

М Е Т О Д

ДРОБНЫХ ШАГОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ.

Задача Коши
в банаховом пространстве

П. I Класс рассматриваемых задач. В нашем курсе лекций мы ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = L(x,t,D) U(x,t) + f(x,t) \quad (I.1)$$

$$\text{где } U(x,t) = \{u_1(x, \dots, x_m, t), u_2(x, \dots, x_m, t), \dots, u_n(x, \dots, x_m, t)\} \quad (1)$$

$$f(x,t) = \{f_1(x, \dots, x_m, t), f_2(x, \dots, x_m, t), \dots, f_n(x, \dots, x_m, t)\}$$

- векторные функции векторного пространственного аргумента $x = (x_1, \dots, x_m)$ и времени t , $L(x,t,D)$ -
- дифференциальный линейный оператор - матрица, с переменными коэффициентами,

$$D = \{D_i\}, \quad i = 1, \dots, m; \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Расписанное в индексах уравнение (I.1) принимает вид:

$$\frac{\partial u_i(x_1, \dots, x_m, t)}{\partial t} = \sum_{j, \alpha} a_{i,j, \alpha_1, \dots, \alpha_m}(x_1, \dots, x_m, t) D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} u_j(x_1, \dots, x_m, t) + f_i(x_1, \dots, x_m, t); \quad \alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0 \quad (I.2)$$

Мы будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij\alpha}$, f_i системы (I.2) достаточно гладки, и сама система корректна в определенном смысле.

Для системы (I.1) можно поставить задачу Коши в полосе $|x| < \infty$, $0 \leq t \leq T$: $U(x,0) = U_0(x)$ (I.3)

или же смешанную задачу Коши в цилиндре $\Omega = D \times T$ (I.4)

где D есть некоторая область в гиперплоскости $t=0$ с границей δ , $T = \{0 \leq t \leq T\}$, $x \in D$ (4)

Тогда к начальным данным (I.3) следует присоединить некоторое краевое условие

$$L(x,t,D) U = \varphi(x,t), \quad (I.5)$$

справедливое на боковой поверхности $\Gamma = \delta \times T$ области Ω .
 Здесь $\mathcal{L}(x, t, D)$ есть некоторый дифференциальный оператор от символов $D_0 = \frac{\partial}{\partial t}; D_1, \dots, D_m$; $\varphi(x, t)$ векторная функция.

В дальнейшем в общем рассмотрении мы ограничимся задачей (I.1), (I.3), обращаясь к задаче (I.1), (I.3), (I.5) только на конкретных примерах. Введем в рассмотрение оператор перехода. Пусть $U(x, t)$ есть решение однородной задачи Коши (I.1), (I.3) с некоторой $U_0(x)$. Соотношение

$$U(x, t_2) = S(t_2, t_1) U(x, t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (I.6)$$

определяет оператор перехода $S(t_2, t_1)$

Будем предполагать, что $U(x, t), f(x, t)$ при произвольно фиксированном t принадлежат некоторому банахову пространству B , а оператор перехода $S(t_2, t_1)$ определен в B .
 Определение

Задача (I.1), (I.3) называется корректной, если

$$\|S(t, 0)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t \leq T \quad (I.7)$$

Система (I.1) называется корректной, если

$$\|S(t_2, t_1)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T \quad (I.8)$$

Система (I.1) называется равномерно корректной, если в норме B справедлива оценка:

$$\|S(t_2, t_1)\| \leq 1 + C(t, \tau) \cdot \tau \quad \|S(t_2, t_1)\| \leq e^{\int_{t_1}^{t_2} C(t, \tau) d\tau} \quad (I.9)$$

$$|C(t, \tau)| \leq M(T) \quad \text{для всех } t, \tau, t + \tau \leq T. \quad (I.10)$$

Ясно, что из равномерной корректности системы следует ее корректность, и из корректности системы следует корректность задачи.

В дальнейшем будем рассматривать только равномерно корректные системы. Кроме того, будем предполагать, что система (I.1) обладает следующим свойством (свойство С):

а) Если функции $U_0(x), f(x, t) \in C_p$, то $U(x, t) \in C_p$ и φ становится достаточно большим при p достаточно большим.

б) C_p плотно в B .

Конечно, свойство С требует достаточной гладкости коэффициентов $\alpha_{ija}(x,t)$ из (I.2).

П. 2 Однородные схемы. Пусть

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda, U^{n+1} + \Lambda_0 U^n + F^n \quad (2.1)$$

есть однородная двухслойная разностная схема, соответствующая системе (I.I). Здесь

$$U^n(x) = U(x_1, \dots, x_m, n\tau)$$

$$F^n(x) = F(x_1, \dots, x_m, n\tau)$$

суть векторные функции, $\Lambda_0(x, t, \tau, h, T)$, $\Lambda_1(x, t, \tau, h, T)$ разностные операторы-матрицы с переменными коэффициентами,

$$T = \{T_\alpha\}, \quad \alpha = -q_\alpha, -q_\alpha + 1, \dots, q_\alpha,$$

где операторы сдвига T_α определяются формулами:

$$\begin{aligned} T_i U(x_1, \dots, x_m) &= U(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_m) \\ T_{-i} U(x_1, \dots, x_m) &= U(x_1, \dots, x_i - h_i, \dots, x_m), \quad T_{-i} = T_i^{-1} \end{aligned} \quad (2.2)$$

В индексной записи схема (2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} &= \sum_{j, \beta} b_{ij\beta_1, \dots, \beta_m}(x, t, \tau, h) T_i^{\beta_1} \dots T_m^{\beta_m} U_j^{n+1} + \\ &+ \sum_{j, \beta} c_{ij\beta_1, \dots, \beta_m} T_i^{\beta_1} \dots T_m^{\beta_m} U_j^n + F_i^n(x, t, \tau, h) \end{aligned} \quad (2.3),$$

где индексы β могут пробегать как положительные, так и отрицательные значения.

Мы предполагаем, что $|\beta| \leq \theta$, где θ не зависит от τ, h . ~~Иными словами, рассматриваемые разностные операторы являются локальными.~~ *функции*

В практическом счете равенства (2.1) рассматриваются в точках сетки, и тогда запись (2.3) должна быть дополнена сеточными индексами:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i, k_1, \dots, k_m}^{n+1} - U_{i, k_1, \dots, k_m}^n}{\tau} &= \sum_{j, \beta} b_{ij\beta_1, \dots, \beta_m} U_{j, k_1 + \beta_1, \dots, k_m + \beta_m}^{n+1} + \\ &+ \sum_{j, \beta} c_{ij\beta_1, \dots, \beta_m} U_{j, k_1 + \beta_1, \dots, k_m + \beta_m}^n + F_{i, k_1, \dots, k_m}^n \end{aligned} \quad (2.4).$$

$C(t, h, \frac{h}{t})$

$$\|e(t_2, t_1)\| \leq e^{\beta(t_2 - t_1)} \quad (10)$$

где $\beta = \beta(J)$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$.

В теоретическом исследовании мы будем рассматривать операторы Λ, Λ_0 действующими в том же пространстве B , что и оператор $\mathcal{L}(x, t, \mathcal{D})$ из (I.I) и считать функции $U^n(x)$ принадлежащими к B . Поставим для (2.1) задачу Коши:

$$U^0(x) = U_0(x) \quad (2.5)$$

Пусть $U^n(x)$ есть решение однородной задачи Коши (2.1), (2.5) ($F^n = 0$). Тогда равенство

$$U^{n+1}(x) = \mathcal{E}(\tau, h, t, t+\tau) U^n(x), \quad t = n\tau \quad (2.6)$$

Поставим для (2.1) задачу Коши:

(2.5)

определяет разностный оператор шага τ равенство

$$U^n(x) = \mathcal{E}(\tau, h, t_1, t_2) U^m(x), \quad t_1 = m\tau < t_2 = n\tau \leq T \quad (2.7)$$

определяет разностный оператор перехода

Определение:

Задача Коши (2.1), (2.5) корректна, если

$$\|\mathcal{E}(\tau, h, t, 0)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t = n\tau \leq T \quad (2.8)$$

Схема (2.1) корректна, если

$$\|\mathcal{E}(\tau, h, t_1, t_2)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t_1 = m\tau < t_2 = n\tau \leq T \quad (2.9)$$

равномерно корректна, если

$$\|\mathcal{E}(\tau, h, t, t+\tau)\| \leq 1 + C(\tau, h, t) \cdot \tau \quad (2.10)$$

$$|C(\tau, h, t)| \leq M(T), \quad t + \tau \leq T \quad (2.11)$$

устойчива, если $\|\mathcal{E}(\tau, h, t_1, t_2)\| \leq 1$

$\mathcal{E}(11)$,

асимптотически устойчива, если

$$\|\mathcal{E}(\tau, h, t_1, t_2)\| \rightarrow 0, \quad t_2 \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

равномерно устойчива, если

$$\|\mathcal{E}(\tau, h, t, t+\tau)\| = 1 - C(\tau, h, t) \tau \quad (2.14)$$

$$C(\tau, h, t) \geq f(h, \tau) > 0 \quad (2.15)$$

Данное определение без труда переносится на случай произвольных шагов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$

$$\tau_1 = t_1 - t_0, \quad \tau_2 = t_2 - t_1, \dots, \quad \tau_n = t_n - t_{n-1}$$

Заметим, что данное нами определение корректности требует указания закона предельного перехода:

$$h_i = h_i(\tau), \quad h_i \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

при котором справедливы соотношения (2.8) - (2.16)

О п р е д е л е н и е .

Схема (2.1) аппроксимирует (1.1), если равномерно по t

$$\| \tilde{L}(\tau, h, t, t+\tau) - S(t, t+\tau) \| U \rightarrow 0 \quad (15) \quad (2.17)$$

при $\tau \rightarrow 0$ для гладких решений $U(x, t)$

задачи (1.1), (1.3).

Справедлива следующая теорема

Т е о р е м а эквивалентности. Если схема (2.1) аппроксимирует уравнение (1.1), то для того, чтобы решение $U(\tau, h, x, t)$ задачи (2.1), (2.5) сходилась в B к решению $U(x, t)$ задачи (1.1), (1.3), необходимо и достаточно, чтобы задача (2.1), (2.5) была корректной.

Корректность разностной задачи является самостоятельным требованием, не вытекающим из свойства аппроксимации.

Покажем это на примере уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть
$$\frac{\partial U}{\partial t} = L(D)U \quad (27) \quad (2.18)$$

есть уравнение с постоянными коэффициентами, где u - скалярная функция от x_1, \dots, x_m, t

$$L(D) = a_0 + a_1 D_1 + \dots + a_m D_m + \dots \quad (28) \quad (2.19)$$

- полином от операторов дифференцирования D_i .

В этом случае справедлив простой критерий корректности.

Пусть $U = U_0 e^{i(\omega t + kx)}$ (29) (29) (2.20)

есть решение (2.18). Для того, чтобы это было решением (2.18), необходимо и достаточно, чтобы ω, k были связаны соотношением (т.н. дисперсионное, или характеристическое, уравнение)

$$\omega = L(ik) \quad (30) \quad (2.21)$$

* Теорема Лакса (см. [3, 4])

интересная функция . прел . дурне

Система ^(2.18) ~~(2.18)~~ корректна в $L_2(-\infty, \infty)$ тогда и только тогда

$$Re \omega(i\kappa) \leq M\epsilon, \quad (31) \quad (2.22)$$

для всех κ , M - константа, не зависящая от κ .

Пусть
$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \mathcal{L}(\Delta) u^n \quad (32) \quad (2.23)$$

есть явная однородная аппроксимация ~~(2.18)~~ ^(2.27)

Δ - некоторая аппроксимация \mathcal{L} , например

$$\Delta_i = \frac{\tau_i - E}{h_i} \sim \mathcal{L}_i \quad (2.29) \quad (32)$$

Тогда ~~(2.20)~~ может быть решением ~~(2.23)~~ при условии (разностное дисперсионное уравнение):

$$\frac{e^{\omega \tau} - 1}{\tau} = \mathcal{L} \left(\frac{e^{i\kappa h} - 1}{h} \right) \quad (33) \quad (2.24)$$

Необходимым и достаточным условием корректности ~~(2.23)~~ является снова неравенство ^{сложно (32)}

$$Re \omega(\tau, h, \kappa) \leq M_2 \quad (33) \quad (2.22), \quad (34)$$

где на этот раз ω определяется из ~~(2.24)~~, M_2 не зависит от κ, τ, h . При ограниченных $\kappa < K$, $\tau, h \rightarrow 0$

$$\omega(\tau, h, \kappa) \rightarrow \omega(\kappa) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{i\kappa h} - 1}{h} \quad (35)$$

и, следовательно, на классе функций \in финитным образом

^{и рас} ~~уравнение~~ дисперсионное уравнение ~~(2.24)~~ аппроксимирует уравнение ~~(2.21)~~, а разностная схема ~~(2.23)~~ будет корректной на этом классе. ⁽³²⁾

Однако, практически имеет место другая ситуация: τ, h малы, но конечны, и K - сколько угодно или достаточно велики. Отсюда следует, что $\omega(\tau, h, \kappa)$ может как угодно сильно отличаться от $\omega(\kappa)$, и условие ~~(2.22)~~ не следует из условия ~~(2.22)~~. ⁽³¹⁾ ₍₃₄₎

Таким образом, разностные схемы должны удовлетворять двум независимым требованиям:

1. Аппроксимация

2. Корректность

Как мы ^{видим} дальше, эти требования не только независимы, но и в известной мере вступают в противоречие одно с другим.

Кроме требований 1), 2), которые являются безусловными,

разностные схемы должны удовлетворять еще ряду требований, которые носят менее категоричный характер, но практически необходимы. В первую очередь это требование

Экономичность схемы.

Мерой экономичности служит некоторое условное машинное время.

Экономичность разностной схемы есть не только средство экономии машинного времени, но в некоторых случаях и необходимое условие реализации схемы в виде программы.

Ясно, что оценки экономичности тесно связаны с конструкцией ЭВМ. Если, например, машина обладает сравнительно большой оперативной памятью, то удобными становятся многослойные схемы. Если же оперативная память машины мала, а обращение к внешней памяти связано с большой затратой времени, то предпочтительнее двухслойные схемы.

При интегрировании нелинейных уравнений с частными производными критерии аппроксимации и корректности сильно усложняются. Поэтому почти обязательным является требование

Дивергентность схемы. *

Эти требования можно было бы умножить, но и без того становится ясным, что построение хорошей разностной схемы является очень сложной задачей.

В Примеры

Мы поясним наши соображения некоторыми примерами.

Введем сначала ряд понятий.

Схема (2.1) является безусловно (абсолютно) корректной, если она корректна при любом законе предельного перехода $\bar{t} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$; условно корректной, если она корректна при некотором законе предельного перехода; безусловно (абсолютно) аппроксимирующей (I.I), если она аппроксимирует (I.I) при любом законе предельного перехода; условно аппроксимирующей, если она аппроксимирует (I.II) только при некотором законе предельного перехода.

* Разностная схема называется дивергентной (консервативной), если она автоматически сохраняет.

Рассмотрим четыре схемы интегрирования для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \text{const} > 0 \quad (3.1)$$

I. Схема "крест" (схема Ричардсона):

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^n, \quad \Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1} \quad (3.2)$$

Аппроксимация, как легко проверяется, имеет 2-й порядок. Положим $\rho = e^{\omega \tau}$. Тогда дисперсионное уравнение для схемы (3.2) имеет вид:

$$\rho^2 + 8z \sin^2 \frac{\kappa h}{2} \rho - 1 = 0, \quad z = \frac{a^2 \tau}{h^2} \quad (3.3)$$

Отсюда
$$\rho_{1,2} = -4z \sin^2 \frac{\kappa h}{2} \pm \sqrt{(4z \sin^2 \frac{\kappa h}{2})^2 + 1}$$

Норма оператора шага равна $4z + \sqrt{1+4z}$

При любых τ, h схема (3.2) абсолютно неустойчива. ИИтак, схема "крест" абсолютно аппроксимирует, но абсолютно неустойчива.

II - Схема "ромб" (схема Дюфорта - Френкеля)

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{a^2}{h^2} [T_1 u^n + T_{-1} u^n - (u^{n-1} + u^{n+1})] \quad (3.4)$$

Схема преобразуется к виду:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{a^2}{h^2} \Delta_1 \Delta_{-1} u^n - \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} \quad (3.4^I)$$

Дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\rho^2 - \frac{4z \cos \kappa h}{1+2z} \rho + \frac{2z-1}{2z+1} = 0$$

Отсюда:

$$\rho = \frac{2z \cos \kappa h \pm \sqrt{(2z \cos \kappa h)^2 - 4z^2 + 1}}{2z+1} = \frac{2z \cos \kappa h \pm \sqrt{1-\varepsilon}}{2z+1},$$

$$\varepsilon = 4z^2(1 - \cos^2 \kappa h) \geq 0$$

Если $\varepsilon > 1$, то корни ρ_1, ρ_2 комплексные сопряженные и имеют модуль

если $\varepsilon < 1$, то $\sqrt{1-\varepsilon} = \theta < 1$

$$|\rho| = \left| \frac{2z \cos \kappa h \pm \theta}{2z+1} \right| \leq 1$$

Таким образом, схема "ромб" абсолютно устойчива. Проверим аппроксимацию. Пользуясь (3.4^I), видим, что схема "ромб" аппроксимирует уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

При законе предельного перехода

$$\frac{a^2 \tau^2}{h^2} = \gamma = \text{Const}$$

схема "ромб" аппроксимирует уравнение теплопроводности (3.1).

При законе предельного перехода

$$\frac{a \tau}{h} = \kappa = \text{Const}$$

схема "ромб" аппроксимирует уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.5)$$

Таким образом, схема "ромб", являясь абсолютно устойчивой и явной, неабсолютно аппроксимирует уравнение теплопроводности.

III. Явная двухслойная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^n \quad (3.6)$$

Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\rho = \left(1 - 4\tau \sin^2 \frac{\kappa h}{2} \right) \quad (3.7)$$

Схема (3.6) корректна при условии

$$\gamma = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

т.е. условно устойчива.

Нетрудно видеть, что схема (3.6) абсолютно аппроксимирует (3.1). Таким образом, схема (3.6) абсолютно аппроксимирует уравнение (3.1), но условно устойчива.

IV. Неявная двухслойная схема:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{a^2}{h^2} \Delta_1 \Delta_{-1} \left[\alpha u^{n+1} + (1-\alpha) u^n \right], \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.9)$$

Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\rho = \frac{1 - 4\tau(1-\alpha) \sin^2 \frac{\kappa h}{2}}{1 + 4\tau(1+\alpha) \sin^2 \frac{\kappa h}{2}} \quad (3.10)$$

Ясно, что схема (3.9) абсолютно аппроксимирует (3.1)

При $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (3.9) является также и абсолютно устойчивой в L_2 .

При $\alpha = 1$ схема (3.9) абсолютно устойчива в C , т.к. удовлетво-

ряет принципу максимума. При $\tau \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}$ схема (3.9)
~~условно устойчива в C ,~~ при $\tau \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)}$ схема (3.9)
~~условно устойчива в L_2 .~~

Приведенные примеры показывают, что абсолютно корректными и аппроксимирующими схемами могут быть только неявные схемы. Повидимому, это верно и в общем случае.

Для практических расчетов схемы, обладающие одновременно качеством абсолютной аппроксимации и корректности, особенно удобны.

метод факторизации (прогонки)

п.4 Для реализации неявной схемы (3.9) применяется метод факторизации, который заключается в представлении оператора второго порядка $E + \alpha \tau \Delta, \Delta_{-1}$

в виде произведения двух операторов первого порядка. Для разностного уравнения 2-го порядка:

$$A_i U_{i-1} + B_i U_i + C_i U_{i+1} = f_i \quad (4.1)$$

формулы прогонки имеют вид:

$$a) U_i = X_i U_{i+1} + Y_i \quad (4.2)$$

$$b) X_i = -\frac{C_i}{B_i + A_i X_{i-1}}, \quad Y_i = \frac{f_i - A_i Y_{i-1}}{B_i + A_i X_{i-1}}$$

Для схемы (3.9) имеем, полагая $U_i^{n+1} = U_i$:

$$A_i = C_i = \alpha \tau, \quad B_i = -1 - 2\alpha \tau, \quad f_i = -[E - (1-\alpha)\tau \Delta, \Delta_{-1}] U_i^n \quad (4.3)$$

$$\text{Отсюда: } X_i = \frac{\alpha \tau}{-(1+2\alpha \tau) + \alpha \tau X_{i-1}} = \frac{1}{\frac{1+2\alpha \tau}{\alpha \tau} - X_{i-1}} = \frac{1}{(2 + \frac{1}{\alpha \tau}) - X_{i-1}} \quad (4.3)$$

$$Y_i = \frac{f_i - \alpha \tau Y_{i-1}}{-(1+2\alpha \tau) + \alpha \tau X_{i-1}} = \frac{Y_{i-1} - \frac{1}{\alpha \tau} f_i}{(2 + \frac{1}{\alpha \tau}) - X_{i-1}}$$

Величины X_0, Y_0 определяются из краевых условий на левом конце. Например, если для уравнения (3.9) решается краевая задача:

$$a) \frac{\partial U(0,t)}{\partial t} = 0; \quad b) U(1,t) = 1 \quad (4.4)$$

$$U(x,0) = U_0(x)$$

то X_0, Y_0 определяются из прогоночного соотношения

$$U_0 = X_0 U_1 + Y_0 \quad (4.5)$$

Откуда, для удовлетворения краевого условия (4.4 а) необходимо и достаточно

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = 0. \quad (4.6)$$

После этого с помощью соотношений (4.2) рекуррентно определяются X_i, Y_i .

Из правого условия (4.4б) определяется U_n ($n h = 1$) и из соотношения (4.2а) справа налево определяются U_i .

Нетрудно видеть, что схема прогонки является пространственно устойчивой, т.е. в рекуррентном счете X_i, Y_i, U_i , ошибка не возрастает.

Алгоритм прогонки очень эффективен и число операций на шаг в схеме (3.9) только примерно в 5 раз больше числа операций на шаг в простой схеме (3.6)

Учитывая это видим, что применение неявной схемы становится экономическим выгодным, если $\frac{\tau_2}{\tau_1} > 5$

где τ_1 - шаг явной схемы, τ_2 - шаг неявной схемы, допустимый в смысле точности.

Можно рассмотреть функцию

П.5. Иначе обстоит дело при переходе к многомерному уравнению теплопроводности. Рассмотрим, например, двумерное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

По аналогии с одномерным случаем, применим однородную неявную схему:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda [\alpha U^{n+1} + (1-\alpha) U^n] \quad (5.2)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_1 = \alpha^2 \frac{\Delta_1 \Delta_1^{-1}}{h_1^2}, \quad \Lambda_2 = \alpha^2 \frac{\Delta_2 \Delta_2^{-1}}{h_2^2} \quad (5.3)$$

В этом случае на каждом шаге приходится решать систему уравнений:

$$\alpha \tau_1 (U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) + \alpha \tau_2 (U_{i,j-1} + U_{i,j+1}) + [1 - 2\alpha(\tau_1 + \tau_2)] U_{i,j} = f_{i,j} \quad (5.4)$$

где $f_{i,j} = -[E + (1-\alpha)\Lambda] U_{i,j}^n, \quad U_{i,j} = U_{i,j}^{n+1}$

Для решения (5.4) применяется метод матричной факторизации.

Метод матричной факторизации был разработан, обоснован и успешно применен для задач математической физики группой советских математиков (Келдыш М.В., Гельфанд И.М., Бабенко Е.И., Локуциевский О.Н., Ченцов Н.Н. и др.) [5]

Г.И.Марчук [6] с успехом применил этот метод для решения задач нейтронной физики.

Мы вкратце опишем этот метод на примере двумерного уравнения теплопроводности (5.1). Уравнения (5.4) можно записать в матричной форме:

$$A_i \bar{U}_{i-1} + B_i \bar{U}_i + C_i \bar{U}_{i+1} = \bar{f}_i \quad (5.5)$$

где \bar{U}_i , \bar{f}_i суть векторы $\{U_{i,j}\}$, $\{f_i\}$.

Матрицы A_i , B_i , C_i , действуют в N_2 -мерном пространстве свободных компонент с индексом j :

$$A_i = \begin{vmatrix} \alpha z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha z_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha z_1 \end{vmatrix} = \alpha z_1 I = C_i \quad (5.6)$$

$$B_i = \begin{vmatrix} 1+2\alpha(z_1+z_2) & \alpha z_2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha z_2 & 1+2\alpha(z_1+z_2) & \alpha z_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+2\alpha(z_1+z_2) \end{vmatrix}, i=1, \dots, N. \quad (5.7)$$

$$A_0 = 0, C_{N+1} = 0$$

Вид матриц A_i , B_i и условия (5.7) соответствуют первой краевой задаче для прямоугольника

$$x = ih_1, \quad i = 0, 1, \dots, N_1+1;$$

$$y = jh_2, \quad j = 0, 1, \dots, N_2+1;$$

индексы $0, N_1+1, N_2+1$ отвечают границе прямоугольника.

По аналогии с методом ~~простейшей~~ прогонки, положим:

$$\bar{U}_i = X_i \bar{U}_{i+1} + Y_i \quad (5.8)$$

подставляя (5.8) в (5.5), получим:

$$A_i X_{i-1} \bar{U}_i + (B_i X_i + C_i) \bar{U}_{i+1} = \bar{f}_i - A_i Y_{i-1} - B_i Y_i \quad (5.9)$$

Умножая (5.9) слева на матрицу $(A_i X_{i-1})^{-1}$ находим:

$$\bar{U}_i + (A_i X_{i-1})^{-1} (B_i X_i + C_i) \bar{U}_{i+1} = (A_i X_{i-1})^{-1} [\bar{f}_i - A_i Y_{i-1} - B_i Y_i] \quad (5.10)$$

Сравнивая (5.10) с (5.8), получаем

$$X_i = - (A_i X_{i-1})^{-1} (B_i X_i + C_i) \quad (5.11)$$

$$Y_i = (A_i X_{i-1})^{-1} [\bar{f}_i - A_i Y_{i-1} - B_i Y_i]$$

Отсюда получаются рекуррентные соотношения

$$X_i = - (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} C_i \quad (5.12)$$

$$Y_i = - (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} (\bar{f}_i - A_i Y_{i-1})$$

Из краевых условий находим

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = \bar{U}_0 \quad (5.13)$$

Условия (5.13) представляют собой начальные данные для рекуррентных соотношений (5.12), которые позволяют последовательно определить X_i, Y_i до $i = N_1 + 1$. Соотношение

$$\bar{U}_{N_1} = X_{N_1} \bar{U}_{N_1+1} + Y_{N_1} \quad (5.14)$$

позволяет определить \bar{U}_{N_1} по известному из правого условия \bar{U}_{N_1+1} , после чего U_i последовательно определяются с помощью соотношений (5.8). Таким образом, схема матричной прогонки вполне аналогична обычной прогонке, с той только разницей, что вместо скалярных величин X_i, Y_i, U_i мы "прогоняем" векторы $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{U}_i$. Коэффициенты A_i, B_i, C_i становятся матрицами и все операции следует понимать как матричные.

Если коэффициенты уравнения теплопроводности переменные, то для каждого i приходится обращать матрицу порядка N_2 что является трудоемкой операцией.

Поэтому применение матричной факторизации для уравнения теплопроводности в прямоугольной области может быть рекомендовано, когда N_2 не особенно велико. Еще более сложный алгоритм возникает при решении трехмерной задачи.

Причиной резкого увеличения числа операций является увеличение размерности разностного оператора на верхнем шаге по сравнению с одномерным случаем. Можно сделать попытку уменьшить размерность разностного оператора на верхнем шаге.

Умножая (5.9) слева на матрицу $(A_i X_{i-1})^{-1}$ находим:

$$\bar{U}_i + (A_i X_{i-1})^{-1} (B_i X_i + C_i) \bar{U}_{i+1} = (A_i X_{i-1})^{-1} [\bar{f}_i - A_i Y_{i-1} - B_i Y_i] \quad (5.10)$$

Сравнивая (5.10) с (5.8), получаем

$$X_i = - (A_i X_{i-1})^{-1} (B_i X_i + C_i) \quad (5.11)$$

$$Y_i = (A_i X_{i-1})^{-1} [\bar{f}_i - A_i Y_{i-1} - B_i Y_i]$$

Отсюда получаются рекуррентные соотношения

$$X_i = - (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} C_i \quad (5.12)$$

$$Y_i = - (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} (\bar{f}_i - A_i Y_{i-1})$$

Из краевых условий находим

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = \bar{U}_0 \quad (5.13)$$

Условия (5.13) представляют собой начальные данные для рекуррентных соотношений (5.12), которые позволяют последовательно определить X_i, Y_i до $i = N_1 + 1$. Соотношение

$$\bar{U}_{N_1} = X_{N_1} \bar{U}_{N_1+1} + Y_{N_1} \quad (5.14)$$

позволяет определить \bar{U}_{N_1}

по известному из правого условия \bar{U}_{N_1+1} , после чего U_i последовательно определяются с помощью соотношений (5.8)

Таким образом, схема матричной прогонки вполне аналогична обычной прогонке, с той только разницей, что вместо скалярных величин X_i, Y_i, U_i мы "прогоняем" векторы $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{U}_i$. Коэффициенты A_i, B_i, C_i становятся матрицами и все операции следует понимать как матричные.

Если коэффициенты уравнения теплопроводности переменные, то для каждого i приходится обращать матрицу порядка N_2 что является трудоемкой операцией.

Поэтому применение матричной факторизации для уравнения теплопроводности в прямоугольной области может быть рекомендовано, когда N_2 не особенно велико. Еще более сложный алгоритм возникает при решении трехмерной задачи.

Причиной резкого увеличения числа операций является увеличение размерности разностного оператора на верхнем шаге по сравнению с одномерным случаем. Можно сделать попытку уменьшить размерность разностного оператора на верхнем шаге.

Например, вместо разностной схемы (5.2) можно было применить следующую аппроксимацию:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n \quad (5.15)$$

И тогда решение неявной схемы (5.15) свелось бы к обычным прогонкам по X_1 . Нетрудно усмотреть, однако, что схема (5.15), является неустойчивой (точнее условно устойчивой).

Действительно коэффициент $\rho(\kappa) = e^{\omega\tau}$ роста гармоники выражается дробью:

$$\rho(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1 - a_2}{1 + a_1}; \quad a_s = 4z_s \sin^2 \frac{\kappa_s h_s}{2}; \quad z_s = \frac{a^2 \tau}{h_s^2} \quad (5.16)$$

Условие устойчивости имеет вид:

$$z_2 \leq \frac{1}{2} \quad (5.17)$$

Мы видим, что неустойчивость возникает вследствие явной аппроксимации градиентов по X_2 : в то время как гармоническое решение

$\Lambda(t)e^{i\kappa x_1}$ будет всегда убывать по амплитуде, гармоническое решение $\Lambda(t)e^{i\kappa x_2}$ при нарушении условия (5.17) будет возрастать по амплитуде.

Возникающие в многомерном случае трудности построения простых абсолютно устойчивых схем не могут быть решены на основе однородных схем и простейших аппроксимаций, когда интегрирование происходит единообразно от шага к шагу. Следует изменить структуру разностной схемы и усложнить аппроксимацию.

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ СХЕМЫ В ДРОБНЫХ ШАГАХ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

П.1 Метод продольно-поперечной прогонки.

Условно устойчивая схема (I.5 . I5) является несимметричной: аппроксимация градиентов по X является неявной, ~~но~~ Y явной. Рассмотрим симметризованную схему, в которой x и y меняются ролями от шага к шагу:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n \\ \frac{u^{n+2} - u^{n+1}}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^{n+2} \end{aligned} \quad (1)$$

На первом шаге, как и в схеме (I.5 . I5) оператор $\Lambda_1 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ аппроксимируется неявно, $\Lambda_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — явно, на втором шаге, наоборот, оператор Λ_1 , аппроксимируется явно, оператор Λ_2 неявно. После этого счет повторяется.

Схема, которую мы будем называть в дальнейшем схемой продольно-поперечной прогонки ⁺⁾ (схема ППП), была предложена в 1955 г. ~~почти~~ одновременно Писмэном, Рекфордом и Дугласом [7,8]. Покажем, что схема (I.1) абсолютно устойчива и абсолютно аппроксимирует уравнение теплопроводности (I.5.1).

Так как в схеме (I.1) счет повторяется только при переходе с $n-го$ шага на $n+2$, то мы будем считать $(n+1)-й$ шаг вспомогательным. Поэтому мы будем рассматривать схему (I.1) как переход с $n-го$ шага на $(n+1)-й$ с вспомогательным шагом $n+\frac{1}{2}$. При таких обозначениях схема (I.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{n+1}) \end{aligned} \quad (I.2)$$

⁺⁾ В оригинале употребляется термин *alternating direction (implicit) method*. Иногда в советской литературе применяется также термин "метод ~~перечных~~ ^{поперечных} направлений" для обозначения схем подобного типа.

* ~~В~~ В случае разногласий урегулирует
с поставщиками на фирменных,
в заданном количестве, определенных в [22-45]
и специфичных фирменных и ~~200~~
и средств поименованных и
именно месту.

Покажем, что схема (I.2) эквивалентна некоторой однородной схеме, безусловно устойчивой и безусловно аппроксимирующей уравнение (I.5.I). Следуя [9], запишем (I.2) в виде:

$$\begin{aligned} A_1 U^{n+1/2} - B_1 U^n &= 0 & \alpha) \\ A_2 U^{n+1} - B_2 U^{n+1/2} &= 0 & \delta) \end{aligned} \quad (I.3)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_1, & A_2 &= E - \frac{1}{2} \tau \Lambda_2 \\ B_1 &= E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_2, & B_2 &= E + \frac{1}{2} \tau \Lambda_1. \end{aligned} \quad (I.4)$$

Умножим уравнение (I.3) оператором на B_2 , уравнение (I.3б) на A_1 и сложим. В результате получим:

$A_1 A_2 U^{n+1} - B_2 B_1 U^n + (B_2 A_1 - A_1 B_2) U^{n+1/2} = 0$
Пользуясь коммутативностью операторов A_s, B_s , приходим к схеме:

$$A_1 A_2 U^{n+1} - B_2 B_1 U^n = 0 \quad (I.5)$$

Подставляя (I.4) в (I.5), после несложных преобразований получаем следующую однородную схему, эквивалентную (I.2)

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} (U^n + U^{n+1}) - \frac{1}{4} \tau \Lambda_1 \Lambda_2 (U^{n+1} - U^n) \quad (I.6)$$

Отсюда следует, что схема (I.6) и эквивалентная ей схема (I.2) аппроксимирует уравнение теплопроводности с той же точностью, что и схема

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda \frac{U^n + U^{n+1}}{2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (I.6)$$

Докажем безусловную устойчивость схемы (I.6) или, что то же (I.1)

Положим

$$U^n = \zeta_n e^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2)}, \quad U^{n+1/2} = \zeta_{n+1/2} e^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2)} \quad (I.7)$$

Подставляя (I.7) в (I.1) получаем:

$$\rho_1 = \frac{\zeta_{n+1/2}}{\zeta_n} = \frac{1 - \frac{1}{2} a_2}{1 + \frac{1}{2} a_1} \quad \alpha) \quad (I.8)$$

$$\rho_2 = \frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_{n+1/2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} a_1}{1 + \frac{1}{2} a_2} \quad \delta)$$

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{2} a_1}{1 + \frac{1}{2} a_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} a_2}{1 + \frac{1}{2} a_1} = \rho_1 \rho_2 \quad \epsilon)$$

$$a_s = 4 \zeta_s \sin^2 \frac{\kappa_s h_s}{2}; \quad \zeta_s = \frac{a^2 \tau}{h_s^2} \quad (I.9)$$

Отсюда следует, что

$$|\rho| \leq 1$$

при любом τ

(I.10)

Таким образом доказана ~~устойчивость~~ ^{устойчивость} схемы (I.6).

Нетрудно видеть, что в (I.6) получается то же выражение для

ρ Мы видим, что благодаря введению вспомогательных дробных шагов мы получили абсолютно устойчивую схему. При этом вместо одной матричной прогонки мы должны применять две обычных прогонки, что значительно уменьшает объем вычислений.

Проанализируем формулы (I.8). Равенство (I.8) означает, что на первом полушаге ошибка в направлении X_1 , уменьшается в $1 + \frac{1}{2}a_1$ раз, ошибка в направлении X_2 увеличивается в $1 - \frac{1}{2}a_2$ раз; на втором полушаге, наоборот, ошибка в направлении X_1 возрастает в $1 - \frac{1}{2}a_1$ раз, в направлении X_2 убывает в $1 + \frac{1}{2}a_2$ раз. Таким образом, как бы сильно ни выросла ошибка в каком либо направлении на данном полушаге, на следующем полушаге она обязательно уменьшится, так что на двух полушагах она не возрастает по модулю. Отсюда сразу видно преимущество схемы продольно-поперечной прогонки по сравнению со схемой (5.15)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n$$

или аналогичной схемой

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^n + \Lambda_2 u^{n+1}$$

В первой схеме ошибка в направлении X_1 всегда будет убывать в $1 + a_1$ раз, зато ошибка в направлении X_2 будет всегда возрастать в $1 - a_2$ раз. Во второй схеме, наоборот, на каждом шаге ошибка в направлении X_1 возрастает в $1 - a_1$ раз, хотя и в направлении X_2 убывает в $1 + a_2$ раз.

Следовательно, необходимо ~~у~~ ^н менять направления X_1 , X_2 ролями, что и делается в продольно-поперечной прогонке. В методе попеременного неявного счета интегрирование в каждом направлении идет попеременно то с помощью явной, то с помощью неявной схемы и возрастание ошибки в явной схеме компенсируется убыванием ошибки в неявной схеме. ⁺)

+) Компенсация устойчивости на дробных шагах аналогична компенсации прочности на изгиб в фанерном листе, который состоит из ряда склеенных листов с попеременно меняющимся направлением волокон. Если склеивать листы с одним направлением волокон, то компенсации прочности не получится.

П. 2 - Метод стабилизирующей поправки.

Для решения трехмерного уравнения теплопроводности в работе Дугласа, Рокфорта [9] была предложена следующая схема:

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1/3} - U^n}{\tau} &= \Lambda_1 U^{n+1/3} + \Lambda_2 U^n + \Lambda_3 U^n \\ \frac{U^{n+2/3} - U^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2 U^{n+2/3} - \Lambda_2 U^n \\ \frac{U^{n+1} - U^{n+2/3}}{\tau} &= -\Lambda_3 U^n + \Lambda_3 U^{n+1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Схему (2.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} A_s U^{n+\frac{s}{3}} - B_s U^{n+\frac{s-1}{3}} &= C_s U^n, \quad s = 1, 2, 3. \\ A_s &= E - \tau \Lambda_s, \quad B_s = E \\ C_1 &= \tau(\Lambda_2 + \Lambda_3), \quad C_2 = -\tau \Lambda_2, \quad C_3 = -\tau \Lambda_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Последовательно исключая $U^{n+1/3}$, $U^{n+2/3}$, получаем эквивалентную однородную схему:

$$A_1 A_2 A_3 U^{n+1} - B_1 B_2 B_3 U^n = [C_1 + C_2 A_1 + A_1 A_2 C_3] U^n \quad (2.3)$$

После подстановки (2.2) в (2.3) и разложения по τ преобразуем схему (2.3) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} &= \Lambda U^{n+1} - \tau(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3)(U^{n+1} - U^n) + \\ &+ \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (U^{n+1} - U^n). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для коэффициента возрастания ошибки получаем выражение:

$$\rho = \frac{1 - \tau(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \tau^2 a_1 a_2 a_3}{(1 + \tau a_1)(1 + \tau a_2)(1 + \tau a_3)} \quad (2.5)$$

Из (2.4) сразу следует аппроксимация, из (2.5) устойчивость.

Заметим, что структура схемы такова: первый дробный шаг дает полную аппроксимацию уравнения теплопроводности, следующие дробные шаги являются поправочными и служат цели улучшения устойчивости. Поэтому схемы такого рода мы будем называть схемами стабилизирующей поправки (С.П.) или схемами с ^{поправкой} коррекцией на устойчивость.

П. 3 - Метод расщепления

Анализ устойчивости схемы попеременного неявного счета (ППС) показывает, что аппроксимация ~~явными~~ операторами ухудшает устойчивость схемы. Это приводит к идее: на каждом ~~дробном~~ шаге пользоваться только неявными операторами. При этом на каждом ~~дробном~~ шаге ~~аппроксимируется~~ ^{в правой части} ~~только одним~~ ^{оператор} ~~уравнением~~

$$L_s = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \quad (3.1)$$

полная аппроксимация достигается только на полном шаге.

Схема такого рода была впервые предложена в работе ^{автора} ~~Сухов В.А., Понкина~~ [10]

Мы будем называть такие схемы ~~схемами~~ ^{схем} расщепления. Простейшая схема расщепления для трехмерного уравнения теплопроводности имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1/3} - U^n}{\tau} &= \Lambda_1 U^{n+1/3} & a) \\ \frac{U^{n+2/3} - U^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2 U^{n+2/3} & б) \\ \frac{U^{n+1} - U^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3 U^{n+1} & в) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Перепишем (3.2) в виде:

$$A_s U^{n+1/3} - B_s U^{n+2/3} = 0, \quad A_s = E - \tau \Lambda_s, \quad B_s = E. \quad (3.3)$$

Исключая $U^{n+1/3}$, $U^{n+2/3}$, приходим к эквивалентной схеме

$$A_1 A_2 A_3 U^{n+1} - B_1 B_2 B_3 U^n = A_1 A_2 A_3 U^n - E U^n = 0 \quad (3.4)$$

Разлагая (3.4) по τ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} &= \Lambda U^{n+1} - \tau (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) U^{n+1} + \\ &+ \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 U^{n+1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 получаем выражение:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{1+a_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{1+a_2}, \quad \rho_3 = \frac{1}{1+a_3}; \\ \rho &= \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5) следует аппроксимация, из (3.6) устойчивость схемы (3.2). Нетрудно видеть, что схема (3.2) удовлетворяет принципу экстремума. Это следует из того, что каждая из двухслойных схем (3.2) а), б), в), удовлетворяет принципу экстремума. Отсюда, в частности, следует равномерная сходимость разностного решения к решению дифференциального уравнения. Для повышения точности схемы (3.2) мы можем применить схему с весами:

$$\frac{U^{n+1/3} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 [\alpha U^{n+1/3} + (1-\alpha) U^n]. \quad (3.7)$$

$$\frac{U^{n+2/3} - U^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 [\alpha U^{n+2/3} + (1-\alpha) U^{n+1/3}].$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 [\alpha U^{n+1} + (1-\alpha) U^{n+2/3}].$$

Эквивалентная однородная схема имеет вид:

$$A_1 A_2 A_3 U^{n+1} - B_1 B_2 B_3 U^n = 0 \quad (3.8)$$

$$A_s = E - \alpha \tau \Lambda_s; \quad B_s = E + (1+\alpha) \tau \Lambda_s$$

Разлагая равенство (3.8) по τ , получаем

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda [\alpha U^{n+1} + (1-\alpha) U^n] + \tau [\Phi_1 U^{n+1} + \Phi_0 U^n]. \quad (3.9)$$

$$\text{где } \Phi_1 = \alpha^2 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) - \tau \alpha^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \quad (3.10)$$

$$\Phi_0 = (1-\alpha)^2 (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) + \tau (1-\alpha)^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем схему:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda \frac{U^{n+1} + U^n}{2} + \frac{\tau}{4} (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) (U^{n+1} - U^n) - \frac{\tau^2}{8} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (U^{n+1} - U^n) \quad (3.11)$$

Схема (3.11) имеет тот же порядок точности, что и схема

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda \frac{U^{n+1} + U^n}{2}. \quad (3.12)$$

В работе ~~Т.А.~~ Сучкова В.А.,
Позогина М.Б. и автора [12] ←

П.4. Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L U \quad L = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = \text{const} \quad (4.1)$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad (4.2)$$

В этом случае однородная разностная схема

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda [\alpha U^{n+1} + (1-\alpha) U^n], \quad \Lambda \sim L \quad (4.3)$$

является девятиточечной и решение получающейся системы уравнений методом матричной прогонки становится очень громоздким. Применение метода попеременного неявного счета также не приведет к простым трехточечным неявным схемам. Решение этой трудной задачи даст метод расщепления. В работе [11] была предложена

схема:
$$\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} = \Lambda_{11} U^{n+1/2} + \Lambda_{12} U^n$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{21} U^{n+1/2} + \Lambda_{22} U^{n+1} \quad (4.4)$$

Здесь
$$\Lambda_{11} = a_{11} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \sim L_{11} = a_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = a_{12} \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4 h_1 h_2} \sim L_{12} = a_{12} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.5)$$

$$\Lambda_{22} = a_{22} \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \sim L_{22} = a_{22} \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$$

Нетрудно видеть, что схема (4.4) основана на методе расщепления. Действительно, на первом полушаге аппроксимируется "половина" оператора $L: \Lambda_{11} + \Lambda_{12}$, причем Λ_{11} на верхнем слое $n+1/2$, Λ_{12} — на нижнем; на втором полушаге аппроксимируется вторая "половина" оператора $L: \Lambda_{21} + \Lambda_{22}$, причем $\Lambda_{21} = \Lambda_{12}$ вновь на нижнем слое $n+1/2$, Λ_{22} — на верхнем $n+1$.

Эквивалентная однородная схема имеет вид:

$$A_{11} A_{22} U^{n+1} - A_{12}^2 U^n = 0 \quad (4.6)$$

$$A_{ij} = E + (-1)^{i+j+1} \tau \Lambda_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Разложением по τ получаем:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) U^{n+1} + 2 \Lambda_{12} U^n - \tau (\Lambda_{11} \Lambda_{22} U^{n+1} - \Lambda_{12}^2 U^n) \quad (4.7)$$

Включить ли метод с. 7. ?

Отсюда следует аппроксимация уравнения (4.1) схемой (4.4).

Нетрудно показать устойчивость схемы. Действительно

$$\rho_1 = \frac{1 - \ell_{12}\tau}{1 + \ell_{11}\tau}, \quad \rho_2 = \frac{1 - \ell_{22}\tau}{1 + \ell_{21}\tau} \quad (4.8)$$

$$\rho = \rho_1 \rho_2 = \frac{(1 - \ell_{12}\tau)^2}{(1 + \ell_{11}\tau)(1 + \ell_{22}\tau)} \quad (4.9)$$

где

$$\ell_{ii} = \frac{1}{4} \frac{a_{ii}}{h_i^2} \sin^2 \frac{k_i h_i}{2},$$

$$\ell_{12} = \frac{1}{4} \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \cos \frac{k_1 h_1}{2} \cos \frac{k_2 h_2}{2} \sin \frac{k_1 h_1}{2} \sin \frac{k_2 h_2}{2}$$

Отсюда, следует, принимая во внимание (4.2)

$$|\rho| \leq 1. \quad (4.10)$$

Устойчивость схемы доказана. По теореме эквивалентности следует сходимость схемы.

При несколько более жестких условиях, чем условие эллиптичности (4.2), можно применить метод расщепления и для трехмерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.11)$$

В этом случае можно применить следующую схему [12], [15]

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau} &= \frac{\Lambda_{11}}{2} u^{n+1/6} + \Lambda_{12} u^n \\ \frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau} &= \Lambda_{21} u^{n+1/6} + \frac{\Lambda_{22}}{2} u^{n+2/6} \\ \frac{u^{n+3/6} - u^{n+2/6}}{\tau} &= \frac{\Lambda_{31}}{2} u^{n+3/6} + \Lambda_{13} u^{n+2/6} \\ \frac{u^{n+4/6} - u^{n+3/6}}{\tau} &= \Lambda_{31} u^{n+3/6} + \Lambda_{33} u^{n+4/6} \\ \frac{u^{n+5/6} - u^{n+4/6}}{\tau} &= \frac{\Lambda_{22}}{2} u^{n+5/6} + \Lambda_{23} u^{n+4/6} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+5/6}}{\tau} &= \Lambda_{32} u^{n+5/6} + \frac{\Lambda_{33}}{2} u^{n+1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Схема (4.12) аппроксимирует (4.11) и устойчива, если положительно определена матрица $\|b_{ij}\|$, где

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j \quad b_{ii} = \frac{a_{ii}}{2} \quad (4.13)$$

П.5. Метод факторизации разностного оператора.

В работе Беккера, Олифанта [15] был предложен следующий способ интегрирования уравнения теплопроводности (I. 5.1)

Пусть
$$\Omega u^{n+1} = f^n \quad (5.1)$$

есть некоторая неявная схема интегрирования (I.5.1), Ω - разностный оператор на верхнем шаге, f^n - результат применения разностных операторов на нижних шагах. Записанная индексно, схема (5.1) имеет вид:

$$\sum_{k,l} c_{ij}^{kl} u_{kl}^{n+1} = f_{ij} \quad (5.2)$$

В работе [13] доказывается, что если ограничиться рассмотрением девятиточечных операторов, т.е. операторов, для которых справедливо соотношение:

$$c_{ij}^{kl} = 0 \text{ при } |i-k| > 1, |j-l| > 1 \quad (5.3)$$

то возможно выбрать оператор Ω таким образом, чтобы он представлялся в виде произведения двух трехточечных операторов A, B .

Это означает :

$$c_{ij}^{kl} = A_i^k \cdot B_j^l \quad (5.4)$$

где

$$A_i^k = 0, |i-k| > 1, B_j^l = 0, |j-l| > 1 \quad (5.5)$$

В работе [15] схема (5.1) возникала из трехслойной аппроксимации уравнения теплопроводности (I.5.1)

$$\frac{1.5 u^{n+1} - 2u^n + 0.5 u^{n-1}}{\tau} = \Delta u^{n+1}; \quad (5.6)$$

где Δ некоторый девятиточечный оператор Тогда:

$$\Omega = 1.5 E - \tau \Delta, f^n = +2u^n - 0.5 u^{n-1} \quad (5.7)$$

Оператор Δ подбирается так, чтобы аппроксимация

$$\Delta \sim L = L_1 + L_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

имела второй порядок точности, и чтобы оператор Ω из (5.7) представлялся в виде произведения двух трехточечных операторов в смысле (5.4)

Байкер
В районе [14] дано обязательство
менее с работниками вернуть
операторе на ~~технику~~ ~~технические~~
~~операторы~~ на сурат ~~инструменты~~
привести ~~температуры~~ с ~~исполь-~~
зации ~~важных~~ ~~физических~~.



Оказывается, что этими требованиями Λ определяется однозначно. После этого задача решения системы уравнений (5.2) сводится к двум прогонкам.

Действительно, положим

$$A = \{A_i^k\}, \quad B = \{B_i^k\}, \quad v^{n+1} = \{v_{ij}^{n+1}\} \quad (5.6)$$

$$v_{je}^{n+1} = B_j^k u_{ke}^{n+1}, \quad (v = B u^{n+1})$$

Тогда уравнение (5.1) распадается на два уравнения

$$A v^{n+1} = f^n, \quad B u^{n+1} = v^{n+1} \quad (5.7)$$

Каждое из которых решается трехточечной прогонкой. О постановке краевых условий для v мы будем говорить подробнее в §2. Как было любезно указано автору Сучковым В.А., метод факторизации оператора, предложенный Бекером, Олифантом в работе [13] аналогичен методу расщепления и переходит в него полностью при замене трехслойной аппроксимации (5.6) обычной двухслойной.

П.6 - Метод приближенной факторизации оператора

В работе [15] был описан метод приближенной факторизации оператора на примере уравнения теплопроводности.

$$\text{Пусть } \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} \quad \Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_i \quad \Lambda_i = \alpha^2 \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} \quad (6.1)$$

есть простейшая неявная аппроксимация уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Перепишем уравнения (6.1) в виде

$$(E - \tau \Lambda) u^{n+1} = E u^n \quad (6.2)$$

Факторизуем оператор $E - \tau \Lambda$ с точностью до членов порядка τ^2

Для этого положим

$$E - \tau \Lambda \sim (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) \dots (E - \tau \Lambda_m). \quad (6.3)$$

Заменим разностную схему (6.2) на факторизованную:

$$\Omega u^{n+1} = (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) \dots (E - \tau \Lambda_m) u^{n+1} = E u^n \quad (6.3)$$

Введем вспомогательные величины $u^{n+1/m}, \dots, u^{n+m/m}$ с помощью равенств:

$$\begin{aligned}(E - \tau \Lambda_1) U^{n+1/m} &= E U^n \\ (E - \tau \Lambda_2) U^{n+2/m} &= E U^{n+1/m} \\ \dots &\dots \dots \\ (E - \tau \Lambda_m) U^{n+1} &= E U^{n+m/m}\end{aligned}\quad (6.4)$$

Схема расщепления (6.4) эквивалентна схеме приближенной факторизации верхнего оператора (6.3).

Совершенно аналогично производится факторизация верхнего оператора в схеме Бекера, Олифанта.

Рассмотрим трехслойную аппроксимацию двумерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{1.5 U^{n+1} - 2 U^n + 0.5 U^{n-1}}{\tau} = \Lambda U^{n+1} \quad (6.5)$$

где $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\Lambda_i \sim L_i = \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ (6.6)

Запишем схему (6.5) в виде:

$$(1.5 E - \tau \Lambda) U^{n+1} = f^n, \quad f^n = 2 E U^n - 0.5 E U^{n-1} \quad (6.7)$$

Заменяя оператор $1.5 E - \tau \Lambda$ факторизованным, получаем схему

$$\Omega U^{n+1} = 1.5 \left(E - \frac{\tau}{1.5} \Lambda_1\right) \left(E - \frac{\tau}{1.5} \Lambda_2\right) U^{n+1} = f^n \quad (6.8)$$

с девятиточечным факторизуемым оператором Ω , которая совпадает с схемой Бекера, Олифанта.

Заметим, что ^{тогда} ~~полная~~ факторизация верхнего оператора Ω с помощью формул (5.2 - 5.4) невозможна в случае уравнения диффузии с переменными коэффициентами. ~~В то время как приближенная факторизация возможна всегда. Подробнее о методе приближенной факторизации оператора см. § 4.~~

~~§ 4. Анализ краевых условий в методе дробных шагов~~ ~~для уравнения теплопроводности.~~

До сих пор мы вели рассмотрение в теоретическом плане, ограничиваясь задачей Коши в полупространстве $|x| < \infty$ и считая, что начальные данные представляются рядом или интегралом Фурье. При этом не было граничных точек сетки и разностные уравнения были одинаковы во всех точках сетки.

Тем не менее, исходя из исследования правых унитар
предположений элементов правительств

На практике приходится решать смешанную задачу Коши, когда разностные уравнения на границе иные, чем во внутренних точках области. В результате остаточные члены схемы на границе могут менять порядок малости по сравнению с внутренними точками.

Таким образом, краевые условия сказываются на точности схемы. Первый анализ краевых условий в схемах с дробными шагами для уравнения теплопроводности ~~Дьяконов~~ ^{Был дан} в статье Дьяконова Е.Г. [15] +)

Дьяконов Е.Г. анализирует реализацию краевых условий в схеме расщепления, совсем не обязательную для этой схемы, и не лучшую. ~~мы рассмотрим для схемы расщепления три реализации краевых условий.~~ ^{этой работе}

Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

(7.1)

поставим смешанную задачу Коши

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in D$$

$$u(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t), \quad x_1, x_2, t \in \Gamma$$

в цилиндрической области $\Pi = D \times T$,

где D - квадрат $0 < x_1, x_2 < 1$

γ - его граница $T = [0, t_0]$

$\Gamma = \gamma \times T$ (см. рис 1).

(1a)

(7.2)

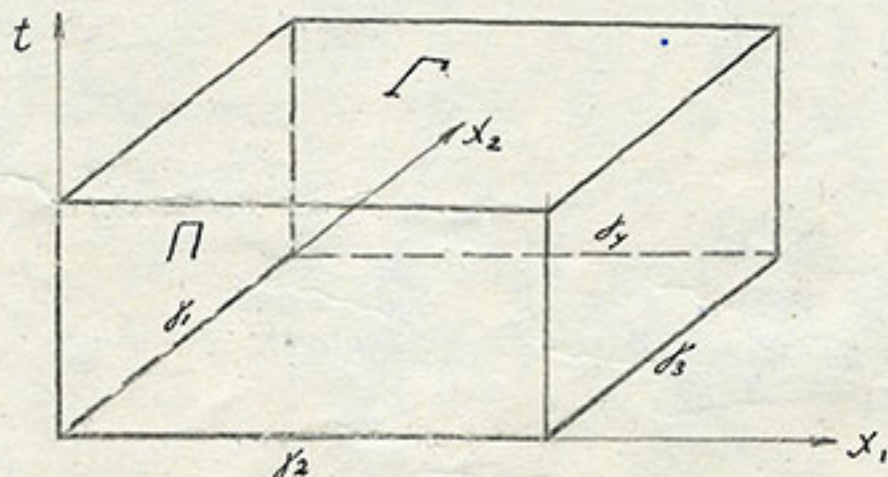


Рис. I. Область смешанной задачи Коши

* К сожалению, работа ~~Дьяконова Е.Г.~~ ^{Дьяконов Е.Г.} содержит арифметическую ошибку, которая привела автора к неправильной оценке метода расщепления.

Кроме того, в [15] анализируется реализация краевых условий, совсем не обязательных для этой схемы или лучше.

Для задачи (7.1) будем использовать схему расщепления

$$\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 (\alpha U^{n+1/2} + \beta U^n) \quad a) \quad (7.2)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (\alpha U^{n+1} + \beta U^{n+1/2}) \quad б)$$

и схему приближенной факторизации оператора

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1)(E - \alpha \tau \Lambda_2) U^{n+1} = (E + \beta \tau \Lambda_1)(E + \beta \tau \Lambda_2) U^n \quad (7.3)$$

в следующей ее реализации: ⁺)

$$(E - \tau \Lambda_1) v^{n+1} = (E + \beta \tau \Lambda_1)(E + \beta \tau \Lambda_2) U^n \quad a) \quad (7.4)$$

$$(E - \beta \tau \Lambda_2) U^{n+1} = v^{n+1} \quad б)$$

Рассмотрим для схемы (7.2) следующую реализацию краевых условий:

$$\begin{aligned} U^{n+1/2}(x_1, x_2) &= f[x_1, x_2, (n+1/2)\tau] \\ x_1, x_2 &\in \gamma \\ U^{n+1}(x_1, x_2) &= f[x_1, x_2, (n+1)\tau] \\ x_1, x_2 &\in \gamma \end{aligned} \quad (A)$$

В случае (A) прогонка по границе не делается, на границе значения U всегда равны граничным ^{значениям} на соответствующий момент времени. Отсюда следует, что на границе соотношения (7.2) принимают вид:

$$\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 (\alpha U^{n+1/2} + \beta U^n) + F_1^n \quad (7.5)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (\alpha U^{n+1} + \beta U^{n+1/2}) + F_2^n$$

+) Заметим, что схемы (7.2), (7.3) эквивалентны для чисто периодической задачи Коши, Но реализация (7.4) не эквивалентна ~~(7.2)~~ в случае краевых задач. (1а)
В случае переменных коэффициентов схема (7.3) вообще не эквивалентна (7.2) (~~см. §~~)

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1^n &= \frac{f^{n+\frac{1}{2}} - f^n}{\tau} - \Lambda_1(\alpha f^{n+\frac{1}{2}} + \beta f^n) \quad x_1, x_2 \in \gamma_2, \gamma_4 \\ \mathcal{F}_2^n &= \frac{f^{n+\frac{1}{2}} - f^{n-\frac{1}{2}}}{\tau} - \Lambda_2(\alpha f^{n+\frac{1}{2}} + \beta f^{n-\frac{1}{2}}) \quad x_1, x_2 \in \gamma_1, \gamma_3 \end{aligned} \quad (7.6)$$

Учитывая это, разностную схему (7.2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} A_1 u^{n+\frac{1}{2}} - B_1 u^n &= g_1^n \\ A_2 u^{n+\frac{1}{2}} - B_2 u^{n-\frac{1}{2}} &= g_2^n \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} A_s &= E - \alpha \tau \Lambda_s; \quad B_s = E + \beta \tau \Lambda_s \\ g_1 &= 0, \quad g_2 > 0, \quad x_1, x_2 \in \bar{\omega} - (\gamma + \omega) \\ g_1^n &= \tau \mathcal{F}_1^n, \quad g_2^n = \tau \mathcal{F}_2^n \quad x_1, x_2 \in \gamma \end{aligned} \quad (7.8)$$

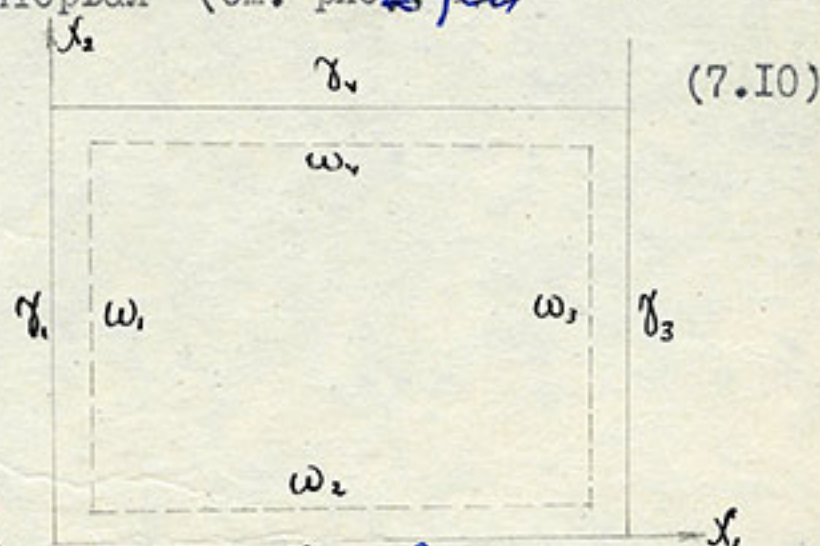
Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид:

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_1 B_2 u^n = R_n^n, \quad R_n = B_2 g_2^n + A_1 g_1^n \quad (7.9)$$

Ясно, что $R_n = 0$ всюду внутри \mathcal{D} , кроме точек сетки, лежащих отстоящих от γ на один интервал (см. рис. 2) где ω

$$R_n = B_2 g_2^n, \quad x_1, x_2 \in \omega_2, \omega_4$$

$$R_n = A_1 g_1^n, \quad x_1, x_2 \in \omega_1, \omega_3$$



Простые вычисления дают:

$$R_n = B_2 g_2^n = \beta \frac{\tau^2}{h_2^2} \mathcal{F}_2^n, \quad x_1, x_2 \in \omega_2, \omega_4 \quad (7.11)$$

$$R_n = A_1 g_1^n = -\alpha \frac{\tau^2}{h_1^2} \mathcal{F}_1^n, \quad x_1, x_2 \in \omega_1, \omega_3$$

Отсюда следует, что при законе предельного перехода

$$\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$$

ошибка аппроксимации в точках на ω равна $O(1)$, т.е. конечна.

Реализация А Гиня расчет реки в [19]

Так как во всех остальных внутренних точках $\bar{\mathcal{D}}$ она равна $O(\tau)$, то оценивая ошибку в L_2 , имеем

$$\|u\|_{L_2} = O(\tau^{\frac{1}{2}}).$$

Мы видим, что большая ошибка аппроксимации связаны с нарушением соотношений (7.2) на границе.

Рассмотрим теперь другую реализацию краевых условий в схеме расщепления:

$$\begin{aligned} u^{n+\frac{1}{2}}(x_1, x_2) &= f^{n+\frac{1}{2}}, & x_1, x_2 \in \delta_1, \delta_3 \\ u^{n+1}(x_1, x_2) &= f^{n+1}(x_1, x_2), & x_1, x_2 \in \delta_2, \delta_4 \end{aligned} \quad (Б)$$

В случае (Б) на первом дробном шаге - при переходе с $t = n\tau$ на $t = (n+\frac{1}{2})\tau$ на δ_2, δ_4 краевые условия не удовлетворяются, но зато соблюдаются уравнения (7.2). На втором дробном шаге - при переходе с $t = (n+\frac{1}{2})\tau$ на $t = (n+1)\tau$ - на δ_1, δ_3 соблюдаются условия (7.2б). Таким образом, прогонка совершается и вдоль границы.

При таком способе мы удовлетворяем краевым условиям на границе через один дробный шаг, но зато условия (7.2) выполняются всюду в $\bar{\mathcal{D}}$, следовательно исключенная схема в целых шагах имеет вид (7.3) всюду в $\bar{\mathcal{D}}$, т.е. порядок аппроксимации равен $O(\tau) + O(h^2)$ при $\alpha \neq \frac{1}{2}$ и $O(\tau^2) + O(h^2)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Покажем, что при прогонке вдоль границы мы делаем ошибку в краевом условии порядка $O(\alpha)$. Покажем это, например, для δ_2, δ_4

На n -ом шаге на δ_2, δ_4 имеем

$$u^n = f^n$$

$u^{n+\frac{1}{2}}$ определяется из условия (7.2а), которое переписывается в виде

$$A_1 u^{n+\frac{1}{2}} - B_1 u^n = B_1 f^n \quad (7.12)$$

Прогоночное соотношение (7.12) ^{заменяется} замыкается краевыми условиями

$$u^{n+\frac{1}{2}} = f^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad x_1 = 0, 1. \quad (7.13)$$

Вычитая из соотношения (7.12) тождество

$$A_1 f^{n+1/2} = A_1 f^{n+1/2}$$

и обозначая разность $u^{n+1/2} - f^{n+1/2}$ через $v^{n+1/2}$ имеем:

$$A_1 v^{n+1/2} - B_1 f^n - A_1 f^{n+1/2} = F^n, \quad (7.14)$$

с краевыми условиями

$$v^{n+1/2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, 1. \quad (7.15)$$

Из (7.4) имеем

$$v^{n+1/2} = A_1^{-1} F^n. \quad \text{Но} \quad \|F^n\| = O(\tau), \quad \|A_1^{-1}\| \leq 1, \quad (7.16)$$

следовательно

$$v^{n+1/2} = O(\tau)$$

Таким образом, при прогонке по x_1 мы совершаем прогонку и по x_2, x_4 , отклоняясь от истинных краевых условий на величину $O(\tau)$ и сохраняя истинные краевые условия на x_1, x_3 ; при прогонке по x_2 , наоборот, сохраняются краевые условия на x_2, x_4 , совершается прогонка по x_1, x_3 , с отклонением от истинных краевых условий на $O(\tau)$.

В итоге мы имеем точность $O(\tau) + O(h^2)$

Рассмотрим, наконец, третий способ удовлетворения краевых условий, соответствующий реализации (7.4) схемы (7.3)

Для прогонки v^{n+1} по x_1 необходимо знать v^{n+1} на x_1, x_3 .

Эти значения v^{n+1} определяются из соотношения (7.4б), которое на x_1, x_3 переходит в:

$$v^{n+1} = (E - \beta \tau A_2) f^{n+1} \quad (7.17)$$

Счет проводится в следующем порядке: из соотношения

(7.17) определится v^{n+1} на x_1, x_3 после этого прогонкой решается уравнение (7.4а); получив, таким образом, v^{n+1} в \bar{D} , решаем прогонкой (7.4б), полагая на x_2, x_4

$$u^{n+1} = f^{n+1} \quad (7.18)$$

Таким образом, всюду в \mathcal{D} удовлетворяется уравнение (7.3) в целых шагах, и на γ выполняется соотношение

$$u^n = f^n, \quad u^{n+1} = f^{n+1} \quad (B) \quad (7.19)$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ схема (B) дает порядок аппроксимации $O(\tau^2) + O(h^2)$.

Сделаем теперь сравнение методов счета границы (A), (B), (B). Метод (A) явно неудовлетворительный.

Метод (B) превосходит метод (B) по точности. Однако, метод (B) имеет преимущество общности.

Действительно, предположим, что область \mathcal{D} является непрямоугольной (см. рис 3)

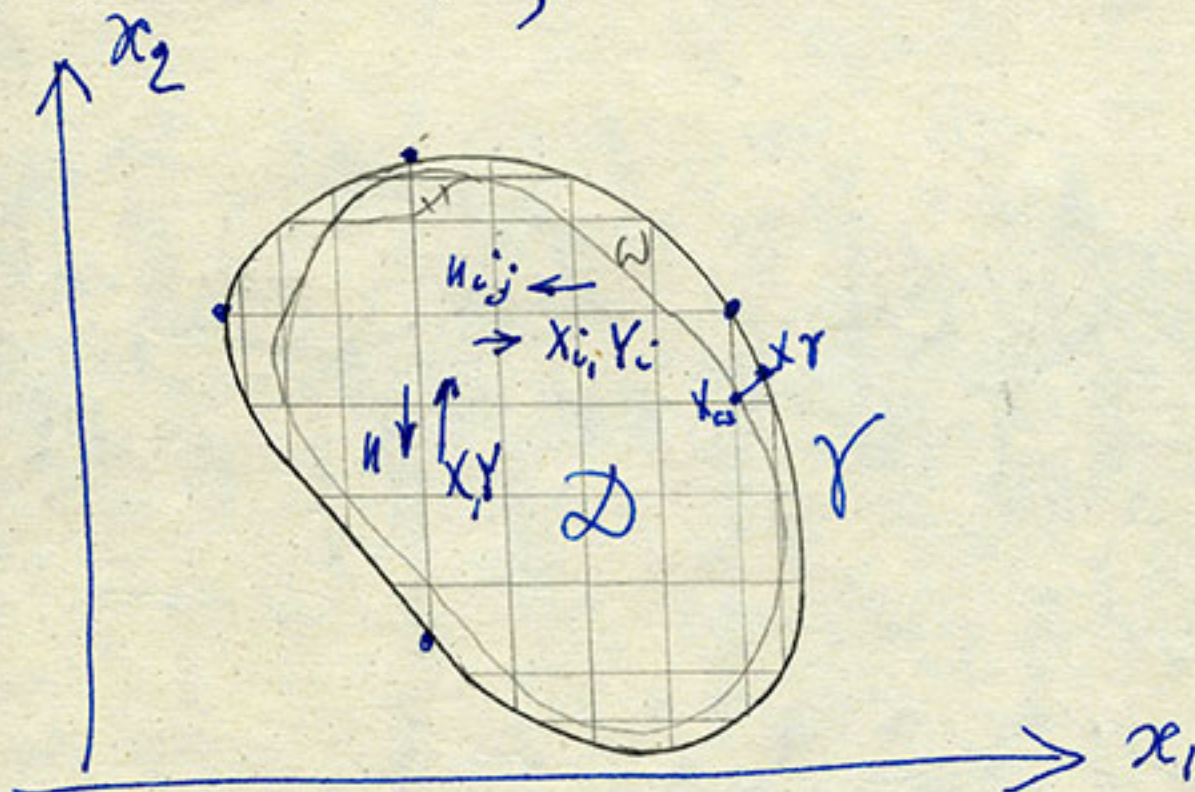


Рис. 3. Метод (B) для произвольной области \mathcal{D}

Тогда метод (B) неприменим. Метод (B) остается в силе: для решения уравнений (7.2a) проводится прогонка по горизонтальным линиям сетки с правыми условиями на концах горизонтальных отрезков; для решения уравнений (7.2б) проводится прогонка

по вертикальным линиям сетки с краевыми условиями на концах вертикальных отрезков.

При этом концы горизонтальных и вертикальных отрезков сетки не обязаны совпадать, т.е. граница не обязательно содержит только точки сетки.

Метод В становится неэффективным даже в случае области, состоящей из конечного числа прямоугольников. Например, для области, изображенной на рис. 4 в угловых точках A, B, C, D, E, F величина v^{n+1} не может быть определена. Следовательно, прогонка по D_1, D_2 невозможна. В этом случае, метод В реализуется с помощью формул (7.17) определяется v^{n+1} на AB, CD, EF .

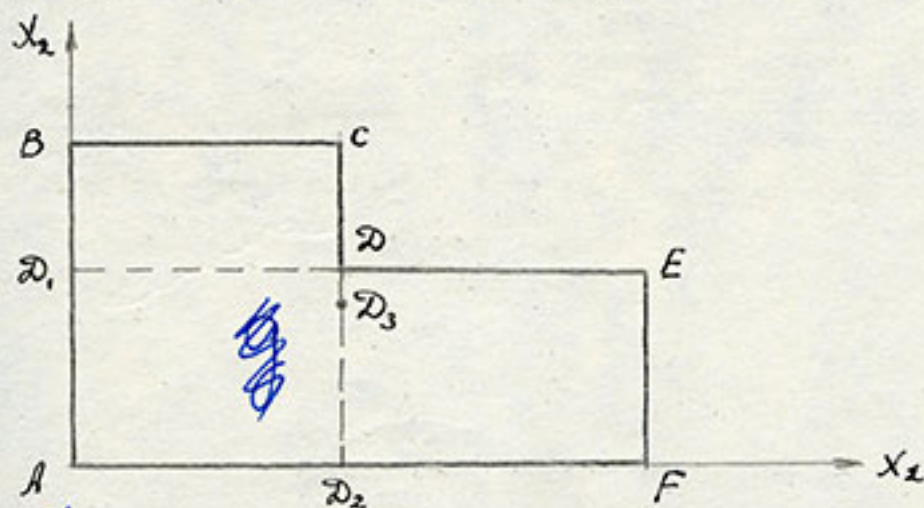


Рис. 4. Реализация метода (В) для области G , состоящей из прямоугольников.

После этого делается прогонка по x_1 по всем внутренним горизонтальным линиям сетки, кроме D_1, D_2 и всюду в области G , кроме D_1, D_2 определяется v^{n+1} . После этого делается прогонка по x_2 в $DEFD_2$, и u^{n+1} определяются всюду в $DEFD_2$, в частности, в точке D_3 . С помощью (7.17) определяем v^{n+1} в D , делаем прогонку v^{n+1} по D_1, D_2 , после чего становится возможным определение u^{n+1} в $ABCD_2$ с помощью прогонки по x_2 .

Ясно, что с увеличением числа угловых точек алгоритм становится весьма громоздким. Заметим, что метод (Б) для случая продольно-поперечной прогонки требует или соединения вертикальных и горизонтальных отрезков на границе или дополнительных интерполяций.

п. 8. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ СХЕМ
С ДРОБНЫМИ ШАГАМИ

Сделаем ряд замечаний по поводу рассмотренных схем.

I. Схемы с дробными шагами могут применяться и в одномерных задачах. Рассмотрим, например, схему Саульева вк [25] локально- неявного счета одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda U^{n+1/2} \quad (8.1)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda U^{n+1/2}, \quad \Lambda = \alpha \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2},$$

которая воспроизводит метод продольно-поперечной прогонки для одного из направлений, например X .

Покажем, что схема (8.1) эквивалентна двухслойной схеме с весами при $\alpha = 1/2$ (схема Кранка-Николсона)

Записывая (8.1) в виде:

$$(E - \frac{\tau}{2} \Lambda) U^{n+1/2} = U^n, \quad EU^{n+1} = (E + \frac{\tau}{2} \Lambda) U^{n+1/2} \quad (8.2)$$

и исключая $U^{n+1/2}$, получаем:

$$(E - \frac{\tau}{2} \Lambda) U^{n+1} = (E + \frac{\tau}{2} \Lambda) U^n \quad (8.3)$$

Откуда следует

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (U^n + U^{n+1}), \quad \text{2. m. g.} \quad (8.4)$$

2. Перепишем схему (8.1) в целых индексах:

$$\frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} = \Lambda U^n \quad |, \quad \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Lambda U^n \quad | \quad (8.5)$$

Складывая уравнения (8.5) получаем

$$\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{\tau} = 2 \Lambda U^n \quad (8.6)$$

Схема (8.6) внешне напоминает схему "крест", однако формулы (8.5) показывают, что схема (8.6) является неоднородной и её нельзя трактовать как однородную схему "крест"

Для получения однородной схемы следует произвести исключение u^n , и, аналогично (8.4), получаем:

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = \Lambda(u^{n-1} + u^{n+1}). \quad (8.7)$$

Таким образом, одна и та же формула (8,6) может быть по разному истолкована, в зависимости от закона определения u^n .

Укажем еще на аналогичный пример

Схема стабилизирующей поправки

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \quad (8.8)$$

при сложении уравнений (8.8) дает

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^{n+1} \quad (8.9)$$

Мажорантная схема расщепления

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1/2} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 u^{n+1} \end{aligned} \quad (8.10)$$

также после сложения формально дает уравнение (8.9), однако схемы (8,8), (8,10) различны, и формально одно и то же уравнение (8.9) в обеих схемах имеет различный смысл, так-как величина $u^{n+1/2}$ определяется в каждой схеме по своему.

Соответствующие схемы в целых шагах, получающиеся исключением $u^{n+1/2}$ не совпадают.

3. Одной и той же схеме в целых шагах могут отвечать различные схемы в дробных шагах.

Например, схема в целых шагах

$$(\bar{E} - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)u^n \quad (8.11)$$

может быть реализована следующими схемами в дробных шагах:

а) схема ППП

$$\begin{aligned}\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_1 U^{n+1/2} + \Lambda_2 U^n) \\ \frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{2} (\Lambda_1 U^{n+1/2} + \Lambda_2 U^{n+1})\end{aligned}\quad (8.12)$$

б) Схема расщепления

$$\begin{aligned}\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} &= \Lambda_1 (\alpha U^{n+1/2} + \beta U^n) \\ \frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 (\alpha U^{n+1} + \beta U^{n+1/2}) \quad \text{при } \alpha = 1/2\end{aligned}\quad (8.13)$$

в) схема приближенной факторизации оператора

$$\begin{aligned}(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)U^{n+1/2} &= U^n = (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)U^n \\ (E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)U^{n+1} &= U^{n+1/2}\end{aligned}\quad (8.14)$$

В случае уравнения с переменными коэффициентами соответствующие схемы с целыми шагами не совпадают. Как уже отмечалось, одна и та же схема с дробными шагами может иметь различные реализации краевых условий.

4. Метод стабилизирующей поправки (М С П), в отличие от метода ППП, устойчив для любого m .

Его недостатком является многослойность схемы и недостаточная точность. Поэтому при решении нестационарного уравнения теплопроводности предпочтительнее применять метод расщепления. Однако, при решении стационарных задач, М С П обладает преимуществом полной аппроксимации при любом m в то время как метод расщепления обладает этим свойством только при $m = 2$ (см. §)

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ К ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ.

п. I. Простейшие схемы для одномерных гиперболических уравнений.

Рассмотрим уравнения акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (I.1)$$

из операторов с числами T, T_1 определены
 в соответствии с (2.2) оператор T_0
 с числами t, T определены
 аналогично

$$T_0 f(x, t) = f(x, t + \tau), \quad T_1 f(x, t) = f(x, t - \tau)$$

переводя и изменяя значение, или:



В (I.1) U можно толковать как скорость, V - удельный объем, а a - массовую скорость звука, x - лагранжеву координату. Записанная в инвариантах Римана

$$\zeta = u - a v, \quad S = u + a v \quad (I.2)$$

система (I.1) принимает вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + a \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} - a \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (I.3)$$

Мы рассмотрим следующие основные схемы интегрирования (I.1) или, что то же (I.3):

а) Схемы бегущего счета.

Явная схема бегущего счета имеет вид

$$\frac{\Delta_0 \zeta}{\tau} + a \frac{\Delta_{-1} \zeta}{h} = 0, \quad \frac{\Delta_0 S}{\tau} - a \frac{\Delta_{-1} S}{h} = 0, \quad (I.4)$$

$$\Delta_0 = T_0 - E, \quad \Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1}, \quad \text{[scribbled out text]}$$

$$T_i f(x, t) = f(x+h, t), \quad T_{-i} f(x, t) = f(x-h, t) \quad (I.5)$$

$$\text{Или, в индексах} \quad \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} + a \frac{z_i^n - z_{i-1}^n}{h} = 0 \quad (I.6)$$

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} - a \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{h} = 0.$$

При переходе к переменным U, V схема (I.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0 U}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} V &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} U \\ \frac{\Delta_0 V}{\tau} - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} U &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} V \end{aligned} \quad (I.7)$$

Нетрудно выразить оператор шага схемы (I.4)

$$\begin{aligned} \zeta^{n+1} &= C \zeta^n, \quad C = E - \frac{a\tau}{h} \Delta_{-1}, \\ S^{n+1} &= \mathcal{D} S^n, \quad \mathcal{D} = E + \frac{a\tau}{h} \Delta_1 \end{aligned} \quad (I.8)$$

Соответственно (I.7)

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= \frac{C+\mathcal{D}}{2} U^n - a \frac{C-\mathcal{D}}{2} V^n \\ V^{n+1} &= -\frac{C-\mathcal{D}}{2a} U^n - \frac{C+\mathcal{D}}{2} V^n \end{aligned} \quad (I.9)$$

Рассмотрим неявные схемы

Неявная схема с весами имеет вид:

$$\left\{ \frac{\Delta_0}{\tau} [\alpha_1 T_1 + \beta_1 E] + a \frac{\Delta_1}{h} [\alpha_2 T_0 + \beta_2 E] \right\} z = 0$$

$$\left\{ \frac{\Delta_0}{\tau} [\alpha_1 T_1 + \beta_1 E] - a \frac{\Delta_1}{h} [\alpha_2 T_0 + \beta_2 E] \right\} s = 0$$

$$\alpha_s \geq 0, \quad \beta_s \geq 0, \quad \alpha_s + \beta_s = 1. \quad (I.I0)$$

Переходя к индексной записи, имеем

$$\left[\alpha_1 \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} + \beta_1 \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} \right] + a \left[\alpha_2 \frac{z_i^{n+1} - z_{i-1}^{n+1}}{h} + \beta_2 \frac{z_i^n - z_{i-1}^n}{h} \right] = 0$$

$$\left[\alpha_1 \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_{i+1}^n}{\tau} + \beta_1 \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_{i+1}^n}{\tau} \right] - a \left[\alpha_2 \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h} + \beta_2 \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{h} \right] = 0$$

$$(I.II)$$

Оператор шага схемы (I.I0) имеет вид:

$$z_{n+1}^{n+1} = C z^n, \quad S^{n+1} = D S^n, \quad \text{где}$$

$$(I.I2)$$

$$C = \left[\alpha_1 T_1 + \beta_1 E + a \alpha_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right]^{-1} \left[\alpha_1 T_1 + \beta_1 E + a \beta_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right],$$

$$(I.I3)$$

$$D = \left[\alpha_1 T_1 + \beta_1 E - a \alpha_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right]^{-1} \left[\alpha_1 T_1 + \beta_1 E + a \beta_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right].$$

Переходя к переменным u, v , вновь имеем формулу (I.9) но с C, D из (I.I3)

Схема с весами (I.I0) дает известные нам формулы бегущего счета, в том числе явную мажорантную ($\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1; \alpha_2 = 0; \beta_2 = 1$), неявную мажорантную* ($\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \alpha_2 = 1; \beta_2 = 0$), схему второго порядка точности ($\alpha_s = \beta_s = \frac{1}{2}, s = 1, 2$)

б) Схема "крест"

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_1}{h} v^n = 0,$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h} u^{n+1} = 0.$$

$$(I.I4)$$

в) Неявная схема с весами

$$\frac{u^{n+1} + u^n}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_1}{h} (\alpha_1 v^{n+1} + \beta_1 v^n) = 0,$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h} (\alpha_2 u^{n+1} + \beta_2 u^n) = 0.$$

$$(I.I5)$$

* Мажорантная схема или называется схемой с повышенной устойчивостью (см. [24])
 для краевых задач, связанных с диффузией, теплопроводностью, реакцией и т.д. в том числе и в нелинейном случае.

1) Как мы уже знаем, известность
присоединяет кривую, ^{исходящую} из точки
определенной ^{значением} функции
в данный момент. В то же
время ^{присоединяет} ^{определенную}
определенность градиентами.
В случае ^{поиск} ^{о наличии}
градиентами (^{присоединяет}
поиск ^{абсолютно}
поиск ^{на 2} ^{и 3},
определенность ^{присоединяет}
поиск ^{на 1} ^{и 2} ^{и 3},
и ^{присоединяет}
уменьшение ^{присоединяет}
уменьшение ^{присоединяет}

При $\alpha_s = \beta_s = \frac{1}{2}$ (I.I5) имеет второй порядок точности (схема Неймана), при $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$

Схема (I.I5) переходит в схему "крест"

Схемы (I.9), (I.I3), (I.I5) будут нами положены в основу при составлении простых схем интегрирования многомерных уравнений акустики и волнового уравнения.

п. 2. Неявные схемы для уравнений гиперболического типа.

Для параболического уравнения, как впервые отмечено Лаасоненом [25], неявная аппроксимация является естественной, поскольку в этом случае область зависимости будет бесконечной и для разностного уравнения.

В отличие от параболических гиперболические уравнения имеют конечную область зависимости, поэтому, казалось бы, их естественной аппроксимацией является явная. Однако это не так.

Для уравнений с ~~переменными~~ ^{приложенными} коэффициентами или нелинейных резкие изменения скорости звука вызывают, в случае явных схем, большие ограничения на шаг (см. по этому поводу §.....).

Поэтому возникает необходимость в неявных схемах и для гиперболических уравнений. Неявная схема для уравнений гидродинамики, основанная на методе бегущего счета, ~~была~~ ^{была} предложена Ландау Л.Д., Мейманом Н.Н., Харатниковым И.М. (см [26])

в 1951 г. Первое теоретическое обоснование неявных схем для волнового уравнения с ~~приложенными~~ ^{переменными} коэффициентами было дано Ладыженской О.А. [27]. Вполне оправдано применение неявных схем для многомерных гиперболических систем.

Неявные схемы для уравнений гидродинамики получили широкое распространение (см [28-31])

п. 3. Неявные схемы для многомерных гиперболических уравнений.

Акустики Н.Н. и алгебра

В работе [33] была дана *неявная* схема расщепления для гиперболической системы в многомерном случае.

Рассмотрим уравнение акустики в двумерном случае

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.1)$$

Перепишем (3.1) в матричной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A f \quad (3.2)$$

где $f = \{u_1, u_2, v\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 \mathcal{D}_1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}; \quad (3.3)$$

Построим схему расщепления, основанную на одномерной неявной схеме (I.15). На первом дробном шаге, опуская градиенты по x_2 получаем схему

$$\frac{u_1^{n+1/2} - u_1^n}{\tau} - \alpha^2 \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha v^{n+1/2} + \beta v^n) = 0; \quad \frac{u_2^{n+1/2} - u_2^n}{\tau} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha u_1^{n+1/2} + \beta u_1^n) = 0$$

Метод расщепления для многомерных гиперболических систем был предложен впервые в статье Багриновского А.А., Годунова С.К. [32]

Однако, авторы этой статьи рассматривали только явную аппроксимацию для которой схема расщепления не дает больших преимуществ перед обычными явными схемами.

Исключая из системы (3.7) $v^{n+1/2}$, получим систему

$$\begin{aligned} \left[\frac{T_0 - E}{\tau} - \alpha \tau a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} (\alpha T_0 + \beta E) \right] u_1^n - a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} v^n &= 0 \\ \left[\frac{T_0 - E}{\tau} + \beta \tau a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha T_0 + \beta E) \right] u_2^n - a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 v^n &= 0 \\ \frac{T_0 - E}{\tau} v^n - \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha T_0 + \beta E) u_1^n - \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha T_0 + \beta E) u_2^n &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

которую можно записать также в матричном виде

$$\frac{T_0 - E}{\tau} f = B f \quad (3.9)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \alpha \tau a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} (\alpha T_0 + \beta E); & 0 & a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} \\ 0 & -\beta \tau a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha T_0 + \beta E), & a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 \\ \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha T_0 + \beta E), & \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha T_0 + \beta E) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Нетрудно видеть, что схема (3.9) аппроксимирует систему (3.3).

Аппроксимацию можно доказать несколько иным образом. Приравняв нулю определитель операторной системы (3.7) получаем операторное уравнение третьего порядка для любой из величин $f = u_1^n, u_2^n, v^n, v^{n+1/2}$:

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right)^3 - a^2 \left[\frac{T_0 - E}{\tau} (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} + \left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right) (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + a^2 \tau (\alpha^2 T_0 - \beta^2 E) (\alpha T_0 + \beta E) \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \cdot \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right] \right\} f = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.11) аппроксимируем уравнение

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right] + \tau L f \quad (3.12)$$

где L - некоторый оператор, т.е. аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \right] = 0 \quad (3.13)$$

Пусть $\alpha = \beta = 1/2$

Тогда (3.11) перейдет в уравнение

$$\begin{aligned} (T_0 - E) \left\{ \left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right)^2 - \frac{a^2}{4} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} - \frac{a^2}{4} (T_0 + E) \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} - \right. \\ \left. - a^2 \tau^2 \frac{1}{16} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \cdot \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right\} f = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

После сокращения на $(T_0 - E)$ получаем уравнение 2-го порядка

$$\frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2} = \left[\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} + \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right] \frac{\rho^{n-1} + 2\rho^n + \rho^{n+1}}{4} + \frac{1}{16} \tau^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_2 \Delta_{-2}}{h_1^2 h_2^2} (\rho^{n-1} + 2\rho^n + \rho^{n+1}) \quad (3.15)$$

которое имеет точность второго порядка.

Покажем, что схема (3.15) реализуется с помощью простых трехточечных прогонок. Выбирая в качестве f величину v (удельный об'ем) из первых двух уравнений (3.7) имеем, после исключения

$$\frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2} = \left[\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} + \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right] \frac{\rho^{n-1} + 2\rho^n + \rho^{n+1}}{4} + \frac{1}{16} \tau^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_2 \Delta_{-2}}{h_1^2 h_2^2} (\rho^{n-1} + 2\rho^n + \rho^{n+1}) \quad (3.16)?$$

Из последних двух уравнений (3.7) имеем, после исключения v_x^n

$$\frac{v^{n+1/2} - v^{n-1/2}}{\tau} = \frac{\alpha^2 \Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \left[\alpha^2 v^{n+1/2} + \alpha \beta v^{n+1/2} + \alpha \beta v^{n+1/2} + \beta^2 v^{n+1/2} \right] \quad (3.17)$$

при $\alpha = \beta = 1/2$ уравнение (3.16, 17) реализуют уравнение (3.15)

п. 4. Схема расщепления бегущего счета

Применяя на каждом дробном шаге схему бегущего счета (1.9) (1.13), получаем

$$\begin{aligned} f^{n+1/2} &= G_1 f^n \\ f^{n+1} &= G_2 f^{n+1/2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$G_1 = \begin{vmatrix} \frac{C_1 + D_1}{2} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2} \\ 0 & E & 0 \\ -\frac{C_1 - D_1}{2a} & 0 & \frac{C_1 + D_1}{2} \end{vmatrix}$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{2} \\ 0 & -\frac{C_2 - D_2}{2a} & \frac{C_2 + D_2}{2} \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

Операторы C_s , D_s , в соответствии с (I.13), выражаются так

$$C_s = \left[\alpha, T_s + \beta, E + \alpha_2 a \tau \frac{\Delta-s}{h_s} \right]^{-1} \left[\alpha, T_s + \beta, E - \beta_2 a \tau \frac{\Delta-s}{h_s} \right]$$

$$D_s = \left[\alpha, T_s + \beta, E - \alpha_2 a \tau \frac{\Delta_s}{h_s} \right]^{-1} \left[\alpha, T_s + \beta, E + \beta_2 a \tau \frac{\Delta_s}{h_s} \right] \quad (4.3)$$

Отсюда оператор шага G схемы в целых шагах:

$$f^{n+1} = G f^n \quad (4.4)$$

выражается произведением матриц $G = G_2 G_1 =$

$$= \begin{vmatrix} \frac{C_1 + D_1}{2} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2} \\ \frac{C_2 - D_2}{2} \cdot \frac{C_1 - D_1}{2} & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{2} \cdot \frac{C_1 + D_1}{2} \\ \frac{(C_2 + D_2)(C_1 - D_1)}{4a} & -\frac{C_2 + D_2}{2a} & \frac{C_2 + D_2}{2} \cdot \frac{C_1 + D_1}{2} \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Покажем, что матрица

$$\frac{G-E}{\tau} = \begin{vmatrix} \frac{\frac{C_1 + D_1}{2} - E}{\tau} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2\tau} \\ \frac{(C_2 + D_2)(C_1 - D_1)}{4\tau} & \frac{C_2 + D_2}{2\tau} & -a \frac{(C_2 - D_2)(C_1 + D_1)}{4\tau} \\ -\frac{(C_2 + D_2)(C_1 - D_1)}{4a\tau} & -\frac{C_2 + D_2}{2a\tau} & \frac{(C_2 + D_2)(C_1 + D_1)}{4\tau} - E \end{vmatrix} \quad (4.6)$$

аппроксимирует матрицу A из (3.3)

Нетрудно показать, что $\frac{C_i + D_i}{2} \sim E$, $\frac{C_i + D_i}{2} - E \sim 0$,

$$\frac{C_i - D_i}{2a\tau} \sim -\frac{\Delta_i}{h_i} \sim -\frac{\Delta_i}{h_i} \quad (4.7)$$

Отсюда следует

$$\frac{G-E}{\tau} \sim A, \text{ что и требовалось доказать. } \text{ч.т.д.} \quad (4.8)$$

Так как каждая из схем бегущего счета устойчива:

$$\|G_1\| \leq 1, \quad \|G_2\| \leq 1 \quad (4.8)$$

то справедливо неравенство

$$\|G\| \leq 1 \quad (4.9)$$

Следовательно, схема расщепления бегущего счета сходится к системе (3.2). Сделаем несколько замечаний:

I. Несмотря на то, что одномерные схемы бегущего счета могут иметь второй порядок точности (при $\alpha = \beta = 1/2$) схема расщепления в целых ^{шагах} числах несимметрична и поэтому недостаточно точна. Для повышения точности следует просимметризовать схему (4.4), положив:

$$\Sigma = \frac{G + G^*}{2} = \frac{G_1 G_1 + G_2 G_2}{2} \quad (4.10)$$

Тогда оператор шага Σ примет симметричный вид

$$G^* = G, G_2 = \begin{pmatrix} \frac{C_1 + D_1}{2} & \frac{(C_1 - D_1)(C_2 - D_2)}{4} & -a \frac{(C_1 - D_1)(C_2 + D_2)}{4} \\ 0 & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{4} \\ -\frac{C_1 - D_1}{2a} & -\frac{(C_1 + D_1)(C_2 - D_2)}{4a} & \frac{(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}{4} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{C_1 + D_1}{2} & \frac{(C_1 - D_1)(C_2 - D_2)}{4} & -a \frac{(C_1 - D_1)(C_2 + D_2 + 2E)}{4 \cdot 2} \\ \frac{(C_2 - D_2)(C_1 - D_1)}{4} & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{4} \cdot \frac{C_1 + D_1 + 2E}{2} \\ -\frac{C_2 + D_2 + 2E}{2} \frac{C_1 - D_1}{4a} & -\frac{C_1 + D_1 + 2E}{2} \frac{C_2 - D_2}{4a} & \frac{(C_2 + D_2)(C_1 + D_1) + (C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}{4} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Это предложение принадлежит Годунову С.К., Забродину. [34.]

2. При перемножении операторных матриц их элементы (операторы) следует перемножить с учетом возможной некоммутативности.

п. 5. Метод приближенной факторизации для волнового уравнения

В предыдущих пунктах мы рассмотрели схемы в дробных ^{шагах} для уравнений акустики (3.1)

Как было замечено, величины u_1, u_2, v удовлетворяют уравнению (3.6). Величина v удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (5.1)$$

Поэтому указанная нами четырехслойная схема интегрирования (3.11) или эквивалентная схема в дробных шагах (3.16, 17) могут быть упрощены в применении к v . Коноваловым А.Н. [35] была предложена трехслойная схема интегрирования (5.1) основанная на методе приближенной факторизации оператора

Пусть
$$\frac{v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}}{\tau^2} = \Lambda \left(\frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} \right)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_s = \frac{a^2 \Delta_s \Delta_{-s}}{h_s^2} \quad s = 1, 2 \quad (5.2)$$

есть однородная аппроксимация 2-го порядка точности уравнения (5.1) Перепишем (5.2) в виде:

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda\right) \left(\frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2}\right) = v^n \quad (5.3)$$

Факторизуем приближенно оператор в левой части (5.3):

$$E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda \sim \left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1\right) \left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2\right) \quad (5.4)$$

и заменим схему (5.3) факторизованной

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1\right) \left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2\right) \left(\frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2}\right) = v^n \quad (5.5)$$

Схема (5.5) реализуется двумя прогонками:

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1\right) v^{n+\frac{1}{2}} = v^n,$$

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2\right) \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} = v^{n+\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

Нетрудно видеть, что схема (5.5) устойчива и имеет второй порядок точности.

Аналогичные схемы расщепления для уравнения колебаний были построены Самарским А.А. [], Дьяконовым Е.Г. []



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА.

п. I. Связь между стационарными и нестационарными задачами

Рассмотрим в прямоугольной области \mathcal{D} задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (I.1)$$

$$u(x, x_2) = f(x, x_2), \quad X = (x_1, x_2) \in \gamma \quad (I.2)$$

где γ - граница \mathcal{D} , $\mathcal{D} = \{0 \leq x_i \leq \tau, i=1,2\}$

Наряду с задачей (I.1) рассмотрим нестационарную задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right), \quad (I.3)$$

$$U(x_1, x_2, 0) = U_0(x_1, x_2), \quad (I.4)$$

~~с теми же~~ ^{теми же} стационарными краевыми условиями (I.2)

~~$$U(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2) \quad x_1, x_2 \in \gamma$$~~
~~(I.2)~~

Обозначим через $U(x, x_2)$ — решение задачи (I.1), (I.2)

через $U(x_1, x_2, t)$ — решение задачи (I.3), (I.4), (I.2)

Их разность

$$v(x, x_2, t) = U(x, x_2, t) - U(x_1, x_2) \quad (I.5)$$

удовлетворяет уравнению (I.3) с начальными данными:

$$v(x, x_2, 0) = v_0(x, x_2) = U_0(x, x_2) - U(x_1, x_2) \quad (I.6)$$

и нулевыми краевыми условиями

$$v(x_1, x_2, t) = 0, \quad x_1, x_2 \in \gamma \quad (I.7)$$

$v(x_1, x_2, t)$ представляется в виде ~~(см. TG)~~ ^(см. [38])

$$v(x_1, x_2, t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1, k_2}(t) \sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2 \quad (I.8)$$

где $A_{k_1, k_2}(t) = a_{k_1, k_2} e^{-a^2(k_1^2 + k_2^2)t}$

$$(I.9)$$

коэффициенты Фурье функции $v(x_1, x_2, t)$,
 α_{k_1, k_2} - коэффициенты Фурье функции $v_0(x_1, x_2)$.

Формулы (I.8), (I.9) можно записать в операторном виде:

$$v(x_1, x_2, t) = S(t) v(x_1, x_2, 0) \quad (I.10)$$

Оператор $S(t)$ в пространстве $L_2(D)$ имеет норму

$$\|S(t)\| = e^{-2\alpha^2 t} \quad (I.11)$$

Оператор шага $S(\tau)$ имеет норму

$$\|S(\tau)\| = e^{-2\alpha^2 \tau} \quad (I.12)$$

Отсюда

$$\|S(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (I.13)$$

Это означает, что независимо от выбора начальной функции $v_0(x_1, x_2)$

$$\|v(x_1, x_2, t) - u(x_1, x_2)\| \rightarrow 0 \quad (I.14)$$

т.е. решение нестационарной задачи стремится к решению стационарной при тех же краевых условиях, независимо от выбора начальных данных.

Ясно, что существует множество нестационарных уравнений, решения которых сводятся к решению стационарной задачи. Вместо уравнения (I.3) мы можем, например, рассмотреть уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \quad (I.15)$$

Нестационарное уравнение приобретает характер уравнения затухающих колебаний. Можно показать, что в случае (I.15) при любых начальных данных $u(x_1, x_2, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0)$, решение (I.15) сойдется к $u(x_1, x_2)$.

В рассмотренных примерах нестационарные уравнения (I.3) и (I.15) описывали вполне определенные физические процессы: диффузию тепла, распространение колебаний с затуханием. Однако, в некоторых случаях соответствующие нестационарные уравнения могут иметь лишь формальный смысл,

обеспечивая математические условия затухания (I.I3), и не описывая определенный физический процесс.

Это справедливо для уравнения упругого равновесия:

$$\Delta \Delta U = \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0 \quad (I.I6)$$

Нестационарное уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} \right] \quad (I.I7)$$

имеет оператор решения $S(t)$, удовлетворяющий условию затухания (I.I3), хотя трудно найти физическую модель, описываемую уравнением (I.I7).

Это нам не позволяет воспользоваться (I.I7) для построения итерационных схем. Соответствие между нестационарными и стационарными задачами в общем виде для произвольного эллиптического оператора \mathcal{L} изучено в работе Соболева С.Л. [3]

п.2. С х е м ы и н т е г р и р о в а н и я н е с т а - ц и о н а р н ы х з а д а ч и и т е р а ц и о н - н ы е с х е м ы .

Указанное несоответствие между нестационарными и стационарными уравнениями полностью переносится на разностные схемы. Возьмем в качестве примера двухслойную разностную схему для уравнения (I.3):

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Omega_1 U^{n+1} + \Omega_2 U^n \quad (I.I8)$$

Пусть U^n есть решение (I.I8), удовлетворяющее некоторым начальным данным: $U^0 = U_0$

$$(I.I9)$$

и стационарным краевым условиям

$$U^n = f, \quad x_1, x_2 \in \gamma \quad (I.20)$$

Пусть ω есть решение разностной краевой задачи

$$\Lambda \omega = (\Lambda_1 + \Lambda_2) \omega = 0; \quad \Lambda \sim a^2 \Delta = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad (I.21)$$

$$\omega = f, \quad x_1, x_2 \in \gamma. \quad \Lambda_i \sim a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2};$$

где f - функция из (I.20).

Разность

$$v^n = u^n - w^n \quad (I.22)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \Omega_1 v^{n+1} + \Omega_2 v^n + (\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda) w = \quad (I.23)$$

$= \Omega_1 v^{n+1} + \Omega_2 v^n + (\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda) w$.
Напомним, что операторы Ω_1, Ω_2 зависят от τ, h_1, h_2

операторы $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ только от h_1, h_2 .

Для того, чтобы при любом τ и произвольной $f, v^n \rightarrow 0$ необходимо, чтобы

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Lambda \quad (I.24)$$

при любом τ .

Условие (I.24) будем называть условием полной ~~сильной~~ аппроксимации.

При выполнении условия полной ~~сильной~~ аппроксимации (I.24) сходимость $v^n \rightarrow 0$:

$$\|v^n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \tau \text{ и } v^0 - \text{любые} \quad (I.25)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\|\Sigma(n\tau)\| \rightarrow 0 \quad n\tau = t \rightarrow \infty \quad (I.26)$$

где $\Sigma(n\tau)$ оператор решения схемы

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \Omega_1 v^{n+1} + \Omega_2 v^n \quad (I.27)$$

Условие (I.26) мы будем называть условием сильной ~~устойчивости~~ (см § 1, п. 2)

Для условия сильной устойчивости достаточно

$$\|\Sigma(\tau)\| \leq 1 - c(h_1, h_2), \quad c(h_1, h_2) > 0 \quad (I.28)$$

Итак, при выполнении условий полной ~~сильной~~ аппроксимации (I.24) и сильной устойчивости (I.26) решение u^n разностной нестационарной задачи (I.18), (I.19) с произвольной функцией u^0 и стационарными краевыми условиями (I.20) стремится к решению w стационарной задачи с теми же краевыми условиями (I.20)

Таким образом, мы можем рассматривать процесс интегрирования (I.18 - I.20), как итерационный процесс решения разностного уравнения (I.21), (I.20).

В этом случае шаг интегрирования τ_n мы можем рассматривать как итерационный параметр, или параметр релаксации.

~~полный~~ В случае схемы (I.18) с переменным шагом τ_n условие аппроксимации остается неизменным, условие сильной устойчивости принимает вид: $\|Z(t)\| \rightarrow 0$,

$$Z(t) = Z(\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1}) = Z(\tau_{n-1}) Z(\tau_{n-2}) \dots Z(\tau_0) \quad (I.28)$$

где $Z(\tau_k)$ - оператор шага схемы (1.18) при переходе с k -го на $(k+1)$ -й слой:

$$u^{k+1} = Z(\tau_k) u^k \quad (I.30)$$

Снова для сильной устойчивости достаточно условия (I.28). Заметим, что все известные итерационные схемы могут быть истолкованы как схемы интегрирования нестационарной задачи с переменным шагом τ_k .

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим ряд итерационных схем.

I. Явная схема $\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau_n} = \Lambda u^n$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad \Lambda_1 = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2}; \quad \Lambda_2 = a^2 \frac{\Delta_{-2} \Delta_2}{h_2^2} \quad (I.31)$$

$$\beta = 1 - 4a^2 \tau \left(\frac{\sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2} + \frac{\sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2} \right) \quad (I.32)$$

Условие ~~полный~~ аппроксимации выполнено.

Условие сильной устойчивости выполнено при ограничении на шаг:

$$\tau_n \leq \frac{1}{2a^2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right)} \quad (I.33)$$

Действительно, при выполнении (I.33) имеем:

$$\|Z(\tau_n)\| = |\beta_n| \leq 1 - \frac{1}{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}} = 1 - \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = 1 - O(h^2) \quad (I.34)$$

Условие (I.33) достаточно, но не необходимо. Можно пользоваться любым набором

$$\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_{n-1}; \quad \tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} = t$$

так чтобы $\|Z(\tau_0 + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1})\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ~~полный~~ $(I.35)$

3. Сделка берется резаным
~~Автоматом~~ Автоматом,
 Франкф., Юне [40, 41]

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_0 u^n \quad (1.38)$$

$$\Omega_1 = \frac{T_{-1} + T_{-2}}{h_1^2} \quad ; \quad \Omega_2 = \frac{T_1 + T_2}{h_2^2} - \frac{2E}{h_1^2} - \frac{2E}{h_2^2}$$

так как

сделка (1.39)

нашлось

сделка сделка успешно для
успешно

$\Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_1 + \Omega_2 = 1$,
 упрощено успешно
успешно

$$z_1 + z_2 = \frac{z_1}{h_1^2} + \frac{z_2}{h_2^2} < \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{z_1}{h_2^2} \quad (1.40)$$

успешно (1.40)

сделка успешно

9.4

8:

$$8 = - \frac{z_1 \cos k_1 h_1 + z_2 \cos k_2 h_2 - 2z_1 - 2z_2 + i(z_1 \sin k_1 h_1 + z_2 \sin k_2 h_2)}{z_1 \cos k_1 h_1 + z_2 \cos k_2 h_2 - 1 + i(z_1 \sin k_1 h_1 + z_2 \sin k_2 h_2)}$$

в то время, как для отдельных τ_k можно допускать $\|\Sigma(\tau_k)\| > 1$ (I.36)

α) Подробнее об этом см. в п. 3.....

2. Схема релаксации по линии (линейной релаксации)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau_n} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n \quad (I.37)$$

или
$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^n + \Lambda_2 u^{n+1} \quad (I.37')$$

Обе схемы ^{полно} сильно аппроксимируют.

Схема (I.37) сильно устойчива при условии

$$\tau_n \leq \frac{h_2^2}{2\alpha^2} \quad (I.38)$$

Схема (I.37') сильно устойчива при

$$\tau_n \leq \frac{h_1^2}{2\alpha^2} \quad (I.38')$$

Аналогично схеме (I.31) параметр итерации τ_k можно варьировать так, чтобы выполнялось условие (I.35) и допускалось условие (I.36)

Так как имеется прямая связь между разностными схемами интегрирования нестационарного уравнения и итерационными схемами, то всякое улучшение ^{интегрирования} первых схем почти автоматически влечет за собой улучшение ^{итерационных схем} последних. Схемы с дробными шагами сразу же оказались прекрасными итерационными схемами.

3. Схема ~~н-н~~ ^{продолжно поперечит} ~~прогонки~~
$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \frac{1}{2} [\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n], \quad (I.39)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2} [\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^{n+1}]$$

Эквивалентная ей схема в целых шагах имеет вид:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n \quad (I.40)$$

где
$$\Omega_1 = \frac{1}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) - \frac{1}{2} \tau (\Lambda_1 + \Lambda_2)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) + \frac{1}{2} \tau (\Lambda_1 + \Lambda_2) \quad (I.41)$$

Из (I.4I) следует сильная аппроксимация.

Сильная устойчивость имеет место при любом τ .

Действительно для ρ имеем выражение

$$\rho = \frac{(1 - 2a^2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}) (1 - 2a^2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2})}{(1 + 2a^2 \frac{\tau}{h_1^2} \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}) (1 + 2a^2 \frac{\tau}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2})} \quad (I.42)$$

При малых $h_1 = h_2 = h$ и $\tau = \frac{a^2 \tau}{h^2} < \frac{1}{2}$ (I.43)

$$\|\Sigma(\tau)\| = \max |\rho| \sim 1 - 2\tau h^2$$

при малых h и $\tau > \frac{1}{2}$ (I.43_г)

$$\|\Sigma(\tau)\| = \left(\frac{2\tau - 1 - \tau \frac{h^2}{2}}{2\tau + 1 - \tau \frac{h^2}{2}} \right)^2 < 1 - 2h^2.$$

при малых (I.43)

5. Схема стабилизирующей поправки

$$\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 U^{n+1/2} + \Lambda_2 U^n, \quad (I.44)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (U^{n+1} + U^n)$$

Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Omega_1 U^{n+1} + \Omega_2 U^n, \quad (I.45)$$

$$\Omega_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2 - \tau \Lambda_1 \Lambda_2; \quad \Omega_2 = \tau \Lambda_1 \Lambda_2.$$

Схема (I.45) ~~полно~~ аппроксимирует

Сильная устойчивость следует из выражения для ρ :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1 + 16a^2 \tau^2 \frac{\sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2}}{1 + 4a^2 \tau \left(\frac{\sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2} + \frac{\sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2} \right) + 16} \\ &= \frac{1 + 16\tau_1 \tau_2 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2} \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{1 + 4 \left(\tau_1 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2} + \tau_2 \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2} \right) + 16\tau_1 \tau_2 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2} \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}} \\ &= \frac{1 + a_1 a_2}{1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2}; \quad a_i = 4\tau_i \sin^2 \frac{k_i h_i}{2} \end{aligned} \quad (I.46)$$

Для $\|\Sigma(\tau)\|$ при малых h_1, h_2 и произвольных τ_1, τ_2 справедлива оценка :

$$\|\Sigma(\tau)\| \sim 1 - \tau_1 h_1^2 - \tau_2 h_2^2 \quad (\text{I.47})$$

5. Схема расщепления

$$\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 [\alpha U^{n+1/2} + \beta U^n]$$

(I.48)

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 [\alpha U^{n+1} + \beta U^{n+1/2}]$$

Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = \Omega_1 U^{n+1} + \Omega_2 U^n, \quad (\text{I.49})$$

$$\Omega_1 = \alpha(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \alpha^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2; \quad \Omega_2 = \beta(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \beta^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2$$

Схема (I.49) удовлетворяет требованию полной аппроксимации при $\alpha = \beta = 1/2$. При этом она становится эквивалентной схеме ППШ.

6. Схема предиктор - корректор (схема аппроксимационной поправки)

$$\frac{U^{n+1/2} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 U^{n+1/2}; \quad \frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 U^{n+1} \quad 150) \quad (\text{I.46})$$

$$\frac{U^{n+2} - U^n}{2\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2) U^{n+1}$$

Из первых двух уравнений имеем

$$AU^{n+1} = (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2)U^{n+1} = E \cdot U^n \quad 151) \quad (\text{I.47})$$

Исключая из 151) (I.47) и 150) (I.46) в U^{n+1} , находим

$$A(U^{n+2} - U^n) = 2\tau \Lambda U^n$$

$$A = \Lambda_1 \Lambda_2 = (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2), \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$$

152) ~~(I.48)~~

Заметим, что усредненная
 дискретизация сам ПММ,
 рассуждения ($\alpha = \frac{1}{2}$) и предположе-
 ния имеют место только
 для непрерывных $\sqrt{\text{вымерных}}$ областей ($m=2$)
 и ~~непрерывных~~ $\sqrt{\text{вымерных}}$ областей.
 и ~~непрерывных~~ $\sqrt{\text{вымерных}}$ областей.
 в ~~непрерывных~~ $\sqrt{\text{вымерных}}$ областях.

~~Сам рассуждения и предположения~~
~~предположения~~

На рисунке ~~представлены~~ ~~усредненные~~
 и ~~дисcretized~~ ~~на рисунке~~ ~~f~~.

Укажем в заключение еще

одну статью ~~в сам а манускрипте~~

8. ~~руководство~~ ~~или руководство~~ ~~оправдание~~ ~~таб. 42, 43~~
~~предположения~~ ~~Должны быть с. 1~~ ~~сам [42, 43]~~
 Рассуждения ~~поэтому~~ ~~поэтому~~ ~~сам~~

$$A \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad (58)$$

где A — матрица, неопределен-
 ность ~~пока~~ ~~оператор~~.

Отсюда легко следует ^{полная} сильная аппроксимация схемы.
 Действительно, из (I.48) ⁽⁵²⁾ имеем :

$$\frac{u^{n+2} - u^n}{2\tau} = \Omega_1 u^{n+2} + \Omega_2 u^n \quad (53) \quad (I.49)$$

$$\Omega_1 = \frac{F}{2\tau} - A, \quad \Omega_2 = -\frac{F}{2\tau} + A + \Lambda,$$

Без труда проверяется сильная устойчивость.

Из (I.48) ⁽⁵²⁾ находим выражение для коэффициента перехода с n -го шага на $n+2$:

$$\rho = \frac{1 - (a_1 + a_2) + a_1 a_2}{1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2}, \quad a_i > 0 \quad (54) \quad (I.50)$$

Нетрудно видеть, что схема аппроксимационной поправки эквивалентна схеме ППП.

Отсюда обычным образом следует, что для малых h имеем

$$\|\Sigma(\tau)\| \sim 1 - 2h^2$$

п.3 Скорость сходимости

До сих пор мы рассматривали только итерационные схемы с постоянным шагом.

При выполнении критерия сильной устойчивости норма оператора шага для всех схем имела вид:

$$1 - ch^2$$

Таким образом, хорошие схемы интегрирования нестационарного уравнения не дают больших преимуществ по сравнению с плохими, если их применять как итерационные схемы с постоянным шагом. Картина резко меняется в случае переменного шага, τ .

Еще Ричардсон [44] получил существенное улучшение сходимости явной схемы (I.3I), введя переменный шаг. Он свел задачу о нахождении оптимальных шагов к построению полинома, наименьшим образом отклоняющегося от нуля.

Пусть сделано m итераций с переменными шагами $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$. Тогда амплитуда гармоник $\sin k_1 x_1, \sin k_2 x_2$

увеличится в

$$P_m(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \mu) = \rho = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_m = (1 - \alpha_1 \mu)(1 - \mu \alpha_2) \dots (1 - \alpha_m \mu) \quad (2.1)$$

раз.

рез.

Здесь

$$\alpha_s = 2a^2 \zeta_s; \quad \mu = \frac{2 \sin^2 \frac{\kappa_1 h_1}{2}}{h_1^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{\kappa_2 h_2}{2}}{h_2^2} = \mu(\kappa_1, \kappa_2) \quad (2.2)$$

Наилучшему выбору параметров α_s, μ отвечает условие:

$$\max_{\alpha, \mu} |P(\alpha, \mu)|$$

$$0 \leq \mu \leq 1, \quad \mu_0 = \sum_{k=1}^m \mu_k \quad (2.3)$$

достигает минимального значения.

Таким образом, выбор оптимального шага итерации сводится к задаче выделения из семейства (2.1) полинома $P(\alpha, \mu)$ с наименьшим отклонением от нуля.

Как известно (см. [1]) решением этой задачи является полином Чебышева:

$$P_m(x) = T_m \left[\frac{\mu_1 + \mu_0 - 2x}{\mu_1 - \mu_0} \right] \quad (2.4)$$

т.е. $T_m(x)$ — полином Чебышева.

Оказалось, что при таком выборе шагов сходимость ускоряется до величины порядка



$$1 - O(h) \quad (2.5)$$

В случае неявных схем выражение для ρ усложняется.

Так, для метода ППП имеем:

$$\rho = \rho_1 \dots \rho_m = R(\alpha, \mu, \nu) = \frac{1 - \alpha_1 \mu}{1 + \alpha_1 \mu} \cdot \frac{1 - \alpha_1 \nu}{1 + \alpha_1 \nu} \cdot \frac{1 - \alpha_2 \mu}{1 + \alpha_2 \mu} \cdot \frac{1 - \alpha_2 \nu}{1 + \alpha_2 \nu} \dots \quad (2.6)$$

$$\dots \frac{1 - \alpha_m \mu}{1 + \alpha_m \mu} \cdot \frac{1 - \alpha_m \nu}{1 + \alpha_m \nu} = R(\alpha, \mu) \cdot R(\alpha, \nu),$$

$$\alpha_s = \frac{1}{2} a^2 \zeta_s; \quad \mu = \frac{4 \sin^2 \frac{\kappa_1 h_1}{2}}{h_1^2}; \quad \nu = \frac{4 \sin^2 \frac{\kappa_2 h_2}{2}}{h_2^2} \quad (2.7)$$

Оптимальный набор шагов α_s соответствует решению вариационной задачи

$$\min_{\alpha} \max_{\mu, \nu} |R(\alpha, \mu, \nu)| \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad 0 \leq \nu \leq 1 \quad (2.8)$$

которая эквивалентна задаче

$$\min_{\alpha} \max_{\mu} |R(\alpha, \mu)| \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (2.9)$$

Задача (2.9) не получила еще полного решения, однако

известно, что оптимальные значения α_s находятся из уравнения \dots (см. [1])

Сивдуг [23],
 укажем способ подбора параметров α, \dots, α_m обеспечивающий уменьшение нормы отклонения в $\frac{1}{q}$ раз ($q < 1$) через m шагов и оценим m в функции от h .

Задавшись $m, h, q < 1$, разделим интервал $[1, N]$ на подинтервалы $K_1 = 1, \dots, K_m = N$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$q = \frac{1 - \alpha_1 \mu_1}{1 + \alpha_1 \mu_1} = - \frac{1 - \alpha_2 \mu_2}{1 + \alpha_2 \mu_2} = \frac{1 - \alpha_3 \mu_3}{1 + \alpha_3 \mu_3} = \dots \quad (2.10)$$

$$\dots = - \frac{1 - \alpha_{m-1} \mu_{m-1}}{1 + \alpha_{m-1} \mu_{m-1}} = \frac{1 - \alpha_m \mu_m}{1 + \alpha_m \mu_m} ; \quad \mu_s = \mu(K_s)$$

Это возможно, так как величина

$$q(\alpha, K) = \frac{1 - \alpha \mu(K)}{1 + \alpha \mu(K)} ; \quad (2.11)$$

для $\alpha \geq 0, K > 0$ по модулю не превосходит 1 и является монотонно убывающей функцией от K при фиксированном α .

Для K в интервале $K_s \leq K \leq K_{s+1}$ величина $q(\alpha_s, K)$ всегда по модулю не превосходит q вне интервала по модулю не превосходит $\min \{1 - 2h^2, 1 - h^2\}$ (см. I.43)

Таким образом, через m шагов каждая гармоника затухает по амплитуде не меньше, чем в $\frac{1}{q}$ раз. Оценим величину m . Предполагая h достаточно малым, имеем

$$\mu_s = K_s^2 \quad (2.12)$$

Из равенства (2.10) следует

$$(1 - q) - \alpha_s (1 + q) \mu_s = 0$$

$$(1 + q) - \alpha_s (1 - q) \mu_s = 0 \quad (2.13)$$

Исключая из (2.13) α_s имеем:

$$\frac{\mu_{s+1}}{\mu_s} = \left(\frac{1 + q}{1 - q} \right)^2 \quad (2.14)$$

Пользуясь (2.12), имеем:

$$\frac{K_{s+1}}{K_s} = \frac{1+q}{1-q}, \quad s=1, 2, \dots, m. \quad (2.15)$$

Перемножая равенства (2.15), имеем:

$$N = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^m, \quad m \sim \frac{\ln N}{\ln \frac{1+q}{1-q}} \sim \frac{\ln \frac{1}{h}}{\ln \frac{1+q}{1-q}} = \frac{\ln \frac{1}{h}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \quad (2.16)$$

Равенство (2.16) носит характер асимптотической оценки с неопределенной константой.

Покажем, что в случае схемы ППП соответствующим выбором шагов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ через $m = N - (\text{квадрат})$, $m = N_1 + N_2 - (\text{прямоугольник})$ итерационное решение U^n выйдет на точное решение разностной задачи Дирихле.

Если выбрать $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$, $m = N_1 + N_2$ из условий

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mu_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\mu_2}, \quad \dots, \quad \alpha_{N_1} = \frac{1}{\mu_{N_1}} \quad a) \quad (2.17)$$

$$\alpha_{N_1+1} = \frac{1}{\nu_1}, \quad \alpha_{N_1+2} = \frac{1}{\nu_2}, \quad \dots, \quad \alpha_{N_1+N_2} = \frac{1}{\nu_{N_2}} \quad b)$$

$$\mu_i = \frac{4 \sin^2 \frac{h_i}{2}}{h_i^2}, \quad \nu_i = \frac{4 \sin^2 \frac{h_i}{2}}{h_i^2}$$

то

$$R(\alpha, \mu, \nu) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_m = 0 \quad (2.18)$$

для любых K_1, K_2 ,

В случае квадрата, когда $h_1 = h_2 = h$; $N_1 = N_2 = N$ достаточно выполнения условий (2.17a), т.е. только N итераций.

п. 4. Итерационные схемы для

$m > 2$ в многомерном случае

Требования ~~оптимальной~~ аппроксимации и сильной устойчивости являются теми дополнительными требованиями, которые позволяют отбирать из схем интегрирования нестационарных задач хорошие итерационные схемы.

Анализ, проведенный в п. I показывает, что такими схемами дробных шагов являются схемы:

- а) продольно-поперечной прогонки;
- б) стабилизирующей поправки;
- в) расщепление с $\alpha = \frac{1}{2}$
- г) аппроксимирующей поправки

Схемы (а), (б), (в) совпадали при $m=2$.

Рассмотрим схемы (а) - (б) при

в предельном случае
 $m = 3$

Схема III становится непригодной из-за неустойчивости.

Схема стабилизирующей поправки имеет вид

в целых шагах:
~~КСМ.~~

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n;$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 (u^{n+2/3} - u^n); \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n) \quad (3.1)$$

~~Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид:~~

в целых шагах:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) u^{n+1} - \tau (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \times \\ \times (u^{n+1} - u^n) + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n) \quad (3.2)$$

Отсюда

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n \quad (3.3)$$

$$\text{где } \Omega_1 = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 - \tau (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3$$

$$\Omega_2 = \tau (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) - \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \quad (3.4)$$

Схема стабилизирующей поправки, таким образом, является ~~слабо~~ ^{пол} аппроксимирующей. Ее сильная устойчивость следует из представления для ρ :

$$\rho = \frac{1 + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + a_1 a_2 a_3}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)} \quad (3.5)$$

Схема расщепления имеет вид в дробных шагах:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 (\alpha u^{n+1/3} + \beta u^n);$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 (\alpha u^{n+2/3} + \beta u^{n+1/3});$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 (\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+2/3}); \quad (3.6)$$

в целых шагах:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)(\alpha U^{n+1} + \beta U^n) - \tau(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \times \\ \times (\alpha^2 U^{n+1} + \beta^2 U^n) + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (\alpha^3 U^{n+1} + \beta^3 U^n) \quad (3.7)$$

Отсюда видно, что ни при каком α схема расщепления не удовлетворит условию сильной аппроксимации, в то же время будет сильно устойчивой при $\alpha \geq \frac{1}{2}$ и любом τ .

Схема аппроксимирующей поправки имеет вид
Рассмотрим, наконец, схему аппроксимирующей поправки:

$$\frac{U^{n+1/3} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 U^{n+1/3}; \quad \frac{U^{n+2/3} - U^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 U^{n+2/3} \quad a) \\ \frac{U^{n+1} - U^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 U^{n+1}; \quad \frac{U^{n+2} - U^{n+1}}{2\tau} = \Lambda U^{n+1} \quad b)$$

(3.8)

После исключения дробных шагов из (3.8a) имеем

$$(E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2)(E - \tau \Lambda_3) U^{n+1} = U^n \quad (3.9)$$

Исключая U^{n+1} из (3.8b), (3.9) получаем

$$A(U^{n+2} - U^n) = 2\tau \Lambda U^n; \quad A = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2)(E - \tau \Lambda_3) \quad (3.10)$$

Отсюда сразу следует *полная* аппроксимация схемы аппроксимационной поправки.

Сильная устойчивость следует из выражения для ρ :

$$\rho = \frac{1 - (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) - a_1 a_2 a_3}{1 + (a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + a_1 a_2 a_3}; \quad (3.11)$$

Сделаем два замечания. *Заметим по ходу рассмотрения*
следующее:

I. Сопоставление схем расщепления с $\alpha = \frac{1}{2}$ и стабилизирующей поправки показывает, что степень аппроксимации никак не связана со свойством *полной* сильной аппроксимации: схема расщепления при $\alpha = \frac{1}{2}$ имеет второй порядок аппроксимации, но не является *полной* сильно аппроксимирующей; схема стабилизирующей поправки, напротив, имеет первый порядок аппроксимации, но зато обладает свойством *полной* сильной аппроксимации.

и селена мансупурупуру суперста.

3. ~~Кубит~~ ~~от~~ ~~ропорит~~ ~~о~~ ~~наприм~~ ~~Дрос~~

~~Селен~~

3. ~~В~~ На уранне, селенно
в купе ^{незначительная} ^{примесь} ^{селена} ^{не}
всего ^{примесь} ^{селена} ^{не}
уменьш. ^{примесь} ^{селена} ^{не}
но ^{примесь} ^{селена} ^{не}
~~от~~ ^{примесь} ^{селена} ^{не}
их ^{примесь} ^{селена} ^{не}
~~селе~~ ^{примесь} ^{селена} ^{не}
отмеч, ~~от~~ ^{примесь} ^{селена} ^{не}
срабатыва ^{примесь} ^{селена} ^{не}
селе ^{примесь} ^{селена} ^{не}
менее ^{примесь} ^{селена} ^{не}

(01.0)

2. Пригодными для $m=3$ остаются схемы поправок, с той разницей, что схема стабилизирующей поправки реализуется двухслойными схемами, схема аппроксимирующей поправки - многослойными схемами в дробных шагах.

п. 4. Итерационные схемы, основанные на схемах интегрирования гиперболических уравнений.

Поставим в соответствие уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$ уравнение колебаний с затуханием

$$b \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi, \quad b > 0 \quad (4.1)$$

Перейдем от уравнения (4.1) к системе, положив:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = u_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = u_2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -q = a^2 v \quad (4.2)$$

Из (4.2) имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -a^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - bq \quad (4.3)$$

Переходя к v , получаем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - bv \quad (4.4)$$

На первом дробном шаге интегрируется система

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (4.5)$$

с помощью мажорантной неявной схемы бегущего счета, которая в переменных u_1, u_2, v имеет вид (см. формулы (4.2, 3) § 3)

$$f^{n+1/2} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -aB_1 \\ 0 & E & 0 \\ \frac{1}{a}B_1 & 0 & A_1 \end{pmatrix} \cdot f^n = \text{[scribble]} \cdot f^n \quad (4.6)$$

где

$$f = (u_1, u_2, v); \quad A_1 = \frac{C_1 + D_1}{2}; \quad B_1 = \frac{C_1 - D_1}{2} \\ C_1 = (E + a\tau \frac{\Delta_1}{h_1})^{-1}; \quad D_1 = (E - a\tau \frac{\Delta_1}{h_1})^{-1}. \quad (4.7)$$

На втором дробном шаге интегрируется система

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (4.8)$$

с помощью аналогичной схемы:

$$f^{n+1} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & -aB_2 \\ 0 & -\frac{1}{a}B_2 & A_2 \end{pmatrix} f^{n+1/2} = \text{[scribble]} f^{n+1/2} \quad (4.9)$$

$$A_2 = \frac{C_2 + D_2}{2}; \quad B_2 = \frac{C_2 - D_2}{2} \\ C_2 = (E + a\tau \frac{\Delta_2}{h_2})^{-1}; \quad D_2 = (E - a\tau \frac{\Delta_2}{h_2})^{-1} \quad (4.10)$$

После этого применяется корректор

$$\frac{f^{n+2} - f^n}{2\tau} = \Lambda f^{n+1} - \theta f^{n+1} \quad (4.11)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_i = \frac{E + \theta_i \tau \Lambda_i}{\tau} \quad \frac{\theta_i - E}{\tau}$$

Покажем, что указанная схема удовлетворяет требованиям сильной аппроксимации и устойчивости.

Схема (4.6), (4.9) эквивалентна схеме:

$$A f^{n+1} = f^n; \quad A = A_1 A_2 = (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2) \quad (4.12)$$

Исключая из (4.11) и (4.12) f^{n+1} имеем

$$A f^{n+2} - A f^n = 2\tau(\Lambda - \theta) f^n \quad (4.13)$$

Отсюда сразу же следует полная сильная аппроксимация и сильная устойчивость требует обоснования.

п.6. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона.

Покажем, что решение краевой задачи для уравнения Пуассона даже с помощью сильно устойчивых и полно аппроксимирующих схем требует специальной аппроксимации правой части.

Для уравнения Пуассона

$$\Delta u + q = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (5.1)$$

с краевыми условиями первого рода

$$u(s) = f(s) \quad (5.2)$$

применим схему расщепления с весами:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 (\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n) + \bar{q}_1, \quad (5.3)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}) + \bar{q}_2$$

где \bar{q}_1, \bar{q}_2 - некоторые, пока неопределенные, правые части.

Схема с целыми шагами имеет вид:

$$(E - \alpha \tau \Lambda_1)(E - \alpha \tau \Lambda_2) u^{n+1} = (E + \beta \tau \Lambda_1)(E + \beta \tau \Lambda_2) u^n + \tau \bar{q}$$

$$\bar{q} = \beta_2 \bar{q}_1 + \Lambda_1 \bar{q}_2 = (E + \beta \tau \Lambda_2) \bar{q}_1 + (E - \alpha \tau \Lambda_1) \bar{q}_2 \quad (5.4)$$

При $\alpha = 1/2$ мы имеем ^{полно} сильно аппроксимирующую схему.
 Для ~~сильной~~ ^{полной} аппроксимации необходимо также, чтобы

$$\bar{q} = q \quad (5.5)$$

Полагая для определенности $\bar{q}_1 = 0$, имеем

$$\bar{q}_2 = (E - \alpha \tau \Lambda_1) \bar{q}_2 = q \quad (5.6)$$

Так как $\|(E - \alpha \tau \Lambda_1)^{-1}\| \leq 1$, уравнение (5.6) разрешимо с помощью обычной прогонки.

п. 7. Итерационные схемы с учетом дробных шагов.

До сих пор мы рассматривали сходимость итераций только на целых шагах (или, что то же, на каком-либо дробном шаге). Покажем, что в некоторых случаях целесообразно вести рассмотрение величин одновременно на целых и дробных шагах. Поставим, как обычно, краевой задаче эллиптического типа

$$\mathcal{L}u + q = 0 \quad u(s) = f(s) \quad (6.1)$$

в соответствии итерационную схему

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 (\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n) + \bar{q}_1 \quad a) \quad (6.2)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 (\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}) + \bar{q}_2 \quad b)$$

$$\alpha + \beta = 1$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \sim \mathcal{L}$$

(6.3)

При этом операторы Λ_1, Λ_2 не содержат параметра τ , и аппроксимация (6.3) - ~~вычислительная~~ ^{полная}.

Продолжим равенства (6.2)

$$\frac{u^{n+3/2} - u^{n+1}}{\tau} = \Lambda_1 (\alpha u^{n+3/2} + \beta u^{n+1}) + \bar{q}_1 \quad (6.4)$$

Складывая (6.2 а, б) и (6.2 в), (6.4) получим:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha v^n + \beta u^n) + \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta v^n) + \bar{q} \quad \text{а)} \quad (6.5)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha v^{n+1} + \beta u^{n+1}) + \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta v^n) + \bar{q} \quad \text{б)} \quad (6.5)$$

где положено

$$v^n = u^{n+1/2}, \quad \bar{q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 \quad (6.6)$$

Наконец, складывая (6.5) а, б имеем:

$$\frac{(u^{n+1} v^{n+1}) - (u^n v^n)}{\tau} = \Lambda_1[\alpha(v^n + v^{n+1}) + \beta(u^n + u^{n+1})] + \quad (6.7)$$

$$+ 2\Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta v^n) + 2\bar{q}$$

В предположении сильной устойчивости схемы (6.2)

$$u_n \rightarrow u, \quad v_n \rightarrow v \quad (6.8)$$

и из (6.7) и (6.8) имеем

$$\Lambda_1[\alpha v + \beta u] + \Lambda_2(\alpha u + \beta v) + \bar{q} = 0 \quad (6.9)$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем:

$$\Lambda\left(\frac{u+v}{2}\right) + \bar{q} = 0 \quad (6.9)$$

Если положить

$$\bar{q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 = q \quad (6.10)$$

то (6.9) означает, что $\frac{u^n + u^{n+1/2}}{2}$ сводится к полному решению u разностной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \Lambda u + q &= 0 \\ u(s) &= f(s) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Заметим, что указанный способ получения предельного решения становится предпочтительным в случае произвольной границы и переменных коэффициентов. Действительно, мы доказали сходимость полусуммы дробных шагов, не исключая какой-либо дробный шаг, т.е. не требуя, тем самым, коммутативности разностных операторов, которая нарушается в случае переменных коэффициентов и произвольной границы. Биркгоф и Варга в своем

анализе сходимости метода ППЦ (см. [48]) указали на коммутативность как существенный элемент доказательства сходимости. Повидимому, их возражение отпадает при последнем способе предельного перехода.

85 §6. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

п.1. Уравнения упругого равновесия и упругих колебаний.

Деформация плоского упругого тела характеризуется тензором (тензор деформации)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2. \quad (I.1)$$

Напряжения в теле, вызванные деформацией, характеризуются тензором σ_{ij} (тензор напряжения). По закону Гука, тензоры σ_{ij} , ε_{ij} связаны линейной зависимостью:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \operatorname{div} \vec{U} \quad (I.2)$$

Условия упругого равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0, \end{aligned} \quad (I.3)$$

X_1, X_2 — компоненты массовых сил.

По принципу Даламбера уравнения упругих колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0, \\ -\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0, \end{aligned} \quad (I.4)$$

Пользуясь (I.2), уравнения (I.4) можно записать в виде:

$$-\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} + \mu \Delta \vec{U} + \vec{X} = 0 \quad (I.5)$$

Соответственный вид получают уравнения (I.3).

Уравнения (I.5) можно несколько видоизменить:

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + X_1 &= 0 \\ -\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (I.6)$$

Действительно, при фиксированном ψ уравнения (I.7) определяют G_{ij} , а, следовательно, в силу (I.2) также и ε_{ij} . Обратно, задание ε_{ij} , в силу (I.2), определяет G_{ij} , следовательно, имеет те же условия совместности.

Введя в рассмотрение величину

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (\text{I.9})$$

имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \varepsilon_{12} - \omega \quad (\text{I.I0})$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \varepsilon_{12} + \omega, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} \quad (\text{I.II})$$

Условия совместности (I.I0), (I.II) дают:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}, \quad (\text{I.I2})$$

соответственно

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \quad (\text{I.I3})$$

Наконец, условия совместности (I.I2), (I.I3) дают

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \right) = \\ & = - \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.I4})$$

в силу (I.2), (I.7) условия (I.I4) приводят к (I.8)

Соответственно меняются уравнения (I.3).

В случае отсутствия массовых сил ($X_1 = X_2 = 0$),
положив

$$G_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}; \quad G_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}; \quad G_{12} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (I.7)$$

тождественно удовлетворим (I.3).

Функция ψ не является произвольной. Уравнения (I.7) представляют собой переопределенную систему уравнений для ψ . Ее условия совместности, как нетрудно показать, имеют вид:

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad (I.8)$$

Гармонический анализ устойчивости уравнения (I.5) показывает, что упругие колебания не затухают, следовательно, решения (I.3) не могут быть получены из решения (I.4) выходом на стационарный режим. Будем описывать затухание упругих колебаний с помощью уравнения

$$\alpha \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{U} + \mu \Delta \vec{U} + \vec{X}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (I.I5)$$

Уравнение (I.I5) позволит нам получить и итерационные схемы решения стационарного уравнения. Для получения простейших итерационных схем мы можем воспользоваться также уравнением чисто параболического типа

$$\alpha \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{U} + \mu \Delta \vec{U} + \vec{X} \quad (I.I6)$$

Аналогичный прием может быть использован для уравнения (I.8). Мы ставим ему в соответствие уравнение параболического типа

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta \Delta \psi = 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (I.I7)$$

или просто уравнение

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \Delta \psi = 0 \quad (I.I8)$$

п. 2 Краевые задачи теории упругости.

Для уравнения (1.5) могут быть поставлены следующие задачи:

1. Первая краевая задача. На границе γ плоской области \mathcal{D} заданы смещения u_1, u_2 , в функции от S (точки γ) и t :

$$\bar{u}(s) = \bar{f}(s, t) \quad (2.1)$$

2. Вторая краевая задача. На границе γ заданы напряжения нормальное и тангенциальное

$$\sigma_n(s) = f_1(s, t), \quad \sigma_\tau(s) = f_2(s, t) \quad (2.2)$$

3. Краевая задача смешанного типа. На одной части границы задаются смещения, на другой напряжения. В случае стационарных задач функции f_1, f_2 должны удовлетворять дополнительным условиям, обеспечивающим равновесие тела, рассматриваемого как жесткое.

4. В случае бигармонического уравнения (1.8) или соответствующего неоднородного уравнения

$$\Delta \Delta \psi + q = 0 \quad (2.3)$$

Мы будем рассматривать краевую задачу следующего типа:

$$\psi = 0, \quad \Delta \psi = f(s) \quad (2.4)$$

К уравнениям (2.3), (2.4) мы приходим, например, в случае свободно опертой пластины. Тогда ψ истолковывается как смещение средней плоскости пластины, q - нагрузка, $f(s) = 0$.

п. 3. Итерационные схемы решения краевых задач для бигармонического уравнения.

Аналогично предыдущему, будем рассматривать итерационные схемы решения уравнения.

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad (3.1)$$

В правое Колье и Дабмее [50] Дие
обозначена семье отчасти и несут
направление Думаса - Радиффа не
сиречь Думаса и несут управление:

как схемы интегрирования уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22}) \psi = 0 \quad (3.2)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}$$

1. Схема расщепления.

Построим эту схему аналогично случаю уравнения теплопроводности общего типа (см. §1, 14)

$$\frac{\psi^{n+1/2} - \psi^n}{\tau} + L_{11} \psi^{n+1/2} + L_{12} \psi^n = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+1/2}}{\tau} + L_{21} \psi^{n+1/2} + L_{22} \psi^{n+1} = 0$$

где

$$L_{11} = \left(\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \right)^2, \quad L_{22} = \left(\frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right)^2, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_{-2} \Delta_2}{(h_1 h_2)^2} \quad (3.4)$$

Соответствующая схема в целых шагах имеет вид

$$(E + \tau L_{11})(E + \tau L_{22}) \psi^{n+1} = (E - \tau L_{12})^2 \psi^n \quad (3.5)$$

Отсюда следует сильная устойчивость схемы:

$$\rho = \frac{(1 - \tau a_1 a_2)^2}{(1 + \tau a_1^2)(1 + \tau a_2^2)}; \quad a_i = -\frac{4 \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}}{h_i^2} \quad (3.6)$$

Условию ~~полной~~ аппроксимации схема не удовлетворяет.

~~Полная аппроксимация~~ ~~в явном виде~~ ~~контекста~~ ~~и действия~~ ~~50~~ ~~на~~

2. Схема стабилизирующей поправки

$$\frac{\psi^{n+1/2} - \psi^n}{\tau} + L_{11} \psi^{n+1/2} + 2L_{12} \psi^n + L_{22} \psi^n = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+1/2}}{\tau} + L_{22} (\psi^{n+1} - \psi^n) = 0$$

Соответствующая схема в целых шагах имеет вид:

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + (L_{11} + L_{22}) \psi^{n+1} + 2L_{12} \psi^n + \tau L_{11} L_{22} (\psi^{n+1} - \psi^n) = 0 \quad (3.8)$$

Отсюда следует ~~полная~~ аппроксимация.

Сильная устойчивость следует из представления для ρ :

$$\rho = \frac{1 - 2\tau a_1 a_2 + \tau^2 a_1^2 a_2^2}{(1 + \tau a_1^2)(1 + \tau a_2^2)} \quad (3.9)$$

3. Схема аппроксимационной поправки

$$\frac{\psi^{n+1/2} - \psi^n}{\tau} + \Lambda_{11} \psi^{n+1/2} = 0, \quad \frac{\psi^{n+1/2} - \psi^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_{22} \psi^{n+1/2} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + \Lambda \psi^{n+1/2} = 0 \quad \Lambda = \Lambda_{11} + 2\Lambda_{12} + \Lambda_{22}$$

Схема в целых шагах имеет вид:

$$(E + \tau \Lambda_{11})(E + \tau \Lambda_{22}) \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} = \Lambda \psi^{n+1/2} \quad (3.11)$$

Отсюда следует сильная аппроксимация.

Сильная устойчивость следует из выражения для ρ :

$$\rho = \frac{1 - 2\tau a_1 a_2 + \tau^2 a_1^2 a_2^2}{(1 + \tau a_1^2)(1 + \tau a_2^2)} \quad (3.12)$$

Совпадение (3.9), (3.12) указывает на совпадение схемы в целых шагах для схем поправок (стабилизирующей и аппроксимационной), но различную ее реализацию: в схеме стабилизирующей поправки мы имеем два дробных шага, но схема является трехслойной, в схеме аппроксимирующей поправки имеем три дробных шага, но схема является двухслойной. Схема аппроксимирующей поправки справедлива для уравнения теплопроводности общего типа и для аналогичных уравнений.

5. Схема расщепления для системы гармонических уравнений.

Для некоторых краевых задач упругости, как, например, задачи о поперечном изгибе нагруженной свободно подпертой пластины, вместо бигармонического уравнения удобнее пользоваться системой двух гармонических.

Для краевой задачи $\Delta \psi = \varphi$; $\Delta \psi + q = 0$

$$\psi(s) = \psi(s) = 0$$

(3.13) (15)

(3.14) (16)

рассмотрим схему расщепления

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\tau} &= \Lambda_1 (\alpha \varphi^{n+1/2} + \beta \varphi^n) \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 (\alpha \varphi^{n+1} + \beta \varphi^{n+1/2}) + q \end{aligned} \right\} \text{ а) } \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\psi^{n+1/2} - \psi^n}{\tau} &= \Lambda_1 (\alpha \psi^{n+1/2} + \beta \psi^n) \\ \frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 (\alpha \psi^{n+1} + \beta \psi^{n+1/2}) + \varphi^{n+1} \end{aligned} \right\} \text{ б) }$$

Схема (3.16) является сильно устойчивой и полно аппроксимирующей при $\alpha = \frac{1}{2}$.

Предельный переход следует брать для полусуммы целого и дробного шагов.

п. 5. Итерационные схемы для системы уравнений упругости в смещениях.

Для уравнения упругого равновесия в смещениях:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 ;$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} = 0. \quad (4.1)$$

Коноваловым А.Н. (51) была предложена и исследована схема стабилизирующей поправки

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_1^{n+1/2} - U_1^n}{\tau} &= \Lambda_{11} U_1^{n+1/2} + \Lambda_{12} U_1^n + \Omega U_2^n \\ \frac{U_2^{n+1/2} - U_2^n}{\tau} &= \Omega U_1^{n+1/2} + \Lambda_{21} U_2^{n+1/2} + \Lambda_{22} U_2^n \end{aligned} \right\} \text{ а) } \quad (4.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_1^{n+1} - U_1^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_{12} (U_1^{n+1} - U_1^n) \\ \frac{U_2^{n+1} - U_2^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_{22} (U_2^{n+1} - U_2^n) \end{aligned} \right\} \text{ б) } \quad \left(\Omega \approx (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (4.3)$$

$$\Lambda_{11} \sim (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \Lambda_{12} \sim \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}; \quad \Lambda_{21} \sim \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \Lambda_{22} \sim (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Коновалов А.Н. доказал сходимость этой схемы для первой краевой задачи в прямоугольнике.

п.5. Краевые условия в задачах упругости.

При решении краевой задачи второго рода и смешанной требуется построение рекуррентной системы счета граничных ~~полей~~ ^{условий}. Покажем это на примере следующей смешанной задачи (см. рис 5)

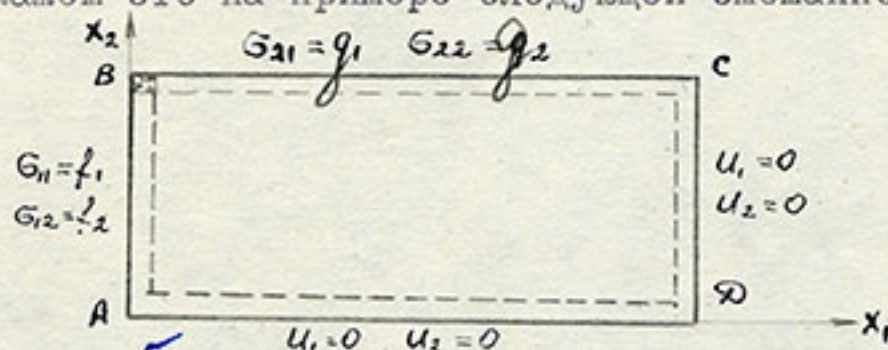


Рис. 5 Решение смешанной краевой задачи для уравнений упругости в прямоугольнике.

Выпишем краевые условия на левой вертикальной границе:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= f_2, \\ \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= f_1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

Система (5.1) есть система гиперболического типа, в которой в случае вертикальной границы роль временного переменного (переменного продвижения) играет x_2 , роль пространственного — x_1 . Величины u_1, u_2 на границе будем обозначать u_1'', u_2'' . Величины в ближайших к ним внутренних точках сетки — u_1'', u_2'' .

Простейшая — явная — аппроксимация (5.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mu \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} + \mu \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_1} &= f_2^n, \\ \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_1} &= f_1^n, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Для определения устойчивости (5.2) составим уравнения в вариациях (для простоты обозначений знак вариации отбрасываем):

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \frac{u_2^n}{h_1} &= 0, \\ \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^n}{h_1} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Отсюда

$$U_1^{n+1} = U_1^n + \frac{h_2}{h_1} U_2^n, \quad \bar{U}^{n+1} = C \bar{U}^n, \quad (5.3')$$

$$U_2^{n+1} = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \cdot \frac{h_2}{h_1} U_1^n + U_2^n$$

Оценим норму матрицы перехода C из (5.3). Для ее характеристических корней имеем выражение

$$\rho_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}} \frac{h_2}{h_1}. \quad (5.4)$$

Отсюда следует, что спектральный радиус и норма матрицы C больше 1, рекуррентный счет (5.2) неустойчив.

Применим неявную аппроксимацию:

$$\mu \frac{U_1^{n+1} - U_1^n}{h_2} + \mu \frac{U_2^{n+1} - U_2^n}{h_1} = f_2^n, \quad (5.5)$$

$$\lambda \frac{U_2^{n+1} - U_2^n}{h_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{U_1^{n+1} - U_1^n}{h_1} = f_1^n$$

Уравнения в вариациях имеют вид:

$$\mu \frac{U_1^{n+1} - U_1^n}{h_2} - \mu \frac{U_2^{n+1}}{h_1} = 0 \quad (5.6)$$

$$\lambda \frac{U_2^{n+1} - U_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{U_1^{n+1}}{h_1} = 0 \quad \text{Откуда:}$$

$$U_1^n = U_1^{n+1} - \frac{h_2}{h_1} U_2^{n+1} \quad (5.7)$$

$$U_2^n = -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \frac{h_2}{h_1} U_1^{n+1} + U_2^{n+1}$$

Для устойчивости счета необходимо, чтобы матрица (обратная матрица перехода)

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & -\frac{h_2}{h_1} \\ -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \frac{h_2}{h_1} & 1 \end{array} \right\| \quad (5.8)$$

имела характеристические корни > 1 . Так как:

$$\rho = 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}} \frac{h_2}{h_1} \quad (5.9)$$

то имеем:

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}} \frac{h_2}{h_1} \geq 2. \quad (5.10)$$

При написании аналогичной схемы по верхней горизонтальной стороне h_1 , h_2 поменяются ролями и получим

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}} \frac{h_1}{h_2} \geq 2 \quad (5.11)$$

В результате счет будет неустойчив на той или другой стороне. При условии устойчивости на вертикальной стороне для получения устойчивого рекуррентного счета на горизонтальной требуется или укрупнить сетку по x_1 , или размельчить сетку по x_2 *.

* Данный анализ устойчивости принадлежит Коновалову А.Н. Мы укажем другую схему счета границы, основанную на методе бегущего счета.

Запишем краевые условия 2-го рода в инвариантном виде в местном репере, в котором один вектор направлен по касательной к границе в направлении часовой стрелки, другой - по внешней нормали (см. рис 6)

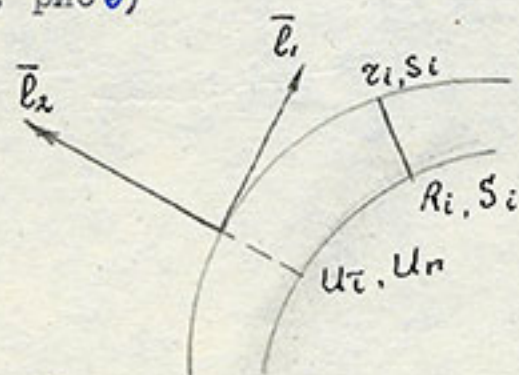


Рис. 6 Краевые условия 2-го рода в местном репере.

Тогда вектор \vec{U} смещения представится в виде:

$$\vec{U} = U_t \vec{l}_1 + U_n \vec{l}_2 \quad (5.12)$$

Направление \vec{l}_2 будем считать временным, \vec{l}_1 - пространственным, местные декартовы координаты будем обозначать через t , соответственно x .

Тогда краевые условия запишутся в виде:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_n}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U_t}{\partial x} = f_1 \quad (5.13)$$

$$\mu \left(\frac{\partial U_t}{\partial t} + \frac{\partial U_n}{\partial x} \right) = f_2$$

Приведем уравнения (5.13) к инвариантам

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} = g_1, \quad \frac{\partial s}{\partial t} - c \frac{\partial s}{\partial x} = g_2, \quad (5.14)$$

$$z = U_n + c U_t; \quad s = U_n - c U_t; \quad c = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}},$$

$$g_1 = \frac{f_1}{\lambda + 2\mu} + c \frac{f_2}{\mu}; \quad g_2 = \frac{f_1}{\lambda + 2\mu} - c \frac{f_2}{\mu} \quad (5.15)$$

После этого уравнения (5.14) решаются с помощью неявной мадорантной схемы:

$$\frac{z_i - R_i}{\tau} + c \frac{z_i - z_{i-1}}{h} = g_{1i} \quad (5.16)$$

$$\frac{s_i - s_i'}{\tau} - c \frac{s_{i+1} - s_i}{h} = g_{2i} ,$$

которая устойчива при любых τ, h .

В случае прямоугольной области (см. рис. 4 +) на стороне АВ имеем:

$$U_1 = -U_n , \quad U_2 = U_\tau , \quad t = -X_1 , \quad X = X_2 , \quad \tau = h_1 , \quad h = h_2 \quad (5.17)$$

$$\tau = -U_1 + c U_2 ; \quad S = -U_1 - c U_2 ;$$

на стороне ВС имеем

$$U_1 = U_\tau , \quad U_2 = U_n , \quad t = X_2 , \quad X = X_1 , \quad \tau = h_2 , \quad h = h_1 \quad (5.18)$$

$$\tau = U_2 + c U_1 ; \quad S = U_2 - c U_1$$

Переход от инвариантов (5.17) к инвариантам (5.18) производится на некоторой дуге, скругляющей угол АВС.

В заключение нашего анализа краевых задач упругости заметим, что исследованы полностью только немногие задачи и немногие методы.

§ 6. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

В случае дифференциальных уравнений с неизвестной векторной функцией разностные операторы, применяемые к векторным функциям, становятся некоммутативными даже при постоянстве коэффициентов уравнения. То же справедливо и для уравнений с неизвестной скалярной функцией и переменными коэффициентами. Это обстоятельство сильно затрудняет анализ как устойчивости, так и аппроксимации разностной схемы.

В анализе устойчивости мы будем опираться на так называемый локальный критерий устойчивости, в анализе аппроксимации на правила коммутации некоммутативных операторов. Мы проведем рассмотрение на простейшем примере уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами, хотя метод исследования является значительно более общим и распространенным на произвольные системы.

п. I. Локальный критерий устойчивости для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

Для уравнения (I.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\chi(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right]; \quad \chi(x, t) > \chi > 0$$

в области $D = \mathcal{L} \times T$, (I.2)

$$\mathcal{L} = \{0 \leq x \leq 1\} \quad T = \{0 \leq t \leq t_0\}$$

поставим специальную задачу Коши

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (I.3)$$

$$u(0, t) = f_1(t) \quad ; \quad u(1, t) = f_2(t).$$

От функций $\chi(x, t)$, $u_0(x)$, $f_1(t)$, $f_2(t)$

будем требовать соответствующую гладкость:

$$\chi(x, t) \in C, \quad u_0(x) \in C_2; \quad f_1(t), f_2(t) \in C, \quad (I.4)$$

Для решения задачи (I.1 - I.3) построим следующую разностную схему:

$$A_2(B^{n+1})U^{n+1} = A_1(B^n)U^n \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (I.4)$$

$$U_i^0 = U_{0i} = U_0(ih) \quad , \quad (I.5)$$

$$U_0^n = f_1^n = f_1(n\tau) \quad , \quad (I.6)$$

$$U_{N+1}^n = f_2^n = f_2(n\tau) \quad ,$$

где положено:

$$U^n = \{U_i^n\} = \{U(ih, n\tau)\} \quad , \quad (I.7)$$

$$\tau^n = \{\tau_i^n\} \quad ; \quad \tau_i^n = \frac{\chi_{i+1/2}^n \cdot \tau}{h^2} \quad ,$$

$$i = 0, 1, \dots, N+1 \quad , \quad (N+1)h = 1$$

$$A_2(B^{n+1}) = E + \alpha B^{n+1}$$

$$A_1(B^n) = E - (\alpha - \alpha)B^n$$

$$B^n = \{B_i^{nj}\} \quad ; \quad B_i^{nj} = -\tau_{i-1}^n \delta_{i-1}^j + (\tau_{i-1}^n + \tau_i^n) \delta_i^j - \tau_{i+1}^n \delta_{i+1}^j$$

δ_i^j - символ Кронекера

По теореме эквивалентности для сходимости разностной схемы (I.4) - (I.6) необходимо и достаточно, чтобы оператор шага уравнения (I.4)

$$C_n = A_2^{-1}(B^{n+1}) A_1(B^n) \quad (I.8)$$

имел норму, удовлетворяющую условию

$$\|C_n\| = 1 + d_n \tau \quad , \quad |d_n| \leq K \quad (I.9)$$

где константа K не зависит от n, τ, h .

Мы покажем, что в нашем случае это имеет место при выполнении определенных условий на α , τ , h .

Предварительно сформулируем ряд лемм.

Л е м м а I. Пусть A, B — две симметричных матрицы, $C(\varepsilon)$ — матрица пучка:

$$C(\varepsilon) = A + \varepsilon B \quad (I.I0)$$

$x_i(\varepsilon)$ — $i^{\text{й}}$ нормированный собственный вектор,

$\lambda_i(\varepsilon)$ — соответствующее собственное значение.

Тогда $x_i(\varepsilon)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\frac{d\lambda_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} = (B, x_i, x_i) \quad (I.II)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Дифференцируя по ε равенство

$$(A + \varepsilon B)x(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)x(\varepsilon) \quad (I.I2)$$

получим

$$Bx + (A + \varepsilon B)x' = \lambda'x + \lambda x' \quad (I.I3)$$

Умножая (I.I3) скалярно на x и учитывая, что

$$(xx)^2 = 1, \quad (xx') = 0 \quad (I.I4)$$

получаем равенство (I.II), справедливое для любого собственного вектора.

С л е д с т в и е . Если форма (Bx, x) неотрицательна, то $\lambda(\varepsilon)$ — неубывающая функция ε .

Л е м м а 2. Если A, B две неотрицательных симметричных матрицы, то любая матрица $C(\varepsilon)$ пучка (I.I0) неотрицательна.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

В силу леммы I $\lambda(\varepsilon)$ не убывает.

В силу положительности A , $\lambda(0) \geq 0$. Отсюда

$$\lambda(\varepsilon) \geq 0 \quad \text{ч.т.д.}$$

С л е д с т в и е I. Если B_1, \dots, B_n — неотрицательные симметричные матрицы, то и сумма их также неотрицательная симметричная матрица.

С л е д с т в и е 2. Матрица B^n из равенства (I.7) неотрицательна.

Действительно, пусть B_i — матрица $B^n(z)$, в которой $z_j = 0$ $i \neq j$. Матрица B_i неотрицательна. Но

$$B^n = B_1 + B_2 + \dots + B_n.$$

отсюда $B^n \geq 0$ ч.т.д.

С л е д с т в и е 3. Характеристические корни $A_2(\alpha z)$ не меньше 1.

Рассмотрим матрицу \tilde{C}_n :

$$\tilde{C}_n = A_2^{-1}(B^n) A_1(B^n) \quad (I.15)$$

Так как матрицы A_1, A_2 коммутативны, то для характеристического корня ρ матрицы \tilde{C}_n справедливо представление:

$$\rho = \frac{1 - (1 - \alpha)\lambda}{1 + \alpha\lambda}, \quad (I.16)$$

где $\lambda > 0$ соответствующий характеристический корень B^n .

С л е д с т в и е 4. Если $\alpha \geq \frac{1}{2}$, то

$$\|\tilde{C}_n\| = \max |\rho| \leq 1 \quad (I.17)$$

Наряду с матрицами B^n рассмотрим матрицы b, B , соответствующие постоянным значениям z_i^n , а именно

$$z_i^n = z = \min \{ z_i^n \} \quad (I.18)$$

$$z_i^n = R = \max \{ z_i^n \}$$

и соответственно образованные матрицы

$$A_1(b), A_2(b) \quad c = c(b)$$

$$A_1(B), A_2(B) \quad c = c(B)$$

Л е м м а 3. Справедливо соотношение

$$\lambda_b \leq \lambda \leq \lambda_B \quad (I.19)$$

где $\lambda, \lambda_b, \lambda_B$ — соответствующие характеристические числа матриц $b = B(z)$; $B^n = B(z^n)$; $B = B(R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Образуем пучок

$$C(\varepsilon) = b + \varepsilon(B^n - b) \quad (I.20)$$

Так как $B^n - b \geq 0$, то по лемме I собственное число λ_ε матрицы $C(\varepsilon)$ пучка (I.20) не убывает.

Т.к. $C(0) = b$, $C(1) = B^n$, то отсюда имеем

$$\lambda_b \leq \lambda, \quad \text{ч.т.д.}$$

Аналогично доказывается неравенство $\lambda \leq \lambda_v$

Лемма 4. Справедливо соотношение

$$\rho_c \geq \rho_{\tilde{c}_n} \geq \rho_c \quad (I.21)$$

Рассмотрим $\rho = \rho(\lambda)$ из (I.16)

Нетрудно показать, что ρ есть монотонно убывающая функция λ . Действительно,

$$\rho = \frac{1-\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} = 1 - \frac{\lambda}{1+\alpha\lambda} = 1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha\lambda}},$$

$$\rho'(\lambda) = \frac{-(1-\alpha)(1+\alpha\lambda) - \alpha[1-(1-\alpha)\lambda]}{(1+\alpha\lambda)^2} = -\frac{1}{(1+\alpha\lambda)^2} < 0 \quad (I.22)$$

Отсюда в силу неравенства (I.19) следует (I.21)

Лемма 5. Если $\|C\| \leq 1+d\tau$, то и

$$\|\tilde{c}_n\| \leq 1+d\tau \quad \text{Если } \|C\| > 1, \quad \text{то и } \|\tilde{c}_n\| > 1$$

Доказательство.

Если $\|C\| \leq 1+d\tau$, то это значит, что

$$\rho_c \geq -(1+d\tau) \quad (I.23)$$

В силу (I.21) $\rho_{\tilde{c}_n} \geq \rho_c \geq -(1+d\tau)$, откуда

$$\|\tilde{c}_n\| \leq 1+d\tau, \quad \text{ч.т.д.} \quad (I.24)$$

Если $\|C\| \geq 1+\varepsilon$, то $\rho_c < -(1+\varepsilon)$

В силу (I.21) $\rho_{\tilde{c}_n} \leq \rho_c < -(1+\varepsilon)$ откуда

$$\|\tilde{c}_n\| \geq 1+\varepsilon, \quad \text{ч.т.д.} \quad (I.25)$$

Лемма 6.

Если $\|\tilde{c}_n\| \leq 1+d_n\tau$; $|d_n| \leq \kappa$

то $\|C_n\| \leq 1+l_n\tau$ $|l_n| \leq \kappa$

Доказательство $C_n = A_2^{-1}(B^{n+1})A_1(B^n) = A_2^{-1}(B^{n+1}) \times A_2(B^{n+1})A_2^{-1}(B^{n+1})A_1(B^n) = A_2^{-1}(B^{n+1})A_2(B^n)\tilde{c}_n$

Оценим норму оператора $A_2^{-1}(B^{n+1})A_2(B^n)$.
 $A_2(B^n) = E + \alpha B^n = E + \alpha B^{n+1} + \alpha(B^n - B^{n+1}) =$
 $= E + \alpha B^{n+1} + \tau \alpha D^n = A_2(B^{n+1}) + \tau \alpha D^n.$

По теореме Гершгина

$$\|\mathcal{D}^n\| \leq M$$

где M не зависит от $n, \tau, h,$

Отсюда $A_2^{-1}(B^{n+1}) A_2(B^n) = E + \alpha \tau A_2^{-1}(B^{n+1}) \mathcal{D}^n$

$$\begin{aligned} \|A_2^{-1}(B^{n+1}) A_2(B^n)\| &\leq 1 + \alpha \tau \|A_2^{-1}(B^{n+1}) \mathcal{D}^n\| \leq \\ &\leq 1 + \alpha M \tau. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|C_n\| &\leq \|A_2^{-1}(B^{n+1}) A_2(B^n)\| \|\tilde{C}_n\| \leq \\ &\leq (1 + \alpha_n \tau) (1 + \alpha M \tau) \leq (1 + \ell_n \tau) \end{aligned}$$

Из лемм 5,6 следует

Теорема: Если разностная схема с постоянными коэффициентами, получающаяся из (I.4) заменой z_i^n на $\max\{z_i^n\}$, устойчива, то устойчива и схема (I.4); разностная схема с постоянными коэффициентами, получающаяся из (I.4) заменой z_i^n на $\min\{z_i^n\}$, неустойчива, то неустойчива, то неустойчива и схема (I.4)

Сформулированная теорема является локальным критерием устойчивости, так-как её можно сформулировать следующим образом: если каждая локальная⁺⁾ разностная схема (I.4) устойчива, то устойчива и схема (I.4); если каждая локальная схема (I.4) неустойчива, то неустойчива и схема (I.4).

п. 2. Сходимость метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

Рассмотрим смешанную задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\chi(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\chi(x_1, x_2, t) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right], \quad \chi \geq \chi_0 > 0 \quad (2.1)$$

⁺⁾ Локальной схемой (I.4) мы будем называть схему с постоянными коэффициентами \tilde{z} равным $z_i^n = z(ih, n\tau)$ в данной точке $x = ih, \quad t = n\tau.$

$$U(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, \quad (2.2)$$

$$U(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t); \quad (x_1, x_2, t) \in \{Y \times T\} \quad (2.3)$$

где \mathcal{D} - прямоугольная область плоскости $x_1, x_2: \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$
 Y ее граница, T - сегмент $0 \leq t \leq t_0$, $\chi(x_1, x_2, t)$.

- достаточно гладкая функция своих аргументов

В области $\vec{\mathcal{D}}$ построим сетку $\vec{\mathcal{D}}_h$:

$$x_{1i} = ih, \quad x_{2j} = jh, \quad 0 \leq i \leq N+1, \quad 0 \leq j \leq N+1, \quad (N+1)h = 1;$$

в которой будем определять сеточные функции

$$U_{ij} = U(ih, jh)$$

Рассмотрим схему расщепления (см.

$$\frac{U^{n+\frac{1}{2}} - U^n}{\tau} = \Lambda_1 [\alpha U^{n+\frac{1}{2}} + (1-\alpha) U^n] \quad (2.4)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 [\alpha U^{n+1} + (1-\alpha) U^{n+\frac{1}{2}}] \quad \text{где:} \quad (2.5)$$

$$\Lambda_s = \frac{\Delta_s}{h} \otimes \frac{\Delta_{-s}}{h}; \quad \Delta_s = T_s - E, \quad \Delta_{-s} = E - T_s^{-1}$$

$$T_1 U(x_1, x_2, t) = U(x_1 + h, x_2, t); \quad T_2 U(x_1, x_2, t) = U(x_1, x_2 + h, t)$$

$$U^{n+\frac{s}{2}}(x_1, x_2) = U[x_1, x_2, (n + \frac{s}{2})\tau], \quad s = 0, 1, 2.$$

Уравнения (2.4) перепишем в виде

$$A_s U^{n+\frac{s}{2}} - B_s U^{n+\frac{(s-1)}{2}} = 0 \quad s = 1, 2 \quad (2.6)$$

$$A_s = E - \alpha \tau \Lambda_s, \quad B_s = E + (1-\alpha) \tau \Lambda_s$$

Для разностного решения $U^{n+\frac{s}{2}}$ уравнений (4) или (2.6) поставим следующие начальные и краевые условия:

$$U^0(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad U^{n+\frac{s}{2}}(x_1, x_2) = f[x_1, x_2, (n + \frac{s}{2})\tau], \quad (x_1, x_2) \in Y \quad (2.7)$$

Если через $U^{n+\frac{s}{2}} = U[x_1, x_2, (n + \frac{s}{2})\tau]$.

обозначить точное решение дифференциальной задачи, через

$$v^{n+\frac{s}{2}} = u^{n+\frac{s}{2}} - u^{n+\frac{s}{2}}$$

функцию отклонения разностного решения от точного, то для

$$v^{n+\frac{s}{2}} \quad \text{получаем неоднородную систему}$$

$$A_s v^{n+\frac{s}{2}} - B_s v^{n+\frac{s-1}{2}} = F_s^{n+\frac{s}{2}} + R_s^n, \quad (2,8)$$

$$v^0 = 0, \quad v^{n+\frac{s}{2}}(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma \quad (2,9)$$

Здесь $F_1^{n+\frac{s}{2}} = \tau \psi^{n+\frac{s}{2}}, \quad F_2^{n+\frac{s}{2}} = -\tau \psi^{n+\frac{s}{2}},$

$$\psi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\chi \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\chi \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad (2.10)$$

R_s^n - остаточные члены, имеющие порядок $O(\tau^{1+s})$, $\epsilon > 0$ - степень аппроксимации.

Будем предполагать τ, h^2 связанными законом предельного перехода:

$$\tau/h^2 = \gamma,$$

где γ - произвольная положительная константа.

Операторы A_1, A_2 обратимы (см. лемму 2), поэтому уравнения (2,8) можно переписать в виде:

$$v^{n+\frac{s}{2}} = C_s v^n + A_1^{-1} [F_1^{n+\frac{s}{2}} + R_1^n]; \quad v^{n+1} = C_2 v^{n+\frac{1}{2}} + A_2^{-1} [F_2^{n+\frac{1}{2}} + R_2^n],$$

$$C_s = A_s^{-1} B_s$$

Исключая из (2.11)

$$v^{n+1} = C v^n + \Phi^n, \quad C = C_2 C_1, \quad \Phi^n = F^n + R^n; \quad R^n = C_2 A_1^{-1}; \quad R_1^n + A_2^{-1} R_2^n$$

$$F^n = C_2 A_1^{-1} F_1^{n+\frac{1}{2}} + A_2^{-1} F_2^{n+\frac{1}{2}} = (C_2 A_1^{-1} - A_2^{-1}) F_1^{n+\frac{1}{2}} =$$

$$= \tau (C_2 A_1^{-1} - A_2^{-1}) \psi^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Мы дадим теперь анализ корректности и аппроксимации схемы (2.12) в L_2 . Сеточное двумерное пространство \mathcal{D}_h можно рассматривать как совокупность (теоретико-множественную сумму) одномерных сеточных пространств, соответствующих фиксированной

χ_1 - или χ_2 - линии сетки.

Будем обозначать: через \mathcal{L}_j - одномерное пространство точек $j = \bar{1}$ χ_1 - линии:

$x_1 = ih$, $i = 0, 1, \dots, N+1$, $x_2 = jh$, j - фиксировано;

через M_i - пространство точек

$x_1 = ih$, i - фиксировано, $x_2 = jh$, $j = 0, 1, \dots, N+1$.

Аналогично, $(N+2)^2$ -мерные векторы v^n , определенные в \mathcal{D}_h , следует рассматривать как совокупность векторов в \mathcal{L}_j или M_i :

$$v^n = \{y_j^n\}, \quad y_j = \{v_{0j}^n, v_{1j}^n, \dots, v_{N+1j}^n\}$$

$$v^n = \{z_i^n\}, \quad z_i = \{v_{i0}^n, v_{i1}^n, \dots, v_{iN+1}^n\}$$

Соответственно этому операторы A_s, B_s, C_s , определенные в \mathcal{D}_h , можно рассматривать как совокупность операторов, действующих в пространствах \mathcal{L}_j, M_i .

Будем обозначать через A_{1j}, B_{1j}, C_{1j} операторы, действующие в \mathcal{L}_j , через A_{2i}, B_{2i}, C_{2i} - операторы, действующие в M_i . Тогда можно положить, например, для операторов C_s

$$C_1 v^n = \{C_{1j} y_j^n\}, \quad C_2 v^n = \{C_{2i} z_i^n\}$$

Отсюда следует

$$\|C_1\| \leq \max_j \|C_{1j}\|, \quad \|C_2\| \leq \max_i \|C_{2i}\|$$

Применяя оценки норм операторов с переменными коэффициентами (см. (2.II), (2.II), (2.I2)), получаем условие корректности эквивалентных схем (2.II), (2.II), (2.I2) в \mathcal{L}_2 :

$$\frac{\lambda_{\max} \cdot \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)}; \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \text{ или } \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \quad (2.I3)$$

Действительно, при этом условии

$$\|C_{sj}\| = 1 + O(\tau), \quad \|C_s\| = 1 + O(\tau), \quad s = 1, 2.$$

В дальнейшем условие (2.13) мы будем предполагать выполненным.

На основании теоремы эквивалентности для сходимости схемы (2.12) достаточно установить аппроксимацию.

Оценим величину F^n по норме L_2 :

$$F^n = (C_2 A_1^{-1} - A_2^{-1}) F_1^{n+1/2} = A_2^{-1} (B_2 A_1^{-1} - E) F_1^{n+1/2}$$

Так как $\|A_2^{-1}\| \leq 1$ (см. лемму 2), то достаточно оценить величину

$$\begin{aligned} g^n &= (B_2 A_1^{-1} - E) F_1^{n+1/2} = (B_2 - A_1) A_1^{-1} F_1^{n+1/2} = \\ &= [(B_2 - E) - (A_1 - E)] A_1^{-1} F_1^{n+1/2} = h^n + \kappa^n \end{aligned}$$

$$h^n = (1 - \alpha) \tau A_2 A_1^{-1} F_1^{n+1/2}, \quad \kappa^n = (E - A_1) A_1^{-1} F_1^{n+1/2} \quad (2.14)$$

Сформулируем ряд лемм.

Пусть $v = \{v_{ij}\}$ — сеточная функция, определенная в $\overline{\Omega}_n$, A — оператор, определяемый равенствами

$$A v_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} a_{ij}^{\alpha} v_{\alpha j} \quad (2.15)$$

Обозначим через $\delta_2 A$, $\delta_{-2} A$ операторы

$$\delta_2 A : \delta_2 A v_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} \Delta_2 a_{ij}^{\alpha} v_{\alpha j} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} (a_{ij+1}^{\alpha} - a_{ij}^{\alpha}) v_{\alpha j} ;$$

$$\delta_{-2} A : \delta_{-2} A v_{ij} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} \Delta_{-2} a_{ij}^{\alpha} v_{\alpha j} = \sum_{\alpha=0}^{N+1} (a_{ij}^{\alpha} - a_{ij-1}^{\alpha}) v_{\alpha j} ;$$

Очевидна справедливость равенств

$$\Delta_2 A \cdot v = (A + \delta_2 A) \Delta_2 v + \delta_2 A v ,$$

$$\Delta_{-2} A \cdot v = (A + \delta_{-2} A) \Delta_{-2} v + \delta_{-2} A v ,$$

$$\Delta_{-2} \Delta_2 A v = (A + \delta_2 A + \delta_{-2} A + \delta_{-2} \delta_2 A) \Delta_{-2} \Delta_2 v +$$

$$+ (\delta_{-2} A + \delta_{-2} \delta_2 A) \Delta_2 v + (\delta_2 A + \delta_{-2} \delta_2 A) \Delta_{-2} v + \delta_{-2} \delta_2 A \cdot v .$$

Л е м м а 2.1. Если $\delta_2 A = hB$, $\delta_{-2} A = hC$, $\delta_{-2} \delta_2 A = h^2 D$, где A, B, C, D - некоторые операторы, и $\|A\| \leq M_1$, $\|A^{-1}\| \leq M_1$,

$\|B\| \leq M_1$, $\|C\| \leq M_1$, $\|D\| \leq M$, где M не зависит от h ,

то $\delta_2 A^{-1} = hE$, $\delta_{-2} A^{-1} = hF$, $\delta_{-2} \delta_2 A^{-1} = h^2 G$ и $\|E\| \leq M_2$,

$\|F\| \leq M_2$, $\|G\| \leq M_2$, M_2 не зависит от h

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя к тождеству $AA^{-1} = I$ (единичная матрица) операцию δ_2 имеем

$$(A + \delta_2 A) \delta_2 A^{-1} + \delta_2 A A^{-1} = 0,$$

отсюда $\delta_2 A^{-1} = -(A + hB)^{-1} \cdot \delta_2 A A^{-1} = hE$,

$$\|E\| = \|(A + hB)^{-1} \cdot B A^{-1}\| \leq \|(A + hB)^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot \|A^{-1}\| \leq M_2.$$

Аналогично доказываются остальные оценки леммы.

Лемма 2.2.

$$\|A_2\| = \max\{1 + 2\lambda_{ij}, 1 + 2\lambda_{Nj}, 1 + \lambda_{ij} + \lambda_{i+1,j}\}, \quad (2.16)$$

$$\|A_i^{-1}\| \leq 1, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (2.17)$$

где:

$$\lambda_{ij} = \frac{\alpha \tau}{h^2} \chi_{i-\frac{1}{2}, j} = \frac{\alpha \tau}{h^2} \left[\chi\left((i-\frac{1}{2})h; jh; (n+\frac{s}{2})\tau\right) \right]$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор A_I определяется равенством

$$A_i v_{ij} = -\lambda_{i-1,j} v_{i-1,j} + [1 + \lambda_{i-1,j} + \lambda_{ij}] v_{ij} = \lambda_{ij} v_{i+1,j}.$$

Применяя оценки характеристических корней по Гершгорину и учитывая самосопряженность, получаем оценки (2.16), (2.17)

Лемма 2.3. Если $\chi(x_1, x_2, t)$ - дважды дифференцируемая функция переменных x_1, x_2 , то

$$\delta_2 A_1 = hB, \quad \delta_{-2} A_1 = hC, \quad \delta_{-2} \delta_2 A_1 = h^2 D,$$

где операторы B, C, \mathcal{D}
зависящей от h

ограничены по норме константной, не

Учитывая гладкость \mathcal{X} , самосопряженность операторов B, C, \mathcal{D} и применяя оценки по Гершгорину, получаем утверждение.

Оценим теперь по норме величину g^n из (2.14).

Слагаемое k^n без труда оценивается:

отсюда $k^n = A_1^{-1} (E - A_1) F_1^{n+1/2} = \alpha \tau A_1^{-1} \Lambda_1 F_1^{n+1/2}$

$$\|k^n\| \leq \alpha \tau \|A_1^{-1}\| \|\Lambda_1 F_1^{n+1/2}\| \leq \alpha \tau \|\Lambda_1 F_1^{n+1/2}\| \quad (2.18)$$

Оценим теперь

$$h^n = (1 - \alpha) \tau \Lambda_2 A_1^{-1} F_1^{n+1/2}$$

Справедливо соотношение $\Lambda_2 A_1^{-1} F_{ij} = \Delta_{-2} (\mu_{ij} \Delta_2 A_1^{-1}) F_{ij} =$
 $= \mu_{ij} \Delta_{-2} \Delta_2 A_1^{-1} F_{ij} + (\Delta_{-2} \mu_{ij}) \Delta_2 A_1^{-1} F_{ij},$

$$\mu_{ij} = \frac{1}{h^2} \chi_{ij-\frac{1}{2}} = \frac{\chi[ih, (j-\frac{1}{2})h, (n+\frac{\varepsilon}{2})\tau]}{h^2} \quad (2.19)$$

Применяя равенства (2.15) получим

$$\begin{aligned} \Lambda_2 A_1^{-1} F_{ij} = & \mu_{ij} [(\Lambda_1^{-1} + \delta_2 \Lambda_1^{-1} + \delta_{-2} \Lambda_1^{-1} + \delta_{-2} \delta_2 \Lambda_1^{-1}) \Delta_{-2} \Delta_2 F_{ij} + \\ & + (\delta_{-2} \Lambda_1^{-1} + \delta_{-2} \delta_2 \Lambda_1^{-1}) \Delta_2 F_{ij} + (\delta_2 \Lambda_1^{-1} + \delta_{-2} \delta_2 \Lambda_1^{-1}) \Delta_{-2} F_{ij} + \\ & + \delta_{-2} \delta_2 \Lambda_1^{-1} F_{ij}] + (\Delta_{-2} \mu_{ij}) [(\Lambda_1^{-1} + \delta_2 \Lambda_1^{-1}) \Delta_2 F_{ij} + \Delta_2 \Lambda_1^{-1} F_{ij}] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Исходя из оценок лемм 2.1, 2.2, 2.3 получим

$$\Lambda_2 A_1^{-1} F_{ij} = \mathcal{P}_1 \frac{\Delta_{-2} \Delta_2}{h^2} F_{ij} + \mathcal{P}_2 \frac{\Delta_2}{h} F_{ij} + \mathcal{P}_3 \frac{\Delta_{-2}}{h} F_{ij} + \mathcal{P}_4 F_{ij} \quad (2.21)$$

где Φ_s - операторы с нормой, ограниченной константой, не зависящей от h

На основании оценок (2.18), (2.21) и предполагая четырежды дифференцируемым решение $U(x_1, x_2, t)$ задачи (I) - (3) и тем самым дважды дифференцируемой функцию $\Psi(x_1, x_2, t)$, получаем оценку

$$F^n = O(\tau^2), \quad \Phi^n = O(\tau^{1+\epsilon})$$

На основании теоремы эквивалентности имеем из (2.12)

$$v^n = O(\tau^\epsilon)$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а: Пусть

а) $\frac{\chi_{\max} \cdot \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)} \quad 0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ (условие корректности)

или $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

б) решение $U(x_1, x_2, t)$ задачи (2.1) - (2.3) четырежды непрерывно дифференцируемо, $\chi(x_1, x_2, t)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция (условие аппроксимации)

Тогда решение U^n схемы (4) сходится в L_2 к решению $U(x_1, x_2, t)$ задачи (2.1) - (2.3)

В заключение сделаем несколько замечаний.

На основании теоремы вложения С.Л.Соболева или теоремы эквивалентности Стрэнга (), предполагая большую гладкость

$$U(x_1, x_2, t) \text{ и } \chi(x_1, x_2, t)$$

можно доказать равномерную сходимость $U^n \rightarrow U$

Нетрудно видеть, что оценка норм разностных операторов A_s, B_s, C_s не зависит от формы области. Несколькими деталями исследуя аппроксимацию, можно доказать сходимость метода расщепления и для произвольной области.

Ясно, что метод доказательства остается в силе и для многомерного уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial x_s} \left[\chi \frac{\partial U}{\partial x_s} \right].$$

п. 3 Слабая аппроксимация систем дифференциальных уравнений.

н. 1.

Примеры

До сих пор мы рассматривали метод дробных шагов как метод построения экономичных разностных схем. Мы покажем, что метод дробных шагов можно рассматривать независимо от разностной аппроксимации в применении к дифференциальным уравнениям.

В этом смысле его можно толковать как метод слабой аппроксимации специального вида.

Начнем с рассмотрения простейших примеров.

I. Для задачи Коши

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(t) \quad x(0) = 0 \quad (3.1)$$

применим разностную схему дробных шагов

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+\frac{1}{2}} - x^n}{\tau} &= 1 & \text{а)} \\ \frac{x^{n+1} - x^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= 0 & \text{б)} \\ x^0 &= 0 & \text{в)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Соответствующая (3.2) схема в целых шагах есть

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = 0, \quad x^0 = 0 \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что (3.2) дает точное решение задачи (3.1)

В то же время схему (3.2) мы можем толковать следующим образом:

На первом полушаге (3.2) мы решаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = 1, \quad (3.4\text{а})$$

На втором полушаге (3.2б) мы решаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = 0, \quad (3.4\text{б})$$

В целом мы решаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(\tau, t), \quad x^0 = 0 \quad (3.5)$$

где функция $f(\tau, t)$ определяется так:

$$\begin{aligned} f(\tau, t) &= 2, & n\tau \leq t < (n+\frac{1}{2})\tau \\ f(\tau, t) &= 0, & (n+\frac{1}{2})\tau \leq t < (n+1)\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

На рис. показаны сравнительные графики функций $f = f(\tau, t)$ и решений (3.1) и (3.5) $f = f(t)$

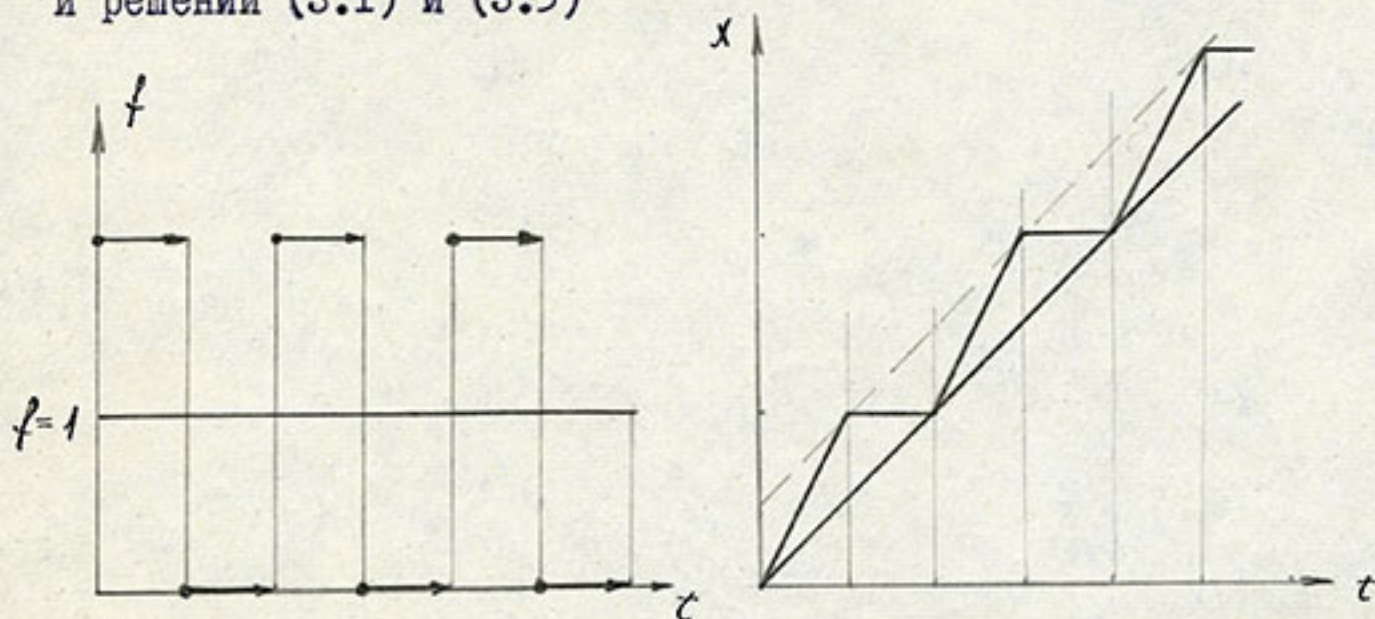


Рис. 6 Сравнение функций $f(\tau, t)$, $f(t)$ и соответствующих интегральных кривых.

Нетрудно видеть, что функция $f(\tau, t)$ сходится к $f(t)$ слабо, т.е. в обобщенном смысле:

$$\int_{t_1}^{t_2} [f(\tau, s) - f(s)] ds \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

в то время, как соответствующее решение (3.5) сходится к решению (3.1) сильно.

2. Для задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0 \quad x(0) = 1 \quad a > 0 \quad (3.7)$$

применим разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau} + ax^n &= 0 & \text{а)} \\ \frac{x^{n+1} - x^{n+1/2}}{\tau} &= 0 & \text{б)} \\ x^0 &= 1 & \text{в)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вновь схему (3.8) можно толковать как решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + a(\tau, t)x = 0; \quad x(0) = 1 \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{где } a(\tau, t) &= 2a, & n\tau \leq t < (n + \frac{1}{2})\tau, \\ a(\tau, t) &= 0, & (n + \frac{1}{2})\tau \leq t < (n + 1)\tau, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$a(\tau, t)$ слабо аппроксимирует a , решение (3.9) сходится к решению (3.7) сильно.

3. Рассмотрим уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0; \quad u(x_1, x_2, \nu) = u_\nu(x_1, x_2) \quad (3.11)$$

Его решение имеет вид

$$u(x_1, x_2, t) = u_0(x_1 - t, x_2 - t) = T_{-1}(t) T_{-2}(t) u_0(x_1, x_2) \quad (3.12)$$

где операторы сдвига $T_{-1}(t)$, $T_{-2}(t)$ имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} T_{-1}(t) f(x_1, x_2) &= f(x_1 - t, x_2) \\ T_{-2}(t) f(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2 - t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, оператор решения $S(t)$ уравнения (3.11)

$$\text{имеет вид: } S(t) = T_{-1}(t) \cdot T_{-2}(t)$$

Заменяем уравнение (3.II) уравнением с "осциллирующими" коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f_1(\tau, t) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(\tau, t) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad (3.I5)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2).$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\tau, t) &= 2, & f_2(\tau, t) &= 0 & n\tau \leq t < (n+\frac{1}{2})\tau \\ f_1(\tau, t) &= 0, & f_2(\tau, t) &= 2 & (n+\frac{1}{2})\tau \leq t < (n+1)\tau \end{aligned} \quad (3.I6)$$

решение уравнения (3.I5) в интервале от $n\tau$ до $(n+1)\tau$ равно сильно последовательному решению уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \quad n\tau \leq t < (n+\frac{1}{2})\tau \quad (3.I7)$$

соответственно

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{в интервале } (n+\frac{1}{2})\tau \leq t < (n+1)\tau \quad (3.I7б)$$

Оператор перехода уравнения (3.I7а) равен

$$S_1(t, t + \frac{\tau}{2}) = S_1(\frac{\tau}{2}) = T_{-1}(\tau) \quad (3.I8а)$$

Оператор перехода уравнения (3.I7б) равен

$$S_2(t, t + \frac{\tau}{2}) = S_2(\frac{\tau}{2}) = T_{-2}(\tau) \quad (3.I8б)$$

Таким образом, для оператора перехода $S_\tau(t, t+\tau) = S(\tau)$ уравнения (3.I5) имеем выражение

$$S_\tau(\tau) = S_1(\frac{\tau}{2}) \cdot S_2(\frac{\tau}{2}) = T_{-1}(\tau) T_{-2}(\tau) = S(\tau),$$

где $S(\tau)$ - оператор перехода уравнения (3.II).

Уравнение (3.I5) аппроксимирует (3.II) слабо, а оператор решения (3.I5) аппроксимирует оператор решения (3.II) сильно.

4. Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (3.I9)$$

Ввиду непер-
еносимости
ушищивших
обстановки

попытки свести
до минимума
оперативные
задачи

←

построим следующее уравнение с осциллирующими коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1(\tau, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2(\tau, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad (3.20)$$

$$a_1(\tau, t) = 2, \quad a_2(\tau, t) = 0, \quad n\tau \leq t < (n + \frac{1}{2})\tau$$

$$a_1(\tau, t) = 0, \quad a_2(\tau, t) = 2 \quad (n + \frac{1}{2})\tau \leq t < (n+1)\tau \quad (3.21)$$

Тогда снова без труда устанавливается соотношение

$$S(\tau) = S_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot S_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = S_\tau(\tau), \quad (3.22)$$

где $S(\tau)$ оператор перехода уравнения (3.19) $S_i(\tau)$
- операторы перехода уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad (3.23)$$

$S_\tau(\tau)$ оператор перехода уравнения (3.20)

Теперь мы можем установить общую теорему с слабой аппроксимацией

п. 4 Слабая аппроксимация систем дифференциальных уравнений Теорема сходимости.

Рассмотрим задачу Коши в полупространстве $|x| < \infty, t > 0$
для линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}(x, t, \mathcal{D})u + f(x, t) \quad (I)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

где $u(x, t), f(x, t)$ - векторные функции векторного аргумента
 $\mathcal{L}(x, t, \mathcal{D})$ - линейный дифференциальный оператор, коэффициенты которого зависят от x, t .

Пусть решение $u(x, t)$ решение однородной задачи (I),
(2), отвечающее некоторой функции $u_0(x)$. Тогда

$$u(x, t_2) = S(t_1, t_2) u(x, t_1) \quad (3)$$

Оператор $S(t, t_2)$ из (3) будем называть оператором перехода и считать заданным в некотором банаховом пространстве B , которому принадлежат $u_0(x), u(x, t), f(x, t)$ при t фиксированном. Задачу (I.2) будем называть равномерно корректной в пространстве B , если

$$\|S(t, t+\tau)\| = 1 + C(t, \tau) \tau; \quad (4)$$

где $|C(t, \tau)| \leq M(t)$ для всех $t, \tau, t+\tau \leq T$

Мы будем предполагать, что система (I) обладает следующим свойством (свойство C): решение $u(x, t)$ задачи (I.2) принадлежит C_q , если $u_0(x), f(x, t)$ принадлежат C_p и q достаточно велико при p достаточно большом.

О п р е д е л е н и е: Семейство вектор функций $F_\tau(x, t)$ слабо аппроксимирует по t функцию $F(x, t)$, если

$$\int_{t_1}^{t_2} [F_\tau(x, s) - F(x, s)] ds = \delta(x, t, \tau) \quad (5)$$

и $t_1, |\delta(x, t, \tau)| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ и любых t, t_2, x .

Оператор $\mathcal{L}_\tau(x, t, D)$ слабо аппроксимирует оператор $\mathcal{L}(x, t, D)$, если каждый его коэффициент слабо аппроксимирует соответствующий коэффициент оператора $\mathcal{L}(x, t, D)$

Положим:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots + \mathcal{L}_p$$

$$\mathcal{L}_\tau = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathcal{L}_i, \quad \Delta \tau = \mathcal{L} - \mathcal{L}_\tau = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \mathcal{L}_i, \quad (6)$$

$$\text{где } \alpha_i(\tau, t) = p \quad t \in \{(n + \frac{i-1}{p})\tau, (n + \frac{i}{p})\tau\}, \quad (7)$$

$$\alpha_i(\tau, t) = 0 \quad t \in \{(n + \frac{i-1}{p})\tau, (n + \frac{i}{p})\tau\}, \quad (8)$$

$\varepsilon_i = 1 - \alpha_i$, \mathcal{L}_i — некоторые дифференциальные операторы.

Из (7) следует, что оператор \mathcal{L}_τ слабо аппроксимирует \mathcal{L} . Обозначим через $S_i(t, t_2)$ оператор перехода системы

$$\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_i(x, t, D) u, \quad (9)$$

через $S_{\tau}(t, t_2)$ оператор перехода системы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{L}_{\tau} U \quad (10)$$

Из (6) следует

$$S_{\tau}(t, t+\tau) = S_{\rho}(t + \frac{\rho-1}{\rho}\tau, t+\tau) S_{\rho-1}(t + \frac{\rho-2}{\rho}\tau, t + \frac{\rho-1}{\rho}\tau) \dots S_1(t, t + \frac{\tau}{\rho}) \quad (11)$$

Будем предполагать, что каждая система (8) равномерно корректна в пространстве B и обладает свойством C'
Справедлива"

Т е о р е м а Пусть $U(x, t)$ есть решение неоднородной задачи Коши (I.2), соответствующее достаточно гладкой функции $U_0(x)$ Тогда решение $U_{\tau}(x, t)$ задачи Коши

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{L}_{\tau} U + f, \quad (1^I)$$

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad (2^I)$$

с теми же функциями $f(x, t)$, $U_0(x)$, что и в (I.2), сходятся в B к решению $U(x, t)$ задачи (I), (2) при $\tau \rightarrow 0$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

В силу равномерной корректности в B операторов $S_i(t, t_2)$ будет равномерно корректен в B и оператор перехода $S_{\tau}(t, t_2)$ Отсюда следует справедливость представления Дюгамеля:

$$U_{\tau}(x, t) = S_{\tau}(t, 0) U(x, 0) + \int_0^t S_{\tau}(t, \theta) f(x, \theta) d\theta \quad (12)$$

для решения задачи (1^I) , (2^I) Разность

$$v(x, t) = U(x, t) - U_{\tau}(x, t)$$

есть решение задачи Коши

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{L}_{\tau} v + \varphi. \quad (13)$$

$$\varphi = \Delta \tau U = \sum_{i=1}^p \varepsilon_i(\tau, t) \varphi_i(x, t), \quad \varphi_i = \mathcal{L}_i U(x, t)$$

Откуда при $t = n\tau$ имеем: (I4)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_0^t S_\tau(t, \theta) \varphi(x, \theta) d\theta = \sum_{i=1}^p \int_0^t S_\tau(t, \theta) \varepsilon_i \varphi_i d\theta = \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} S_\tau(t, \theta) \varepsilon_i(\tau, \theta) \varphi_i(x, \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (I5)$$

Фиксируем i , положив, для определенности $i = 1$.

Тогда разбивая интервал интегрирования $\{n\tau, (n+1)\tau\}$ на подинтервалы $(n + \frac{s}{p})\tau, (n + \frac{s+1}{p})\tau$, находим:

$$\begin{aligned} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} S_\tau(t, \theta) \varepsilon_1(\tau, \theta) \varphi_1(x, \theta) d\theta &= (1-p) \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{p})\tau} S_\tau \varphi_1 d\theta + \\ &+ \int_{(k+\frac{1}{p})\tau}^{(k+\frac{2}{p})\tau} S_\tau \varphi_1 d\theta + \dots + \int_{(k+\frac{p-1}{p})\tau}^{(k+1)\tau} S_\tau \varphi_1 d\theta = \\ &= \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{p})\tau} [S_\tau(t, \theta + \frac{1}{p}\tau) \varphi_1(x, \theta + \frac{1}{p}\tau) - S_\tau(t, \theta) \varphi_1(x, \theta)] d\theta + \\ &+ \int_{(k+\frac{1}{p})\tau}^{(k+\frac{2}{p})\tau} [S_\tau(t, \theta + \frac{2}{p}\tau) \varphi_1(x, \theta + \frac{2}{p}\tau) - S_\tau(t, \theta) \varphi_1(x, \theta)] d\theta + \dots \\ &+ \int_{(k+\frac{p-1}{p})\tau}^{(k+1)\tau} [S_\tau(t, \theta + \frac{p-1}{p}\tau) \varphi_1(x, \theta + \frac{p-1}{p}\tau) - S_\tau(t, \theta) \varphi_1(x, \theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (I6)$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{p})\tau} [S_\tau(t, \theta + \frac{1}{p}\tau) \varphi_1(x, \theta + \frac{1}{p}\tau) - S_\tau(t, \theta) \varphi_1(x, \theta)] d\theta &= \\ &= \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{p})\tau} S_\tau(t, \theta + \frac{\tau}{p}) [E - S_\tau(\theta + \frac{\tau}{p}, \theta)] \varphi_1(x, \theta) d\theta + \\ &+ \int_{k\tau}^{(k+\frac{1}{p})\tau} S_\tau(t, \theta + \frac{\tau}{p}) [\varphi_1(x, \theta + \frac{\tau}{p}) - \varphi_1(x, \theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (I7)$$

Но для гладких функций ψ_i

$$(E - S_\tau) \psi_i = \tau \psi_i, \quad (18)$$

где ψ_i — гладкая функция.

Отсюда следует:

$$\left\| \int_{\kappa\tau}^{(\kappa+\frac{1}{p})\tau} S_\tau(t, \theta + \frac{\tau}{p}) [E - S_\tau(\theta + \frac{\tau}{p}, \theta)] \psi_i(x, \theta) d\theta \right\| = O(\tau^2) \quad (19)$$

Аналогично

$$\psi_i(x, \theta + \frac{\tau}{p}) - \psi_i(x, \theta) = \tau \omega_i(x, t) \quad \text{где } \omega_i(x, t) \quad \text{— гладкая}$$

функция. Отсюда

$$\left\| \int_{\kappa\tau}^{(\kappa+\frac{1}{p})\tau} S_\tau(t, \theta + \frac{\tau}{p}) [\psi_i(x, \theta + \frac{\tau}{p}) - \psi_i(x, \theta)] d\theta \right\| = O(\tau^2) \quad (20)$$

Применяя аналогичную оценку к остальным интегралам в равенстве (16) получим:

$$\left\| \int_{\kappa\tau}^{(\kappa+1)\tau} S_\tau \varepsilon_i \psi_i d\theta \right\| = O(\tau^2) \quad (21)$$

Аналогичные оценки получаются для ψ_2, \dots, ψ_p

Отсюда следует из (15):

$$\|v\| = O(\tau). \quad (22)$$

Теорема доказана.

Теорема остается справедливой также в случае, когда функции $\alpha_i(\tau, t)$ имеют не специальный вид (18), а лишь удовлетворяют условиям

$$\frac{\sum_{i=1}^p \alpha_i(\tau, t)}{p} = 1 \quad (23)$$

$$\int_t^{t+\tau} \alpha_i(\tau, \theta) d\theta = 1$$