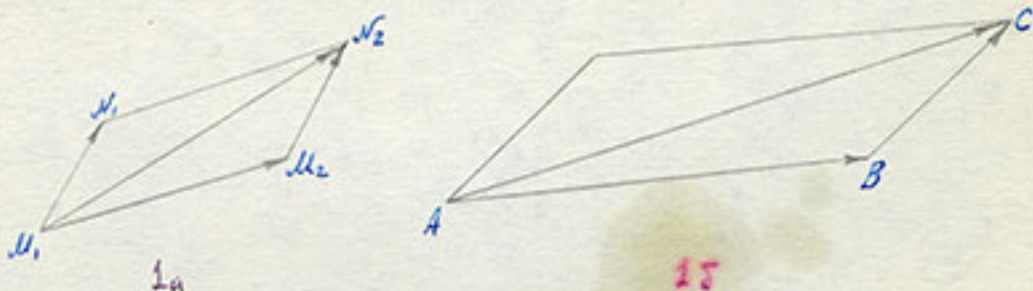


Рис. I.

Мы можем говорить также, что равные векторы получаются один из другого параллельным переносом.

Всем равным векторам, независимо от их точки приложения, мы можем отнести один и тот же символ — некоторую букву с чертой над ней. Например: $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2} = \vec{a}$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{N_1N_2} = \vec{b}$$

Доказательство, что равные векторы можно переносить параллельным переносом, см. рис. 1а.

15

Определение: Д л и н о й или м о д у л е м вектора \overrightarrow{MN} называется длина отрезка MN .

Вектор \overrightarrow{MN} называется н у л е в ы м, если N совпадает с M .

Определим сумму ~~векторов~~ векторов $\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_2N_2}$ (см. рис. 1)

Определение: $\overrightarrow{M_1N_2} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2N_2} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2N_1}$

Таким образом, вектор суммы двух векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ ~~есть~~ есть вектор \overrightarrow{AC} , построенный на диагонали параллелограмма, сторонами которого являются отрезки AB, BC (см. рис. 1)

Если рассмотреть замкнутую ломанную $A_1A_2A_3 \dots A_m$ (см. рис. 2)

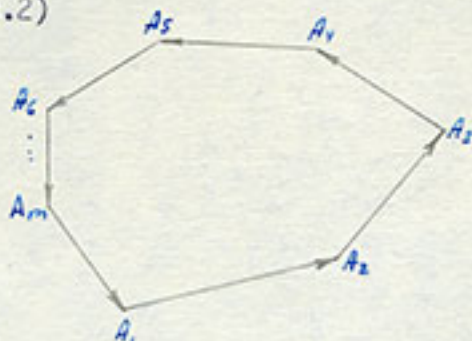


Рис. 2

то справедливо тождество:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{m-1}A_m} + \overrightarrow{A_mA_1} = 0 \quad (I)$$

В частности

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0 \quad (2)$$

Если

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_2A_3} = \dots = \overrightarrow{A_{m-1}A_m} = \overrightarrow{a} \quad (3)$$

Определение
Векторы \vec{a}, \vec{b} называются линейно зависимыми,
если выражаются один через другой

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0 \quad (5')$$

т.е. α, β — действительные числа, не
равные нулю одновременно:

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad (5'')$$

то (см. рис. 3)

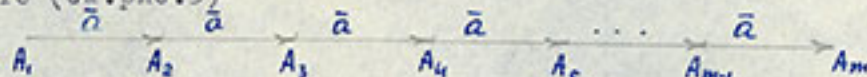


Рис. 3

$$\vec{A_1 A_m} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}}_{m \text{ раз}} = m \cdot \vec{a} \quad (4)$$

Если \vec{a} - произвольный вектор \vec{AB} , m - произвольное вещественное число, то вектор

$$\vec{AC} = \vec{b} = m \cdot \vec{a} \quad (5)$$

определяется как вектор, лежащий на прямой \vec{AB} имеющей длину

$$|\vec{AC}| = |m| \cdot |\vec{AB}|$$

и направленный в ту же сторону, что \vec{AB} , если $m > 0$ и в противоположную, если $m < 0$ (см. рис. 4)

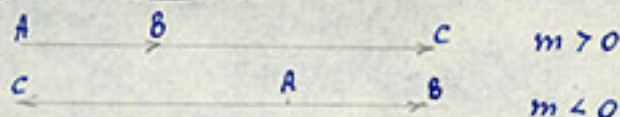


Рис. 4

Коллинеарные векторы $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$

Векторы $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{AC}$ удовлетворяющие условию (5) с некоторым числом m будем называть коллинеарными. В данном определении a, b неравноправны. Можно дать более симметричное определение:

В частности, если один из векторов \vec{a}, \vec{b} нулевой, векторы \vec{a}, \vec{b} являются линейно зависимыми. Ясно, что два линейно зависимых вектора являются коллинеарными и обратно.

Понятие линейной зависимости является более общим в том смысле, что оно может быть распространено на любое количество векторов.

п.2. Координаты вектора. Вектор как пара чисел.

Пусть \vec{e}_1, \vec{e}_2 - два линейно независимых вектора. Если их представлять векторами \vec{OA}, \vec{OB} , выходящими из одной точки O , то точки A, B не лежат на одной прямой (см.рис.5).

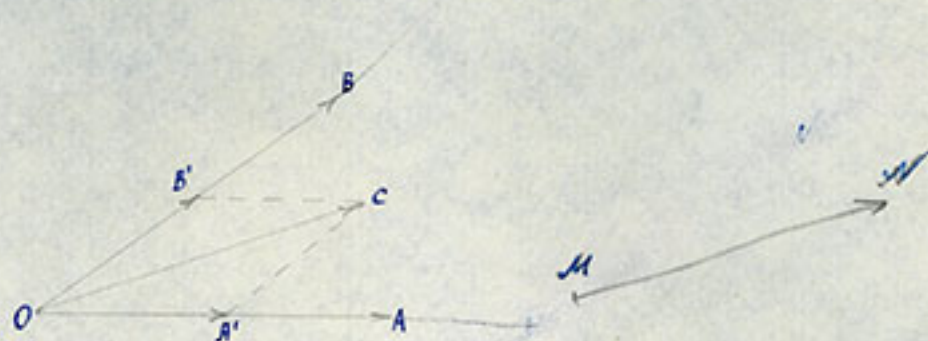


Рис. 5

Пусть \vec{MN} - произвольный вектор в плоскости. Отложим от точки O как начала вектора \vec{OC} равный вектору \vec{MN} . Из точки C проведем прямые параллельные OB, OA до пересечения с прямой OA , соответственно OB . Получим векторы $\vec{OA'}, \vec{OB'}$ (см. рис.5).

Тогда

$$\vec{OA'} = x \cdot \vec{OA} = x \cdot \vec{e}_1,$$

$$\vec{OB'} = y \cdot \vec{OB} = y \cdot \vec{e}_2, \quad (6)$$

$$\vec{a} = \vec{MN} = \vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 \quad (7)$$

Мы будем называть пару линейно независимых векторов \vec{e}_1, \vec{e}_2 базисом, представление (7) - разложением вектора $\vec{a} = \mu \vec{v}$ по базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 , а числа x, y - координатами вектора \vec{a} относительно базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 .

Пусть \vec{a}_1, \vec{a}_2 - два произвольных вектора плоскости, которые имеют координаты x_1, y_1 , соответственно x_2, y_2

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{a}_2 &= x_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2\end{aligned}\quad (8)$$

Найдем условие линейной зависимости векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2
Пусть

$$\vec{a}_2 = \mu \vec{a}_1 \quad (9)$$

Из подобия треугольников OCE, ODF ; OCR, ODH находим:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = \mu \quad (10)$$

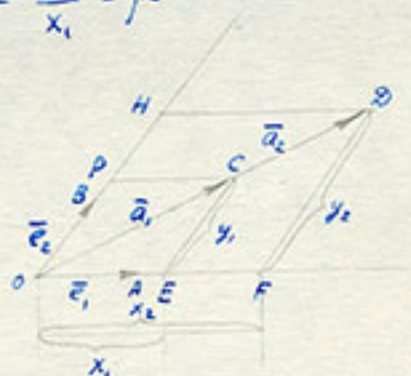


Рис. 6. Условие коллинеарности векторов

Из (10) следует

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \quad (11)$$

Условие (II) является необходимым условием линейной зависимости векторов \bar{a}_1, \bar{a}_2

Нетрудно показать, что оно является и достаточным условием. Действительно, из (II) следует (IO) с некоторым μ

Из подобия треугольников OCE, ODF следует, что углы COE, DOF равны, т.е. точки O, C, D лежат на одной прямой, и

$$OD:OC = \mu$$

Утверждение доказано.

Итак, условие (II) является необходимым и достаточным условием линейной зависимости векторов \bar{a}_1, \bar{a}_2 . Следовательно, для того, чтобы векторы \bar{a}_1, \bar{a}_2 были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \quad (I2)$$

Пользуясь координатным представлением (7) для векторов установим правила действия с векторами.

Из формул (9), (IO) следует, что если вектор \bar{a} имеет координаты x, y , то вектор $\mu \bar{a}$ имеет координаты $\mu x, \mu y$. Докажем, что если x_1, y_1 - координаты вектора \bar{a}_1 , x_2, y_2 - координаты вектора \bar{a}_2 , то координаты x, y вектора суммы

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \quad (I3)$$

представляются как суммы соответствующих координат:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ y &= y_1 + y_2 \end{aligned} \quad (I4)$$

Действительно, складывая равенства

$$\bar{a}_1 = x_1 \bar{e}_1 + y_1 \bar{e}_2 \quad (I5)$$

$$\bar{a}_2 = x_2 \bar{e}_1 + y_2 \bar{e}_2$$

Находим

$$a = x \bar{e}_1 + y \bar{e}_2 = (x_1 + x_2) \bar{e}_1 + (y_1 + y_2) \bar{e}_2 \quad (I6)$$

Отсюда следует

$$[x - (x_1 + x_2)] \bar{e}_1 + [y - (y_1 + y_2)] \bar{e}_2 = 0 \quad (I7)$$

Если какая-либо из скобок, например $[x - (x_1 + x_2)]$ не равна нулю, то векторы \bar{e}_1, \bar{e}_2 линейно зависимы, что противоречит предположению. Отсюда следует, что обе скобки обращаются в нуль:

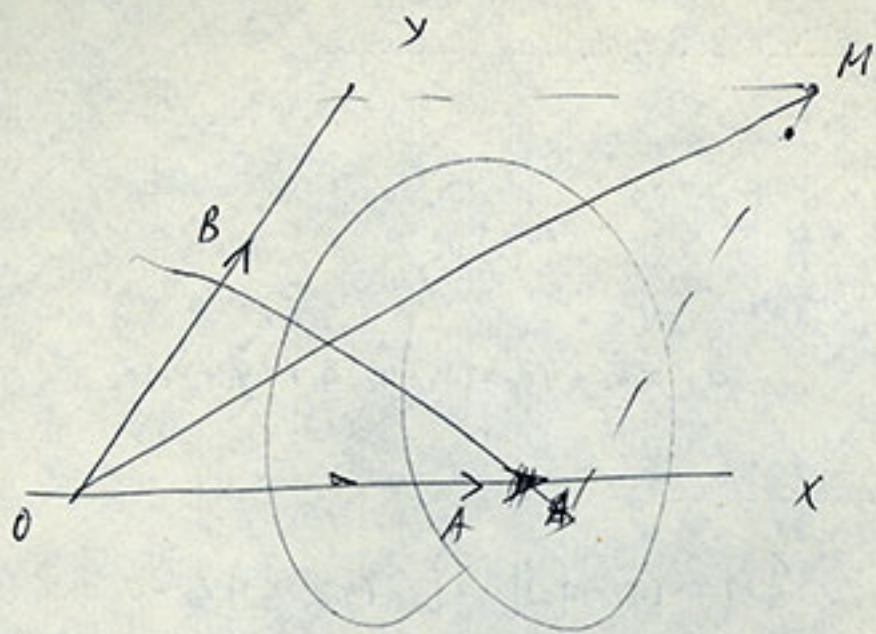
$$x - (x_1 + x_2) = 0, \quad y - (y_1 + y_2) = 0 \quad (I8)$$

т.е. равенство (I4) доказано.

1. 3 Прямоугольная Декартова система координат

Проведем на плоскости две ~~взаимно перпендикулярные~~ ^{пересекающиеся} (ортонормальные) прямые и обозначим их точку пересечения через O.

*Важно!
Помните!
Прямые должны
быть взаимно
перпендикулярны
и делить плоскость
на 4 квадранта.*



п. 3 Декартовы системы координат
 Проведем на плоскости две пересекающиеся
 прямые и обозначим их точку
 пересечения через точку O . Выберем на
 этих прямых векторы $\vec{e}_1 = \vec{OA}$, $\vec{e}_2 = \vec{OB}$ (см. рис 7)

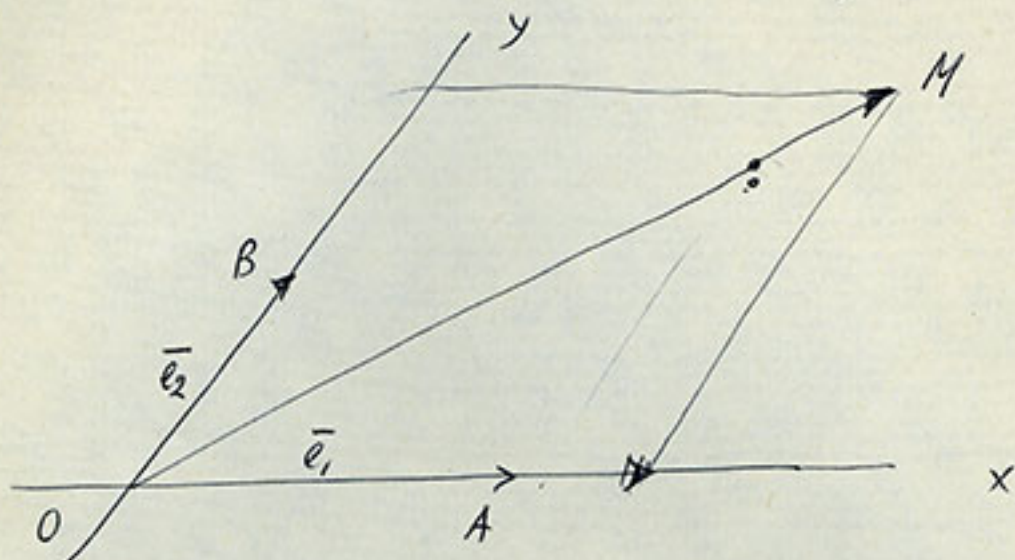


Рис 7 Декартова система координат

Векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 будем называть координатными
~~единичными~~ их совокупность $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ -
базисом. Прямую проходящую через точку O
 будем называть осью x , прямую проходящую
 через точку O, B - осью y совокупность
 этих прямых - координатными осями или
осью координат реализующую
плоскость - плоскость x, y .

Точка M - произвольная точка плоскости Ее
координатами x, y будем называть координаты
 вектора \vec{OM} относительно базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 .
 (см. п. 2) В частности, координаты
 вектора \vec{e}_1 будут $\sqrt{1, 0}$, вектора \vec{e}_2 -
 точка $0, 1$. Заметим, что векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2
 не образуют единичной длины

Особо важным является понятие ортонормированной декартовой координаты, когда оси OA, OB ортогональны. Тогда, для правых базисов координатные векторы \vec{e}_1, \vec{e}_2 являются единичными векторами. В этом случае базис называется ортонормированным. Назначение правых и левых ортонормированных базисов и их нормированности, т.е. векторы имеют единичную длину.

Возможны два случая: а) вектор \vec{e}_1 переводят в вектор \vec{e}_2 поворотом на 90° против часовой стрелки, б) вектор \vec{e}_1 переводят в \vec{e}_2 поворотом на 90° по часовой стрелке (случай а), или по часовой стрелке (случай б)) (см. рис. 8)

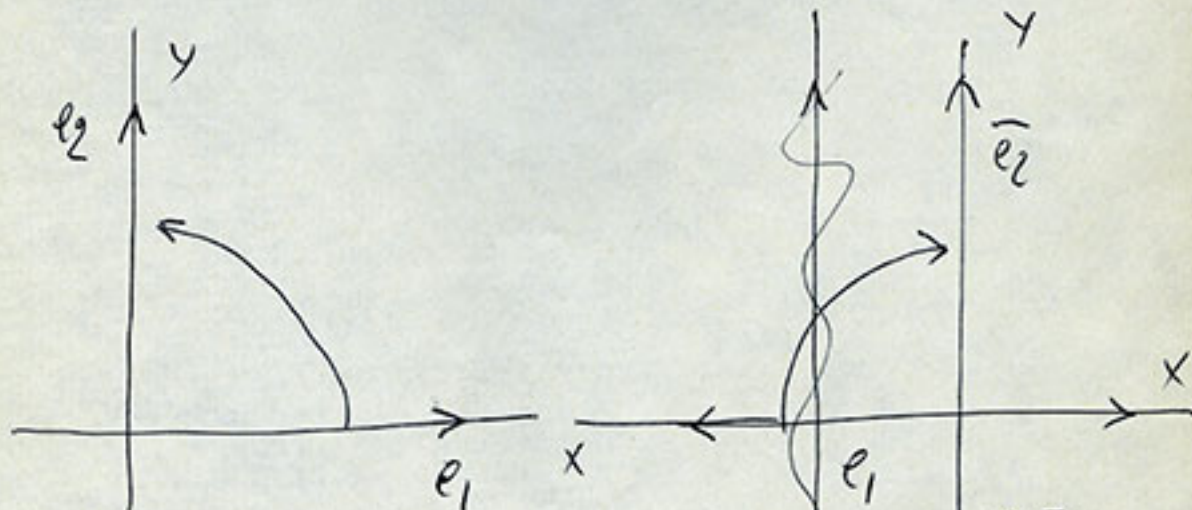


Рис. 8а Правый ориентации

Рис. 8б Левый ориентации

Рис. 8 ортонормированная система координат правый и левый ориентации

ленными знаками координат точек:

I-я четверть: $x > 0, y > 0$

2-я четверть: $x < 0, y > 0$

3-я четверть: $x < 0, y < 0$

4-я четверть: $x > 0, y < 0$

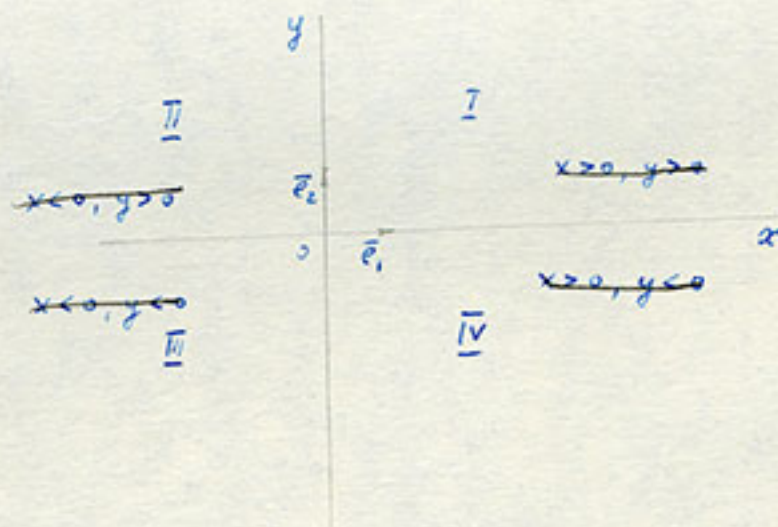


Рис 9. Разбиение плоскости на четверти.

Таким образом, I-я четверть есть совокупность точек с положительными координатами x и y и т. д.

Точки на оси x имеют координаты $(x, 0)$, точки на оси y имеют координаты $(0, y)$.

Пример. Рассмотрим в I-й четверти точку $M_1(1, 2)$

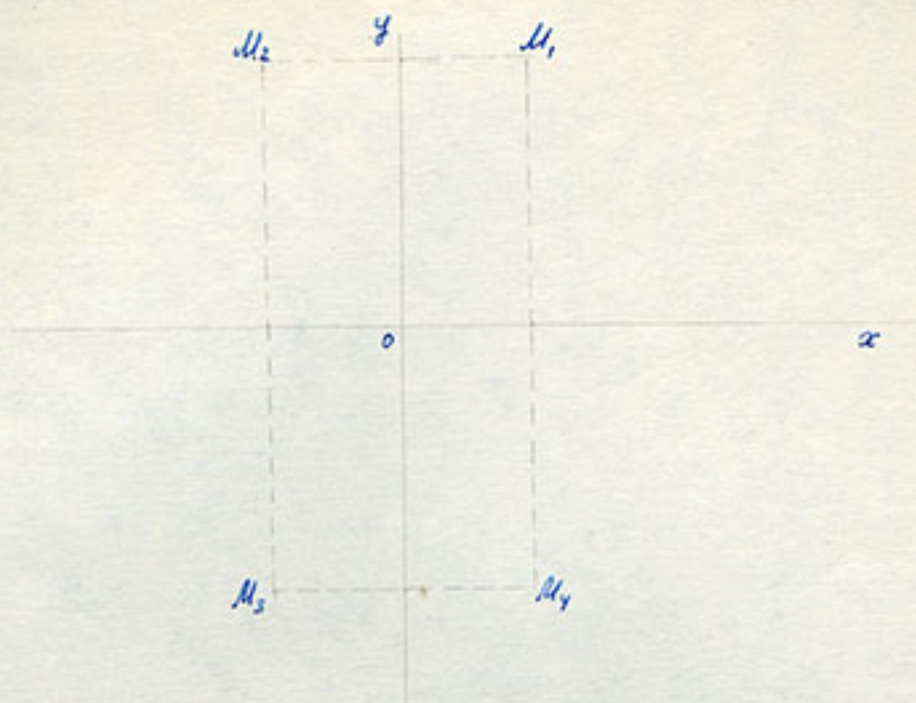


Рис. 40 Зеркальные отражения.

Последовательно зеркально отражая точку M_1 относительно осей x, y , мы получаем точку $M_2(-1, 2)$ во 2-й четверти, точку $M_3(-1, -2)$ в 3-й четверти, точку $M_4(1, -2)$ в 4-й четверти. Наконец, зеркально отражаем точку M_4 относительно оси x и получаем точку M_1 (см. рис. 10).

Введение декартовых координат на плоскости позволяет формулировать любую геометрическую задачу на языке арифметики и алгебры.

нам
Мы начинаем с самых простых задач.

Задача I.

Найти уравнение прямой (луча), проходящей через начало координат и данную точку $A(x_0, y_0)$

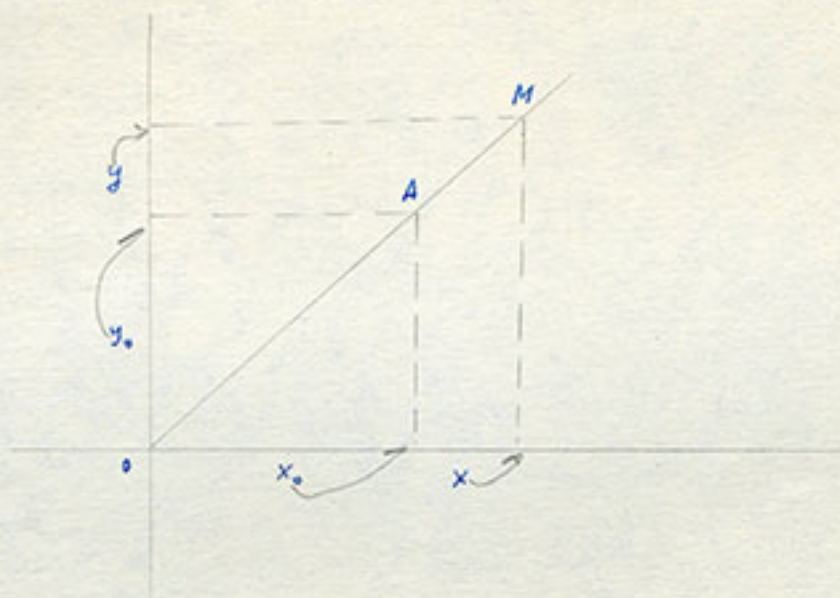


Рис. I. Уравнение луча.

Пусть M - произвольная точка луча OA . Векторы \vec{OA}, \vec{OM} линейно зависимы:

$$\vec{OM} = \mu \vec{OA} \quad (19)$$

Отсюда следует (см. рис. 10).

$$x = \mu x_0, \quad y = \mu y_0 \quad (20)$$

Или для равенства (20) и исключая μ , находим:

$$\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} = k \quad (21)$$

Величина k называется наклоном луча.

Соотношение (21), связывающее координаты x, y произвольной точки $M(x, y)$ луча и представляют собой уравнение луча.

Задача 2.

Провести прямую через две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

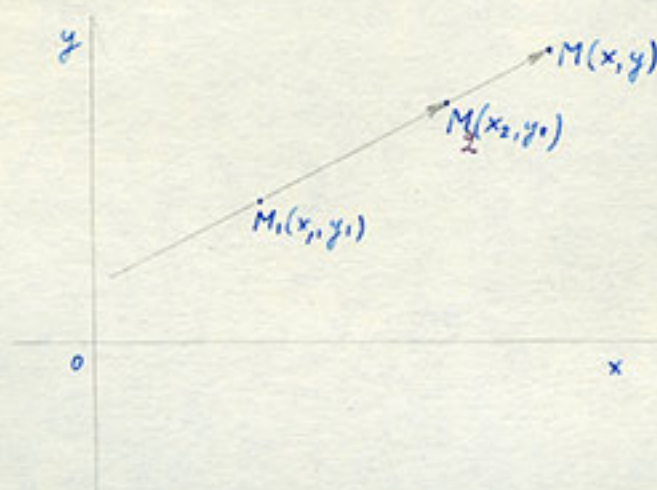


Рис. 12. Уравнение прямой

Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка прямой. Векторы $\vec{M_1M_2}$, $\vec{M_1M}$ имеющие координаты $\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$, соответственно $\{x - x_1, y - y_1\}$, коллинеарны. Отсюда следует

$$\vec{M_1M} = \mu \vec{M_1M_2} \quad (22)$$

$$x - x_1 = \mu (x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \mu (y_2 - y_1) \quad (22a)$$

Откуда находим, исключая μ из (22a), находим:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (23)$$

Соотношение (23) есть искомое уравнение прямой, проходящей через заданные две точки.

Рассмотрим частный случай задачи 2, когда точки M_1, M_2 лежат на осях, так что имеем:

$$x_1 = a, y_1 = 0; \quad x_2 = 0, y_2 = b \quad (24)$$

Подставляя в (23) значения x_1, y_1, x_2, y_2 из (24) находим:

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{b-0}{0-a} \quad (25)$$

Отсюда, после алгебраических преобразований получаем

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (26)$$

Уравнение (26) называется ~~уравнением~~ ^в уравнением прямой отрезках.

Задача 3.

Провести прямую через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно данному вектору $\vec{AB}(x, y)$

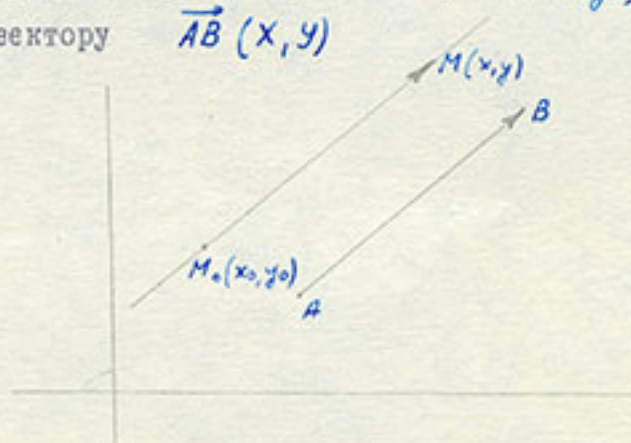


Рис. 13. Прямая параллельная данному вектору.

Мы представили вашему вниманию,
что задачи 1-3 решаются, используя
в произвольной декартовой системе
координат, не обладающей ориентацией.
Однако, в тех задачах, где требуется
определить длину вектора или расстояние
между двумя точками или углом
и т.д., формулы в произвольной
системе с ортонормированным базисом
~~отличаются~~ значительно проще.
Нам следует решить задачу.

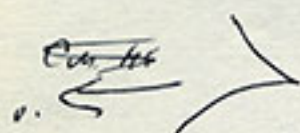
Выражая Коллинеарность векторов $\vec{M_0M}$, \vec{AB} , находим

$$\vec{M_0M} = \mu \cdot \vec{AB} \quad (27)$$

$$\frac{x-x_0}{x} = \frac{y-y_0}{y} = \mu \quad (28)$$

Из (28), исключая μ , получаем

$$\frac{y-y_0}{y} = \frac{x-x_0}{x} \quad (29)$$



Задача 4.

Найти длину вектора $\vec{AB}(x, y)$

Применяя теорему Пифагора (см. рис. 13),

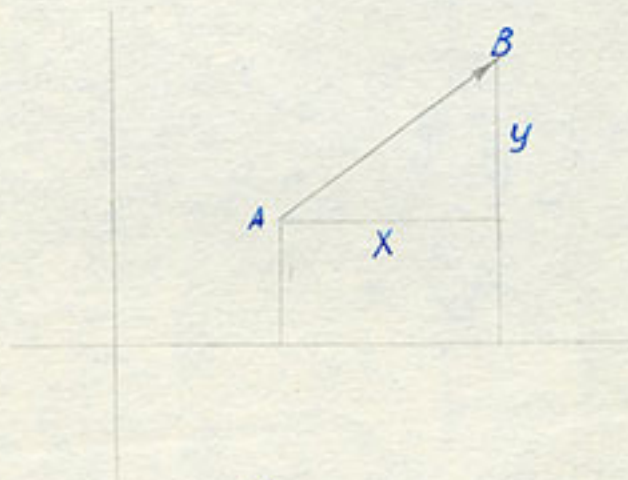


Рис. 13 Длина вектора

имеем

$$|\vec{AB}|^2 = x^2 + y^2, \quad |\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (30)$$

Задача 5.

Найти расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

Расстояние ρ между точками M_1, M_2 есть длина вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$. Координаты этого вектора равны

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1 \quad (31)$$

Применяя формулу (30), имеем:

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (32)$$

Задача 6.

Найти геометрическое место точек $M(x, y)$, равноотстоящих от точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

Выражая равенство расстояний $\rho_1(M, M_1) = \rho_2(M, M_2)$ имеем:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \quad (33)$$

После раскрытия скобок и приведения подобных, получаем:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y - (x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2) = 0 \quad (34)$$

Далее мы покажем, что это геометрическое место точек есть прямая перпендикулярная к отрезку $M_1 M_2$ и проходящая через его середину.

Л е к ц и я 8

п.1. Уравнение прямой.

На прошлой лекции мы получили уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек.

Уравнение имело вид:

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

где A , B , C — постоянные числа (константы).

Такое уравнение называется **линейным**.

Мы покажем, что совокупность точек $M(x, y)$ которые удовлетворяют уравнению (1) составляют прямую.

Предположим, что $A \cdot B \neq 0$

Зададимся $x = x_0$. Тогда $y = y_0$ удовлетворяет соотношению:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad (2)$$

Так как $B \neq 0$, то уравнение (2) имеет решение:

$$y_0 = - \frac{Ax_0 + C}{B}$$

Вычитая (1) из (2), получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (3)$$

Перепишем (3) в виде пропорции:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-A}{B} \quad (4)$$

Рассмотрим вектор \vec{a} с координатами $X = B$, $Y = -A$

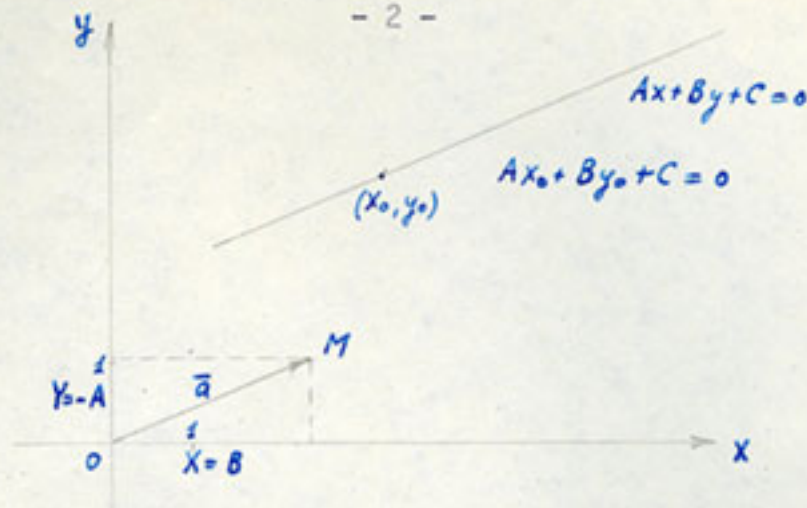


Рис. 1. Линейное уравнение изображает прямую

Мы решили задачу: найти прямую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельную заданному вектору $\vec{a} = \{X, Y\} \neq \{0, 0\}$ (4) и есть решение этой задачи (см. рис. 1).

Пусть теперь $A \cdot B = 0$

Рассмотрим частные случаи

I) $B = 0, A \neq 0$

Мы получаем уравнение

$$Ax + C = 0, \quad (5)$$

Имеющее решение:

$$x = -\frac{C}{A}, \quad y - \text{произвольное} \quad (6)$$

Уравнение (6) изображает прямую, параллельную оси y , проходящую через точку $(x = -\frac{C}{A}, y = 0)$ (см. рис. 2)

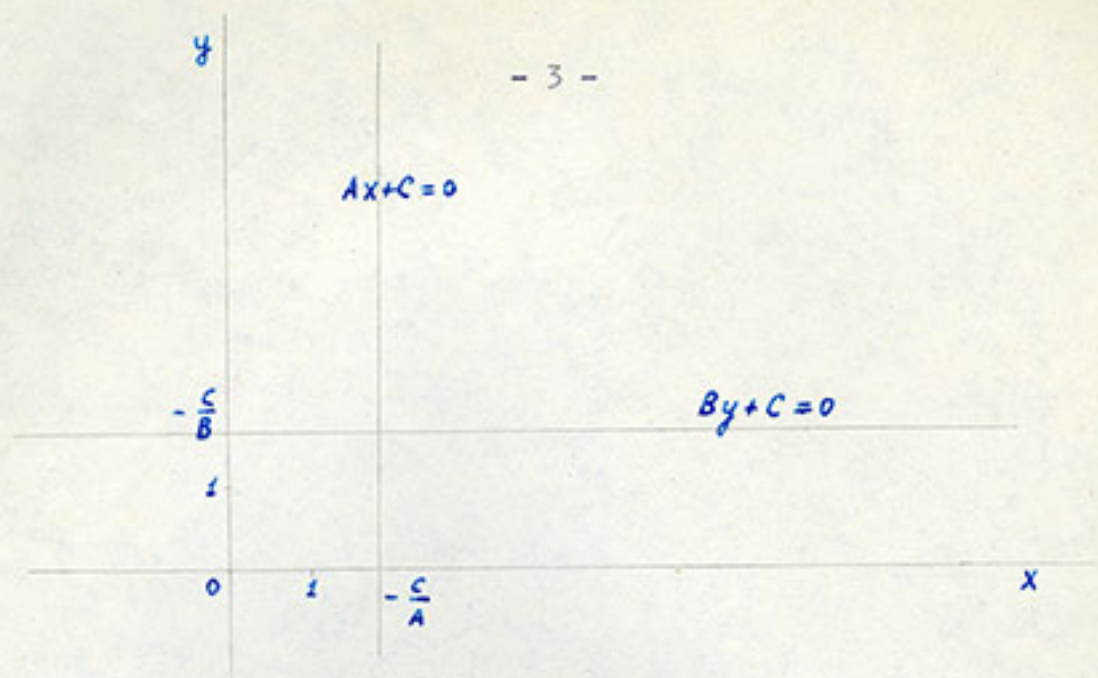


Рис. 2 Уравнение прямых, параллельных осям x и y .

2) $B \neq 0 \quad A = 0$

Мы получаем уравнение:

$$By + C = 0 \quad (7)$$

Имеющее решение

$$y = -\frac{C}{B} \quad (8)$$

Уравнение (7), или что то же, уравнение (8) изображает прямую параллельную оси x , проходящую через точку $(x=0, y=-\frac{C}{B})$.
(см.рис.2)

Если ³⁾ $A=0, B=0$

тогда $C=0$, уравнение (I) обращается в тождество. Если $C \neq 0$, уравнение (I) несовместно. В этом случае можно говорить о бесконечно удаленной прямой.

в 2 измерениях заданы

Итак, уравнение (I) всегда изображает прямую.

~~Рассмотрим еще ряд задач.~~
~~Введем более сложные образы, чем прямая.~~

Задача I. Разделить отрезок, проходящий через точки

$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ в отношении $m:n$ внутренним и внешним образом

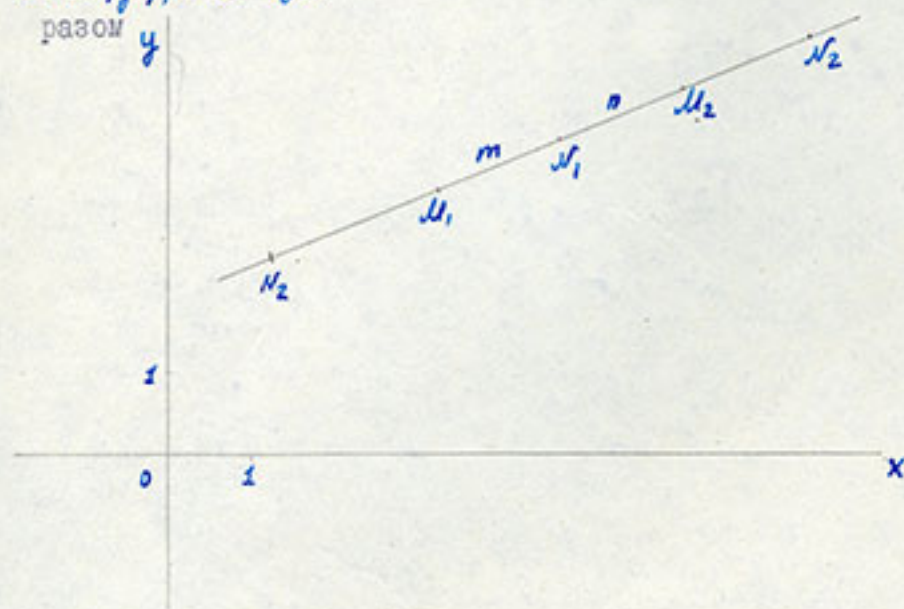


Рис. 3 Деление отрезка в данном отношении

Пусть точка деления $N_1(x, y)$ лежит внутри отрезка M_1M_2 (см. рис. 3) и удовлетворяется соотношению

$$\frac{\overline{N_1M_2}}{\overline{M_1N_1}} = \frac{n}{m} \quad (9)$$

Отсюда следует

$$\frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{n}{m} \quad (I0)$$
$$\frac{y_2 - y}{y - y_1} = \frac{n}{m}$$

Решая уравнения (I0), находим:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n} \quad y = \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \quad (I1)$$

Пусть точка $N_2(x, y)$ лежит вне отрезка M_1M_2 . Тогда удовлетворяется соотношение:

$$\frac{\overrightarrow{N_2M_2}}{\overrightarrow{N_2M_1}} = \frac{n}{m}, \quad \text{если } n < m \quad (I2)$$

$$\frac{\overrightarrow{N_2M_2}}{\overrightarrow{N_2M_1}} = \frac{n}{m}, \quad \text{если } n > m$$

Из (I2) следует

$$\frac{x - x_2}{x - x_1} = \frac{n}{m} \quad (I3)$$
$$\frac{y - y_2}{y - y_1} = \frac{n}{m}$$

Разрешая уравнения (I3), находим

$$x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \quad y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \quad (I4)$$

В
уравнении
указано
отрицательное
значение, поэтому

Задача 2. Найти геометрическое место точек, удаленных от точки $A(x_0, y_0)$ на расстоянии R .

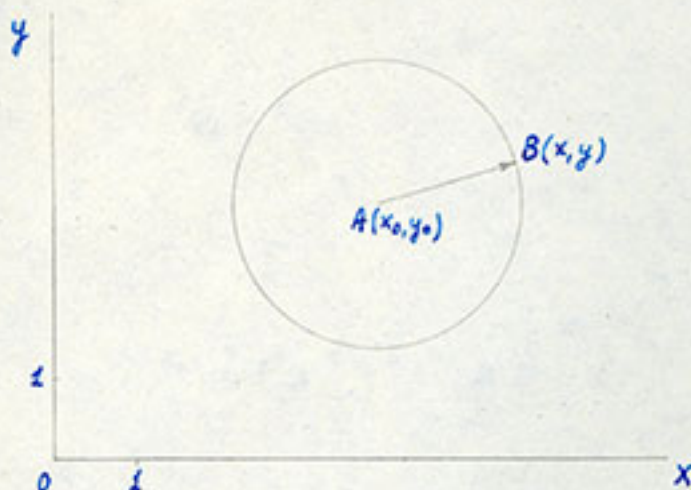


Рис. 4 Окружность радиуса R с центром в (x_0, y_0)

Пусть $B(x, y)$ есть произвольная точка окружности.
Построим вектор \overrightarrow{AB} $(x - x_0, y - y_0)$
Длина вектора равна:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (I5)$$

Возводя обе части равенства (I5) в квадрат, находим

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (I6)$$

Соотношение (I6) есть искомое уравнение окружности с центром в (x_0, y_0) и радиусом R . Если точка (x_0, y_0) есть начало координат, то уравнение нашей окружности в этом случае есть:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (I7)$$

При $R=1$ получаем уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (I7')$$

Задача 3. Найти биссектрису угла, образованного двумя лучами

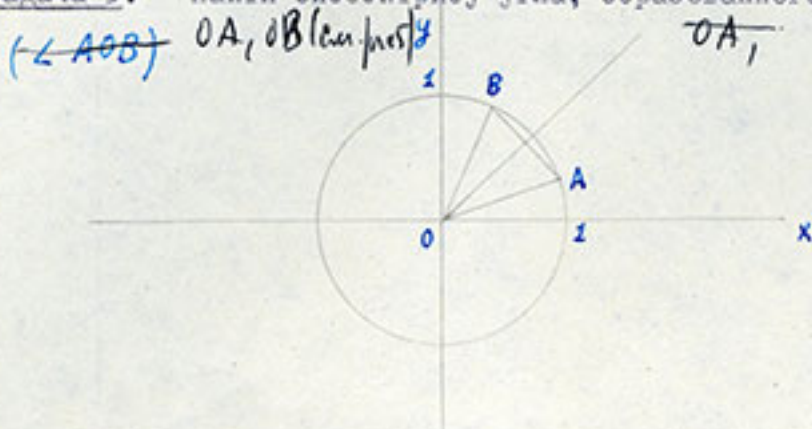


Рис. 5 Деление угла AOB пополам.

Мы могли бы эту задачу поставить так: найти геометрическое место точек, одинаково удаленных от заданных прямых OA и OB . Но мы не умеем определять расстояние от точки до прямой. Задачу нахождения биссектрисы угла можно свести к уже решенной задаче. Биссектриса угла $\angle AOB$ есть прямая, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная к AB . А эта прямая есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух заданных точек A и B .

Пусть уравнение прямой OA есть

$$y = k_1 x \quad (I8)$$

а уравнение прямой OB есть

Найдем координаты точек A и B .
~~уточним, что $K_1 > 0$, или $K_2 > 0$, т.е. пусть OB лежит в первой четверти.~~
 Чтобы найти координаты точки A , заметим, что во-первых, точка A лежит на прямой OA , следовательно, она удовлетворяет уравнению (18), во-вторых, точка A лежит на окружности (17').

Для определения координат точки A решим систему уравнений (17') и (18).

Подставляя $y = K_1 x$ из (18) в (17') находим:

$$x^2 = \frac{1}{1+K_1^2}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{1+K_1^2}} \quad (20)$$

Выбирая для x знак $+$, имеем:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1+K_1^2}}, \quad y_1 = \frac{K_1}{\sqrt{1+K_1^2}} \quad (21)$$

Координаты точки B найдутся аналогично

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1+K_2^2}}, \quad y_2 = \frac{K_2}{\sqrt{1+K_2^2}} \quad (22)$$

Вспомним решение задачи о нахождении геометрического места точек, равноудаленных от двух заданных точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Задача имела решение (см. задачу 7)

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 + y_1^2 - (x_2^2 + y_2^2) = 0 \quad (23)$$

Но точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) лежат на окружности. Поэтому

$$x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad x_2^2 + y_2^2 = 1 \quad (24)$$

С учетом этого, (23) можно переписать в виде

$$\frac{y}{x} = - \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad (25)$$

Соотношение (25) есть уравнение биссектрисы угла $A(x_1, y_1)$, $O(0, 0)$, $B(x_2, y_2)$.

Мы можем решить более общую задачу: найти биссектрису угла, образованного двумя произвольными прямыми. Для этого найдем точку пересечения прямых и с центром в этой точке построим окружность единичного радиуса, далее поступаем аналогично сделанному. ~~Задача~~ ^{Рассуждения} позволяет нам ввести понятие величины угла. Величина угла должна удовлетворять следующим требованиям:

- а) во-первых, равным углам должны соответствовать равные величины.
- б) во-вторых, сумме углов должна отвечать арифметическая сумма соответствующих величин (свойство аддитивности).

Можно ли свести измерение углов к измерению ^{длины} отрезков? Простые рассуждения показывают, что нельзя свести измерение углов к измерению отрезков прямых.

Проведем через вершину угла единичную окружность и сопоставим каждому углу хорду, соединяющую точки пересечения сторон угла с окружностью (см. рис. 6). Мы могли бы измерять углы длинами соответствующих хорд, и тогда равным углам $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ соответствовали бы равные хорды AB , $A'B'$ и обратно (рис. 6). Тем самым, было бы выполнено первое требование. Однако, второе требование (свойство аддитивности), уже не выполняется (рис. 6). В то время как

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC \quad (26)$$

А.З.
~~Величина~~
~~измерения~~
угла

для длин соответствующих хорд имеем:

$$AC < AB + BC \quad (27)$$

Задача измерения углов может быть сведена к измерению дуг единичной окружности. При таком определении будут соблюдены оба требования.

Покажем, как, в принципе, могут измеряться дуги окружности.

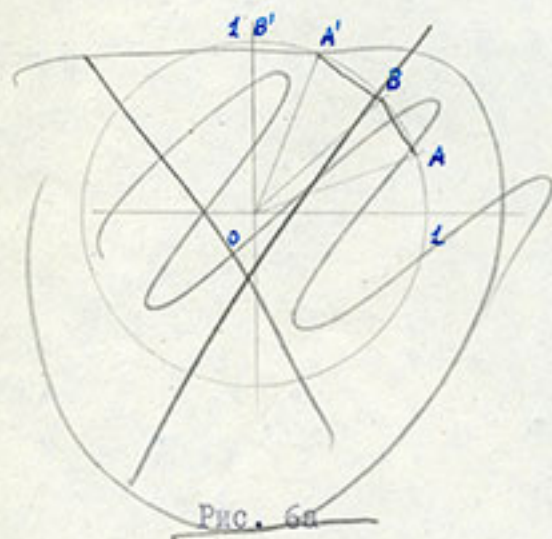


Рис. 6а

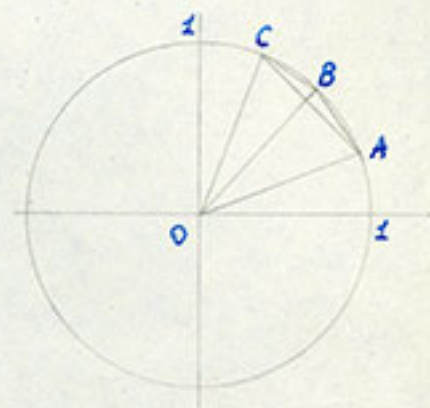
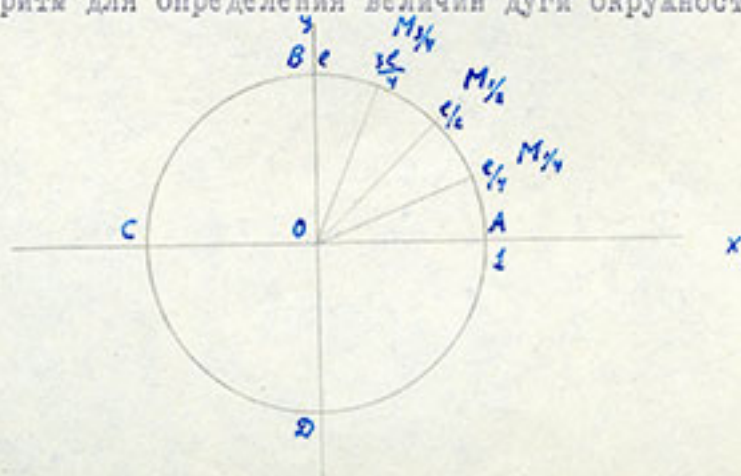


Рис. 6б

Мы умеем разделить угол пополам. Этого достаточно, чтобы указать алгоритм для определения величин дуги окружности (см.рис.7)



Рассмотрим сначала прямой угол $\angle AOB$ и поставим ему в соответствие величину $\ell = \frac{\pi}{2}$ (На определении числа π мы остановимся в последующих лекциях).

Пусть M - произвольная точка дуги AB . Для определения величины дуги AC мы применим приближение двоичными дробями.

Разделим дугу AB пополам M_1 и в середине дуги AB поставим в соответствие координату $\ell_1 = \frac{\ell}{2} = \frac{\pi}{4}$, которая имеет длину OM_1 .

Разделив углы AOM_1 , M_1OB пополам, получим точку M_2 соответственно $\ell_2 = \frac{\ell}{4}$. Дуги AM_2 , M_2B имеют длину $\ell_2 = \frac{\pi}{8}$.

Продолжая деление пополам, получим на дуге AB точку M_y . Число y есть двоичная дробь, а ℓ_y есть длина дуги AM_y . Ясно, что точку M можно аппроксимировать с любой точностью парой двоичных точек $M_y, M_{y'}$, так что $\ell_{y'}$ есть значение угла AOC с недостатком, ℓ_y - с избытком.

Нетрудно после этого поставить в соответствие произвольной точке M единичной окружности внутреннюю координату y , которая измерит длину дуги окружности AM и одновременно величину угла AOM . При этом точка A получит координату π , точка D - координату $\frac{3\pi}{2}$, точка B - координату 2π .

Покажем, например, как третья часть прямого угла представляется в виде бесконечной двоичной дроби.

$\frac{1}{3}$ представим как сумму бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \quad (28)$$

С любой заданной точностью, производя достаточное число делений дуги пополам, мы можем вычислить дугу $\frac{1}{3}\ell = \frac{\pi}{6}$. Заметим, что деление угла на три части с помощью циркуля и линейки - задача неразрешимая.

п.4. Тригонометрические функции угла

Введем в рассмотрение тригонометрические функции угла φ .

Пусть x, y - декартовы координаты точки единичной окружности M , которая имеет внутреннюю координату φ (см.рис. 8)

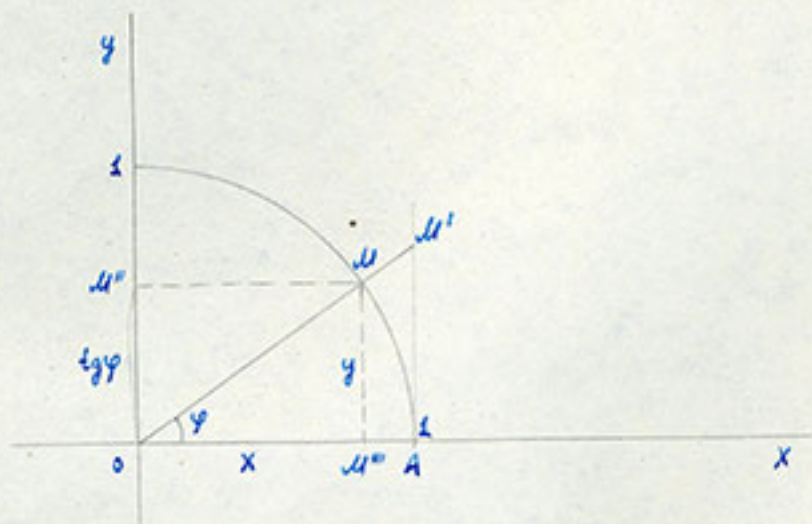


Рис.8 Тригонометрические функции угла.

Координата φ полностью определит точку M , которая в свою очередь полностью определит декартовы координаты x, y

Мы можем сказать, что x, y полностью определяются заданием угла φ , иными словами, являются функциями φ . Введем обозначения

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi \quad (29)$$

$\cos \varphi, \sin \varphi$ являются основными тригонометрическими функциями угла. Они связаны соотношением, которое следует из теоремы Пифагора:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (30)$$

Кроме того, мы введем следующие функции

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (31)$$

$$\sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \operatorname{cosec} \varphi = \frac{1}{\sin \varphi} \quad (32)$$

Из рис. 8 видно, что радиус-вектор \vec{OM} имеет координаты $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, радиус-вектор $\vec{OM'}$ имеет координаты $(1, \operatorname{tg} \varphi)$.

Нетрудно установить следующие свойства тригонометрических функций:

$$\cos \varphi = \cos(-\varphi), \quad \sin \varphi = -\sin(-\varphi) \quad (33)$$

Мы будем говорить, что $\cos \varphi$ - есть четная, $\sin \varphi$ - нечетная функции угла φ .

Дадим формулу для $\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$

Для простоты проведем рассмотрение для углов в первой четверти (см. рис. 9):

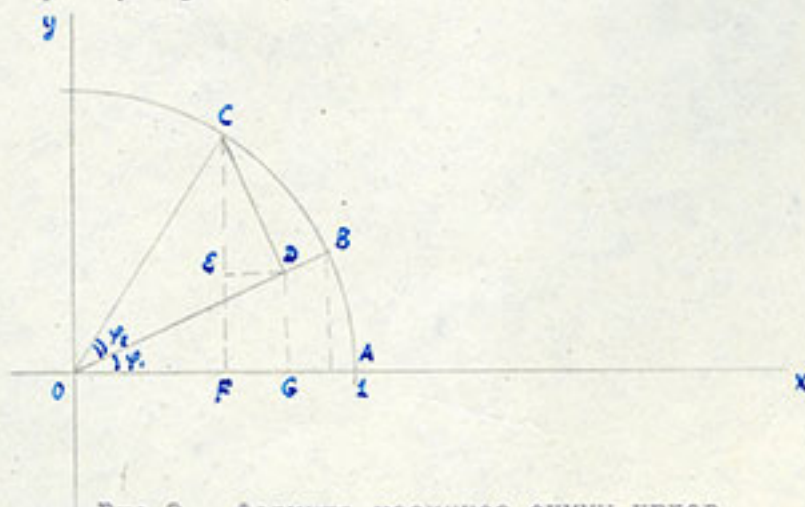


Рис. 9. Формула косинуса суммы углов

Выпишем цепочку очевидных равенств:

$$OF = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$OD = \cos \varphi_2$$

$$CD = \sin \varphi_2$$

$$OG = OD \cdot \cos \varphi_1 = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2$$

$$DE = 2R \cdot \sin \angle BCE$$

$$FG = ED$$

$$OF = OG - FG$$

(35)

Принимая во внимание равенство углов

$$\angle BCE = \angle BOA = \varphi_1$$

(36)

как углов со взаимно перпендикулярными сторонами, имеем:

$$FG = ED = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2$$

(37)

$$\cancel{OF = OG - FG}$$

Откуда окончательно имеем:

$$OF = OG - FG =$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2$$

(38)

Можно показать, что формула (38) справедлива для произвольных углов φ_1, φ_2 . Предоставляем читателю это сделать самостоятельно.

Аналогично, справедлива формула

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1$$

(39)

Лекция 9

п.1. Скалярное произведение векторов.

Введем понятие скалярного произведения векторов

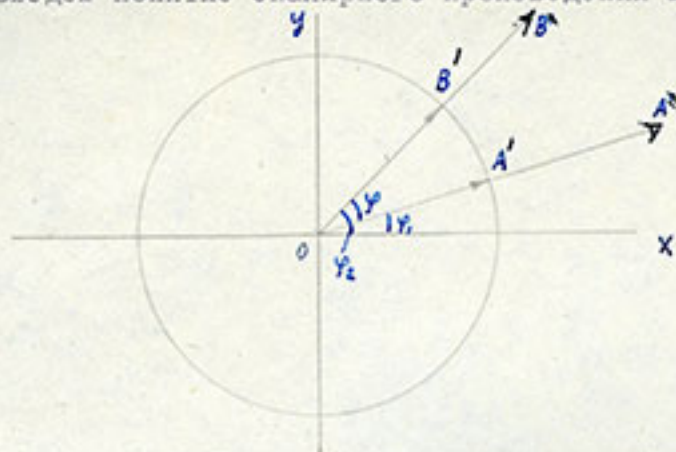


Рис.1. Скалярное произведение двух векторов

Если мы имеем два единичных вектора \vec{OA} и \vec{OB} и угол между ними равен $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (см.рис.1), то справедлива формула

$$\cos \varphi = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \quad (1)$$

Для координат точек A, B имеем выражения

$$x_1 = \cos \varphi_1, \quad y_1 = \sin \varphi_1 \quad (2)$$

$$x_2 = \cos \varphi_2, \quad y_2 = \sin \varphi_2$$

Сопоставляя формулы (1), (2), находим

$$\cos \varphi = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \quad (3)$$

Пусть теперь имеются два произвольных вектора $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$. Какой смысл тогда имеет число $x_1 x_2 + y_1 y_2$. Мы будем считать, что векторы $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{OB}$ выходят из начала координат ~~и имеют длину 1~~.

Тогда (см. рис. 1)

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= \vec{OA}' \cdot l_1 \\ \vec{OB} &= \vec{OB}' \cdot l_2\end{aligned}\quad (4)$$

где l_1, l_2 - длины векторов \vec{OA}' и \vec{OB}' .

Из (3) следует:

$$X_1 = x_1 \cdot l_1, \quad X_2 = x_2 \cdot l_2 \quad (5)$$

$$Y_1 = y_1 \cdot l_1, \quad Y_2 = y_2 \cdot l_2$$

где x_1, y_1 - координаты единичного вектора \vec{OA}' , x_2, y_2 - координаты единичного вектора \vec{OB}' .

Отсюда:

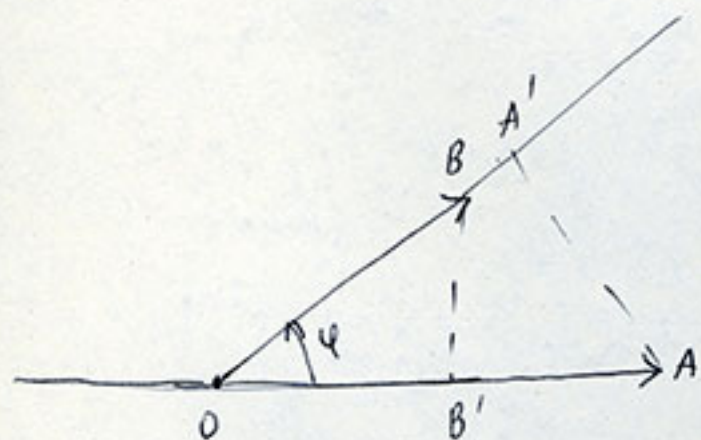
$$X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 = l_1 \cdot l_2 (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2) = l_1 \cdot l_2 \cdot \cos \varphi \quad (6)$$

Выражение $X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2$ - называется скалярным произведением векторов $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ и обозначается символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$

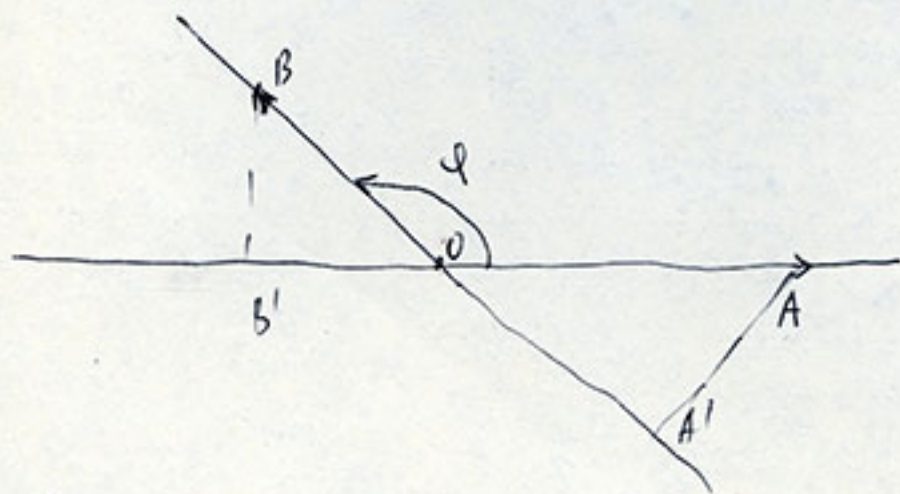
Из выражения (6) следует, что скалярное произведение равно произведению длин векторов на косинус угла между ними. Это справедливо для произвольных векторов, лежащих не только в первой четверти, как на рисунке 1.

Легко видеть, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (7)$$



Пробл 2а



Пробл 2б

Для евклидовой геометрии понятие скалярного произведения векторов является центральным, основным понятием.

Понятие скалярного произведения позволит нам по новому взглянуть на ряд определений и решить ряд новых задач.

Для дальнейшего нам нужно дать другое истолкование скалярного произведения векторов. Если у нас имеются два вектора $\vec{a} = \vec{OA}$ и $\vec{b} = \vec{OB}$, ~~длины~~ $l_1 = 10$ ~~соответственно~~ $l_2 = 12$, то их скалярное произведение может быть истолковано следующим образом (см. рис. 2).

Опустим из точки B перпендикуляр на OA.

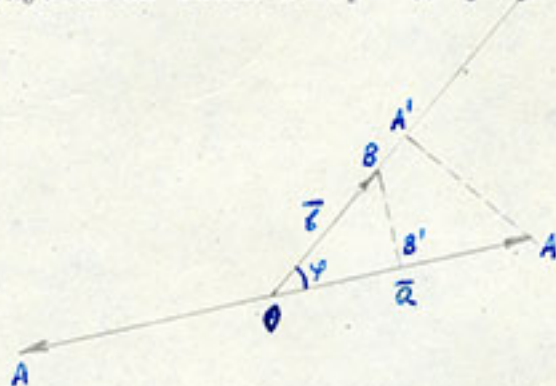


Рис. 2. ~~Толкование скалярного произведения~~

Перепишем формулу (6) в виде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = l_1 (l_2 \cos \varphi) = l_2 (l_1 \cos \varphi) \quad (8)$$

Если $\angle AOB$ острый, $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, то (см. рис. 2)

$$OB' = l_2 \cos \varphi, \quad OA' = l_1 \cos \varphi \quad (9)$$

Если $\angle AOB$ тупой, $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то (см. рис. 98)

$$OB' = -l_2 \cos \varphi, \quad OA' = -l_1 \cos \varphi \quad (10)$$

В первом случае
Тогда можно сказать, что скалярное произведение векторов равно произведению длины первого вектора на длину проекции второго вектора на первый,

Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение равно по абсолютной величине и противоположно по знаку указанному произведению. ~~с отрицательным коэффициентом~~
Знаком.

Мы можем записать эти соотношения в одном виде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| \cdot b_a = \pm |\vec{b}| \cdot a_b \quad (9) \quad (11)$$

где знак + берется для углов с положительным косинусом, - для углов с отрицательным косинусом, b_a есть длина проекции вектора \vec{b} на вектор \vec{a} , a_b - длина проекции вектора \vec{a} на вектор \vec{b} . Нормаль к прямой.

н.2. ~~перейдем теперь к выводу уравнения прямой~~
Перейдем теперь к выводу уравнений прямой. Пусть

$M(A, B)$ есть основание перпендикуляра, опущенного из начала O на прямую, $N(x, y)$ - произвольная точка прямой

(см. рис. 3). Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \vec{OM}$, $\vec{b} = \vec{ON}$ равно, по определению:

$$Ax + By$$

В силу данного нами истолкования скалярного произведения имеем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot b_a = |\vec{a}|^2$$

Следовательно $\vec{a} \cdot \vec{b}$ не зависит от вектора \vec{ON} и есть величина постоянная. Таким образом, ~~уравнение~~ уравнение прямой имеет вид:

$$Ax + By = \text{const}$$

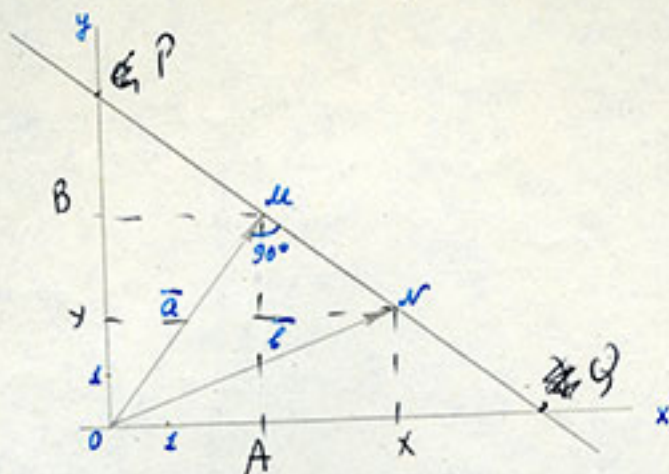


Рис. 3. Общее уравнение прямой

Обратно, пусть имеем уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

(10) (12)

или

$$Ax + By = -C$$

(10) (13)

Тогда левую часть ⁽¹³⁾~~(10)~~ можем истолковать как скалярное произведение векторов $\vec{a}(A, B)$ и $\vec{b}(x, y)$, которое всегда постоянно. Следовательно, проекция изменяющегося вектора $\vec{b}(x, y)$ на постоянный вектор \vec{a} — постоянна, а это возможно в том случае, когда конец вектора \vec{b} описывает прямую, перпендикулярную к вектору $\vec{a}(A, B)$. Вектор $\vec{a}(A, B)$ касается нормально ~~прямой~~ ^{прямой} (12).
~~Нормальное уравнение~~ Нормальное уравнение прямой.

л. 3.

Если имеем некоторое уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ то, как было показано, числа A, B могут рассматриваться, как координаты вектора $\vec{n}(A, B)$ нормального к прямой.

Если умножим уравнение прямой на $\mu \neq 0$, то уравнение

$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$ определяет ту же самую прямую.

Подберем множитель μ таким образом, чтобы вектор $\{\mu A, \mu B\}$ был единичным. Мы знаем, что длина вектора с координатами (X, Y) равна

$$\ell = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

В нашем случае $\sqrt{(\mu A)^2 + (\mu B)^2} = 1$, откуда

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (II) \quad (14)$$

Неопределенность знака в формуле (II) означает, что вектор единичной нормали выбирается с точностью до направления.

Обозначим

$$\mu A = X, \quad \mu B = Y, \quad c = \mu C \quad (15)$$

Тогда уравнение прямой примет вид:

$$Xx + Yy + c = 0 \quad (16)$$

где

$$X^2 + Y^2 = 1 \quad (17)$$

Можно сказать, что $\{X, Y\}$ — координаты единичной нормали \vec{n} к прямой (16)

Если φ — угол, который составляет вектор \vec{n} с осью X то

$$X = \cos \varphi, \quad Y = \sin \varphi \quad (18)$$

л. 4. Рассуждение от добрых до злых.

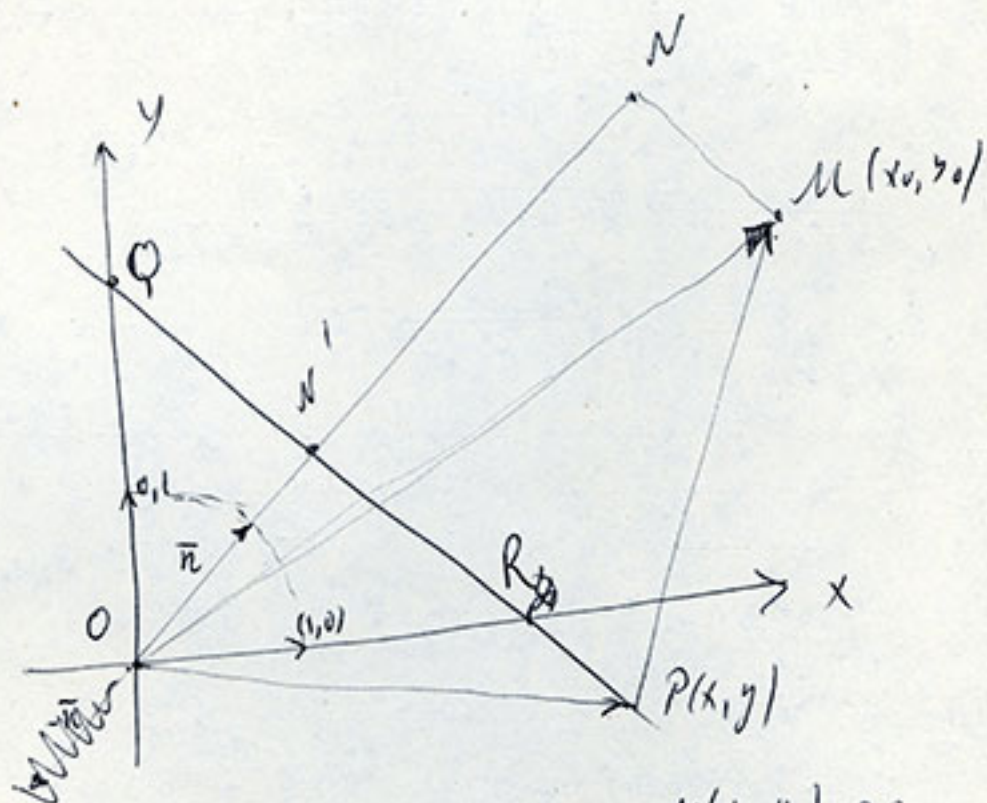


Рис 4. Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до
прямой ~~определяется~~. QR

и уравнение прямой можем записать в виде

$$\cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot y + C = 0$$

(16) (19)

Решим задачу:

Задача. Найти расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0$$

(17) (20)

прямой, проходящей через точку $P(x, y)$ (см. рис. 4)

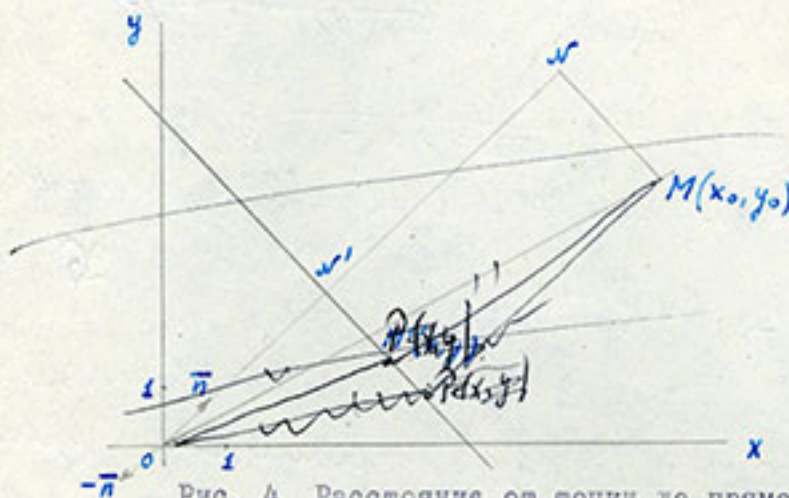


Рис. 4 Расстояние от точки до прямой

$r(x, y)$ — расстояние, найдем выражение, так как прямая OM пересечет нашу прямую в точке M' с координатами x', y' . Построим вектор единичной нормали к нашей прямой, найдем знак μ и соответствующим с рисунком 4.

$$\vec{n} = (X, Y) = \{\mu A, \mu B\}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(18) (21)

Тогда уравнение прямой можем записать в виде:

$$Xx + Yy + C = 0, \quad \text{где } C = \mu C = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (19) (22)$$

Рассмотрим скалярные произведения:


$$\vec{n} \cdot \vec{OM} = Xx + Yy = -C \quad (20) (23)$$

Обобщим равенства (см. п. 4)

$$\vec{n} \cdot \vec{OP} = X \cdot x + Y \cdot y \quad (23)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{OM} = X \cdot x_0 + Y \cdot y_0 \quad (24)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{PM} = X(x - x_0) + Y(y - y_0) \quad (25)$$

Так как точка P лежит на прямой,
то величина $\vec{n} \cdot \vec{PM}$ ^(минус или ее плюс d) ~~есть~~ ~~равна~~ ~~д~~
~~равна~~ расстоянию  от точки $M(x_0, y_0)$
до прямой (22). ~~Отсюда следует~~

$$d = Xx + Yy - Xx_0 - Yy_0 = \dots$$

Привнеси в левую часть (22), получим из (23):

$$d = -(Xx_0 + Yy_0 + c) \quad (26)$$

В нашем рассмотрении мы ~~предположили~~ ^с
конкретным расположением прямой,
точки и начала координат. Возможны
и другие расположения. Все они отличаются
знаком d и c . Величины X и Y определяются
с точностью до знака:

$$X = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad d = \pm \frac{c}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (27)$$

$$d = \pm (Xx_0 + Yy_0 + c) \quad (28)$$

Второй знак с определится
тем же путем, что и первый.
при известном знаке
знака d

Так как точка $M(x, y)$ лежит на прямой (19) (22), то (23)
 следовательно: $\vec{n} \cdot \vec{OM} = Xx_0 + Yy_0 - C$ (24)

$$\vec{n} \cdot \vec{MM'} = X(x_0 - x) + Y(y_0 - y) = d$$

$$\vec{n} \cdot \vec{OM} = Xx_0 + Yy_0 = d$$
(25)

Вспомним, какой смысл имеет скалярное произведение двух векторов.

Скалярное произведение $\vec{n} \cdot \vec{a}$ есть - с точностью до знака - произведение длины единичного вектора \vec{n} на длину проекции вектора \vec{a} на \vec{n} .

В нашем случае расстояние от точки M до прямой (20) - с точностью до знака - скалярное произведение $\vec{n} \cdot \vec{MM'}$.

Посмотрим, какой смысл имеет знак числа d . Нетрудно видеть, что если точка M перемещается, оставаясь по одну сторону от прямой, знак d не меняется, и наоборот, при переходе через прямую знак d меняется. Определим d для начала координат. Тогда

$$x_0 = y_0 = 0, \quad d = C$$

Пусть $M(x_0, y_0)$ произвольная точка плоскости и $d = d(x_0, y_0)$ соответствующее ей число d . Тогда если $d(x_0, y_0)$, C имеют один и тот же знак, точки $M(x_0, y_0)$ и начало координат лежат по одну сторону от прямой, в противном случае - по разные.

Из (20), (21), (22) следует

$$d = Xx_0 + Yy_0 - Xx - Yy = Xx_0 + Yy_0 + C \quad (23)$$

Величина d из (23) дает - с точностью до знака - расстояние

I от точки (x_0, y_0) до прямой, которая имеет вид (19).
 1.5. Решим теперь задачу о Пересечении двух прямых.

Даны две прямые: Найдем точку пересечения двух прямых, заданных уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

(28) (24)

Для этого следует

Найти точку пересечения их. ~~Используя задачу (24) можно дать следующее арифметическое толкование: найти пару чисел (x, y) , удовлетворяющую системе уравнений (28)~~

Эквивалентность уравнений.

Линейное

Если уравнение $Ax + By + C = 0$

умножить на число $\mu \neq 0$

личное от нуля, то мы получим эквивалентное уравнение $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$.

числа $\{x, y\}$ удовлетворяют первому уравнению, то они удовлетворяют и второму и обратно.

Для $\mu \neq 0$ уравнения $Ax + By + C = 0$ и $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$ эквивалентны. Но если $\mu = 0$, то уравнение $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$ обращается в тождество. При $\mu = 0$ уравнения $Ax + By + C = 0$ и $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$ не будут эквивалентны, но можно утверждать, что если числа x, y удовлетворяют первому уравнению, то они удовлетворяют и второму.

Таким образом, второе уравнение при любом μ , является следствием первого: Если x и y удовлетворяют первому уравнению, то при любых μ они удовлетворяют и второму уравнению, т.е. второе уравнение есть следствие первого.

Если x и y удовлетворяют уравнениям системы (28), то они удовлетворяют уравнениям:

$$(A_1 \mp A_2)x + (B_1 \mp B_2)y + C_1 \mp C_2 = 0$$

Более общим образом,

✓ Если x, y удовлетворяют системе (28), то при любых α, β они удовлетворяют уравнению:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0 \quad (29) \quad (26)$$

Иными словами, уравнение (29) является следствием системы (28).
Это становится очевидным, если переписать (28) в виде:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (30) \quad (27)$$

Применим метод исключения неизвестных путем соответствующего подбора α и β .

Положим в (28)

$$\alpha = B_2, \quad \beta = -B_1 \quad (31)$$

Тогда (28) примет вид

$$(B_2A_1 - B_1A_2)x + B_2C_1 - B_1C_2 = 0 \quad (32)$$

Предположим, что $\Delta = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, тогда

$$x = -\frac{B_2C_1 - B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{B_1C_2 - C_1B_2}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (33)$$

Теперь выберем другую комбинацию α и β :

$$\alpha = A_2, \quad \beta = -A_1 \quad (34)$$

Тогда (28) примет вид

$$(A_2B_1 - A_1B_2)y + A_2C_1 - A_1C_2 = 0 \quad (35)$$

Откуда следует

$$y = \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (36)$$

В предположении $\Delta \neq 0$ мы получили для x и y явные выражения.

Решения (32) и (35) являются следствиями системы (28), (33) и (36) - следствия (32) и (35), т.е. формулы (33), (36) дают решение нашей системы и оно является единственным.

п. 6. *определим* второго порядка.
Для дальнейшего удобно ввести понятие определителя второго порядка.

Символ $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ называется определителем второго порядка и расшифровывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1, \quad (37)$$

Тогда формулы решения (33), (36) запишутся в виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad (38)$$

Для дальнейшего введем некоторые определения. Если задан определитель $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, то A_1, B_1 и A_2, B_2 называются соответственно первой и второй строками определителей, A_1, A_2 и B_1, B_2 называются соответственно первым и вторым столбцами определителей.

Рассмотрим элементарные свойства определителей

$$1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1$$

Если поменять местами A_2 и B_1 , то получим определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1 = \Delta$$

Определитель, получающийся в результате замены строк на столбцы, называется транспонированным. Мы получили, что транспонированный определитель равен исходному.

$$2) \quad \begin{vmatrix} B_1 & A_1 \\ B_2 & A_2 \end{vmatrix} = B_1 A_2 - A_1 B_2 = -\Delta = - \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

Если поменять местами столбцы определителя, знак определителя изменится на противоположный. То же справедливо при ~~перестановке~~ ^{перестановке} ~~строк~~ ^{местами} ~~своих строк~~.

$$3) \quad \begin{vmatrix} \lambda A_1 & B_1 \\ \lambda A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \lambda (A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Если элементы столбца умножить на одно и то же число, то определитель умножится на то же число. То же справедливо ~~для строк~~ ^{для строк}. ~~или один и тот же множитель при элементах определителя можно вынести из определителя.~~

Перепишем уравнения (28) в виде:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y &= f_1 = -c_1 \\ A_2 x + B_2 y &= f_2 = -c_2 \end{aligned} \quad (29)$$

Условия (41), (42), (43) можно записать
в более компактной форме. Рассмотрим
векторы A_i, B_i, C_i ($i=1,2$) и их строки:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Матрица (45) $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ называется матрицей Вейсштрасса. Вспомогательная матрица не имеет смысла.

Матрица (45) $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ называется матрицей Вейсштрасса. Вспомогательная матрица не имеет смысла.

Матрица (45) $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ называется матрицей Вейсштрасса. Вспомогательная матрица не имеет смысла.

Матрица (45) $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ называется матрицей Вейсштрасса. Вспомогательная матрица не имеет смысла.

~~н.1. Конструирование линейных систем~~

~~В прошлой лекции мы получили для системы двух уравнений следующие случаи:~~

1. $\Delta \neq 0$ Тогда система имеет одно и только одно решение.

2. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ Все определители, составленные из коэффициентов матрицы, равны нулю. Тогда из двух уравнений существует только одно.

Система имеет бесконечно много решений.

3. $\Delta = 0, \Delta_1^2 + \Delta_2^2 > 0$

Система не имеет конечных решений.

Дадим геометрическое толкование трех случаев алгебраического решения системы двух линейных уравнений.

Вектор \vec{a} с координатами A_1, B_1 есть вектор нормали первой прямой,

Вектор \vec{b} с координатами A_2, B_2 есть вектор нормали второй прямой.

Как было показано в 7ой лекции для того, чтобы векторы $\vec{a}(A_1, B_1)$, $\vec{b}(A_2, B_2)$ были линейно независимы, необходимо и достаточно выполнения условия:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - B_1 A_2 \neq 0 \quad (I)$$

Итак, справедливо утверждение:

Для того, чтобы два вектора были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат векторов был равен нулю.

~~Сейчас видно, что оба упражнения не
ограждают и не развивают, но и
тогда 2 упражнения, если не одно из упражнений
или оба упражнения. Но первый и второй,
и тогда не всем неограниченно
одному упражнению. А это не все упражнения
не ограждают и не
или если~~

Восстановлено, что одно из приложений справочной
и пометки, что ~~такой~~ справочник содержит материал

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{r_2}{r_1} = \mu \quad (2)$$

$\frac{A_1}{B_1} = \frac{C_1}{D_1} = \frac{E_1}{F_1}$
 on nylons on nylons 1, 250 ~~1000~~ 1000
 1000 1000 1000 1000 1000 1000

Условно 3 значения переключателя кнопки,
тажд. для каждого

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

представляет собой и эту же ~~систему~~ систему,
пронизанную дугой (x, y) зовут ~~системой~~ системой
линейных функций.

Копию, выданную 3 октября 1941 года
вместе с ~~копией~~ выдана

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & K_1 \\ A_2 & K_2 \end{vmatrix} = 0$$
 означает наличие вектора

В то же время у меня не складываются

Med. Sch. of Transvaal (1912) ~~Transvaal~~

Вот же самое, что называется идеальным представлением
и некоторым образом

Следовательно, условие (I) означает, что нормали \vec{a}, \vec{b} линейно не-зависимы, т.е. неколлинеарны и составляют между собой некоторый угол, следовательно, прямые также составляют некоторый угол, т.е. они не параллельны. Непараллельные прямые пересекаются в одной точке.

Условие 2

2. $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$ означает, что прямые совпадают.

Условие 3

3. $\Delta = 0$ и $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$ означает, что прямые параллельны. Можно говорить, что они пересекаются в бесконечно удаленной точке.

п.2. Решим задачу Три прямые, принадлежащие одной ^{плоскости}

Найдем ~~необходимое~~ и достаточное условие того, что три прямые пересекаются в одной точке

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

(4)

Будем предполагать, что найдется пара не параллельных прямых, например, вторая и третья прямые.

Так найдем условие

Запишем условие того, что они пересекаются:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5) \quad \text{---}$$

выписи и формулы

Выпишем формулы для координат точки пересечения

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} C_2 & B_2 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} \quad y = - \frac{\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} \quad (6)$$

Таким, мы предположим,

Если три прямые пересекаются в одной точке, тогда точка пересечения второй и третьей прямой должна лежать на первой прямой.

Подставим координаты точки пересечения второй и третьей прямых в уравнение первой прямой.

В результате получим:

$$A_1 \begin{vmatrix} C_2 & B_2 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} - C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

$$A_1 \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

в соответствие квадратной матрицы третьего порядка

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad (8)$$

и обозначается символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

Мы дадим интерпретацию определителю определителю 3-го порядка, которое исполняет определитель определяет 2-го порядка определяет.

то определителю,

$$\Delta = A_1 \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad (10)$$

т.е. Δ равен сумме произведений первых элементов матрицы (8) на соответствующие определители 2-го порядка, сформированные из матрицы (8)

Равенство (7) имеет 4-й член, который представляет пересечение прямых (4) и отсюда ясно, что оно имеет симметричный вид. Минусом

Этот результат не должен зависеть от предположения, какие прямые пересекаются, мы могли бы предположить, что пересекаются первая и вторая прямые и координаты точки пересечения их подставить в уравнение третьей прямой, условие пересечения трех прямых в одной точке мы получили бы в другой форме, но оно должно быть тождественно ранее полученному. Мы могли бы предположить, что пересекаются первая и третья прямые и тогда условие пересечения трех прямых в одной точке получили бы в форме, отличной от первых двух, но оно должно быть тождественно ранее полученным условиям. Естественно предположить, что условие пересечения должно иметь симметричный вид.

Введем понятие определителя третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Как и в случае определителя второго порядка для определителя 3-го порядка, который ставится

Мы определили, что такое определитель второго порядка.

Представим определитель третьего порядка с помощью определителей второго порядка (индуктивное определение).

Разложим определитель по элементам первой строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = A_1 \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

Будем называть элементарным определителем второго
матрицы (8) вариантом соответствующего
~~варианта~~ 2-го порядка будем называть дополнительным
детерминантом элемента, если он выражается суммой
матрицы 2-го порядка, получаемой из матрицы (8)
выбрасыванием строки и столбца, на пересечении
которых лежит элемент. Например, дополнительным
элементом A_1 является определитель

$$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \text{ дополнительным элементом } B_2 \text{ является}$$
определитель
$$\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

то определяется

$$\Delta = A_1 \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad (10)$$

т.е. Δ равен сумме произведений элементов
первой строки на их дополнения, каждое с
соответствующим знаком. Тогда как знаки + и - чередуются
первоначально как знаки выражения детерминанта
элементарного суммы

Выражение в правой части (10) или другим образом
альтернативно суммы, и наоборот и виду представления
знаков +, - каждый из представления
в правой части (10) нарушается симметрией, а именно не
свойство группы и коммутативности или взаимности
таких сумм группы действительности

Чередование знаков в (10) не нарушается симметрией,
а наоборот, ее устанавливает. Действительно,
в правой определителе каждый второй порядок такой представление
те или место и. Тогда, например,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - B_1 A_2$$

т.е. определяется второй порядок если альтернативно
сумма произведений элементов первой строки на
дополнительные элементы второй строки.

Отсюда следует, что изменение знака строки или столбца в матрице и изменение знака определителя. Для знака Δ - алгебраическое дополнение (знакопеременная) - строка определителя удвоенной матрицы строки строки или столбца определителя знак, с соответствующим элементом строки строки элементу соответствующий элементу строки строки на Таблице

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(11)

называется предположение знаков и элементов, соответствующим матрице (8). Отсюда мы знаем ответ к дополнению элементов, которые в этом случае называются алгебраическим дополнением.

Мы можем сказать в этом случае, что если сумма произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения. Киргизов знает, что такое определение справедливо для любой строки и столбца т.е. определитель и если сумма произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Вспомогательная строка. Также первая предположение называется разложением по элементам строки или столбца. Так, предположение (10) если разложение по элементам первой строки

~~анал~~ ^{и правил} Разложим определитель по элементам второй строки, ~~находя~~

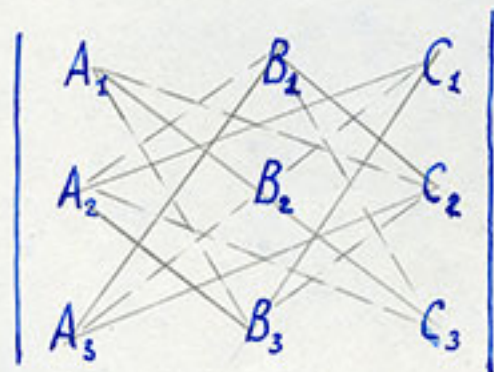
$$\Delta = -A_2 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} + B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} - C_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \quad (12) \leftarrow (8)$$

~~анал~~ ^{соответственно} Разложим определитель по элементам третьей строки,

$$\Delta = A_3 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_3 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad (13) \leftarrow (9)$$

Можно дать другое правило вычисления определителя третьего порядка. Схематически показано на рисунке I :

$$\Delta = A_1 B_2 C_3 + B_1 C_2 A_3 + C_1 A_2 B_3 - A_1 C_2 B_3 - B_1 A_2 C_3 - C_1 B_2 A_3 \quad (14) \leftarrow (10)$$



Вис. I. Произведения, соответствующие вершинам треугольников нарисованных сплошной линией, берутся со знаком "+", треугольников, нарисованных пунктирной линией, берутся со знаком "-".

п.3. ~~Центр тяжести~~ Центр тяжести треугольника

Покажем, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (центр тяжести)

Вершины треугольника: $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$

Середины сторон треугольника: $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), B_3(x_3, y_3)$

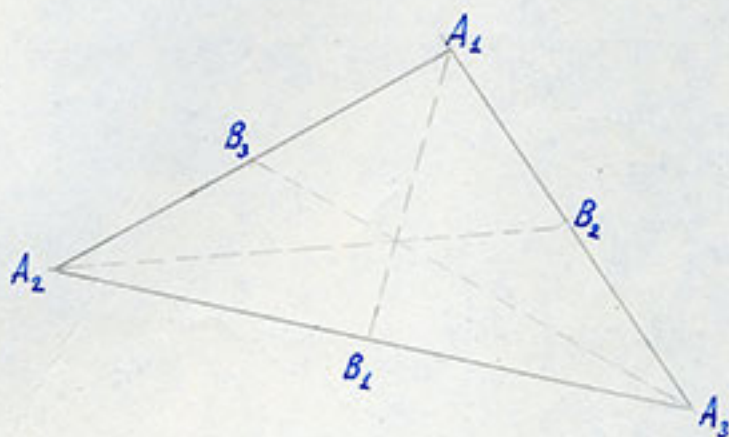


Рис.2

Пользуясь задачей о делении отрезка в данном отношении (см. лекцию 8), найдем координаты середины отрезка

$$x_1 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_1 = \frac{y_2 + y_3}{2} \quad (15)$$

Аналогично имеем

$$x_2 = \frac{x_3 + x_1}{2}, \quad y_2 = \frac{y_3 + y_1}{2} \quad (16)$$

$$X_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad Y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (17)$$

Уравнение медианы $A_2 B_1$ имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (18)$$

Принимая во внимание равенство (15), получаем из (18) после алгебраических преобразований

$$(y_2 + y_3 - 2y_1)x - (x_2 + x_3 - 2x_1)y - x_1(y_2 + y_3 - 2y_1) + y_1(x_2 + x_3 - 2x_1) = 0 \quad (19)$$

Аналогично получаются уравнения других медиан:

$$(y_3 + y_1 - 2y_2)x - (x_3 + x_1 - 2x_2)y - x_2(y_3 + y_1 - 2y_2) + y_2(x_3 + x_1 - 2x_2) = 0 \quad (20)$$

$$(y_1 + y_2 - 2y_3)x - (x_1 + x_2 - 2x_3)y - x_3(y_1 + y_2 - 2y_3) + y_3(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0 \quad (21)$$

Составим определитель из коэффициентов при x и y и свободных членов уравнений:

$$\begin{vmatrix} y_2 + y_3 - 2y_1; & -(x_2 + x_3 - 2x_1); & -x_1(y_2 + y_3 - 2y_1) + y_1(x_2 + x_3 - 2x_1) \\ y_3 + y_1 - 2y_2; & -(x_3 + x_1 - 2x_2); & -x_2(y_3 + y_1 - 2y_2) + y_2(x_3 + x_1 - 2x_2) \\ y_1 + y_2 - 2y_3; & -(x_1 + x_2 - 2x_3); & -x_3(y_1 + y_2 - 2y_3) + y_3(x_1 + x_2 - 2x_3) \end{vmatrix} \quad (19) \quad (22)$$

Вторая и третья строки определителя получаются из первой в результате циклической замены $(2, 3, 1) - (3, 1, 2) - (1, 2, 3)$ индексов ~~координат точек~~. $1, 2, 3$.

Вычислив определитель, мы убедимся в том, что он тождественно равен нулю. Равенство нулю определителя и есть условие того, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

На этом мы заканчиваем рассмотрение прямой в плоскости и переходим к следующему разделу.

Находим точку пересечения прямой (19), (20)
 Пусть заданы системы двух уравнений
 (19), (20), найдем координаты центра тяжести,
 т.е. точку пересечения медиан:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

(23)

Значит можно просто выбрать базисные, если ^{мы} воспользуемся косоугольной системой координат. Ее можно выбрать так, чтобы одна вершина (A_3) являлась началом координат, т.е. началом базисных векторов, а другие вершины (A_1, A_2) — их концами (см. рис.).

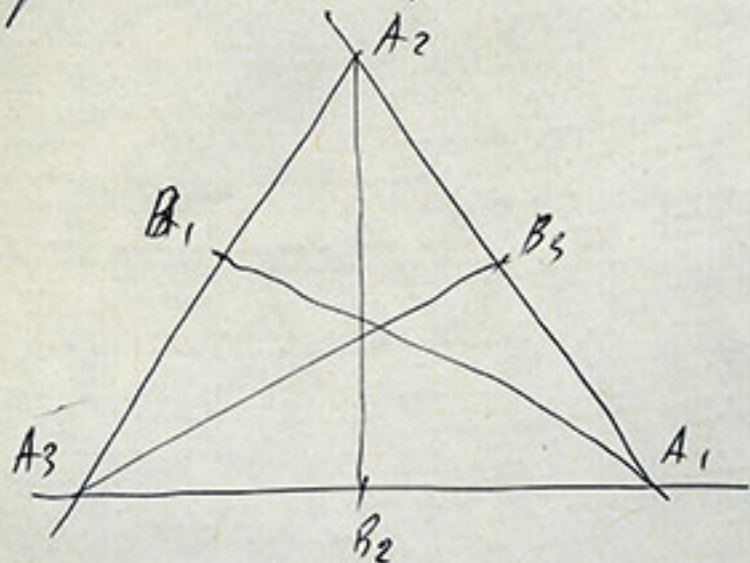


Рис 3 Косоугольная система координат в задачах о медианах

Многа точки A_i, B_i будут иметь координаты:

$$A_3 (0,0), A_1 (1,0), A_2 (1,0)$$

$$B_1 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), B_2 (\frac{1}{2}, 0)$$

$$A_1 (1,0), A_2 (0,1), A_3 (0,0)$$

(23)

$$B_1 (0, \frac{1}{2}), B_2 (\frac{1}{2}, 0), B_3 (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

Уравнения прямых A_i, B_i имеют вид

$$A_1 B_1: x + 2y - 1 = 0$$

$$A_2 B_2: 2x + y - 1 = 0$$

$$A_3 B_3: x - y + 0 = 0$$

(24)

Hemipyrus

Thompson

superintendent

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

concrete (24) taken by hand.

Unbeimel

Dakota