

Численные методы механики сплошной среды продолжают бурно развиваться. В этой ветви науки, которую кратко можно назвать вычислительной механикой, работает все большее число математиков-вычислителей, растет парк ЭВМ, ширится круг задач, алгоритмов и программ.

В статье я попытаюсь не столько дать обзор достижений вычислительной механики за последние четыре десятилетия, сколько сосредоточить внимание на тех проблемах, которые сейчас стоят перед нею. Интересы и задачи вычислительной механики не ограничиваются созданием численных алгоритмов (в основном разностных схем) и программ. Разностная схема не всегда является только аппроксимацией наперед заданного дифференциального, интегро-дифференциального или интегрального уравнения. Ее можно рассматривать как самостоятельную математическую модель. Многие численные алгоритмы исходят из тех же первых принципов, что и континуальные уравнения. В вычислительной механике реально работает цепочка континуально-дискретных моделей (каждая из которых играет свою самостоятельную роль), имеющая началом дискретную физическую модель первого принципа и окончанием численный алгоритм и программу. Все это говорит о тесном переплетении физических и математических, континуальных и дискретных моделей.

В вычислительной механике можно ввести три раздела.

1. Физико-математические модели сплошной среды в широком диапазоне физических условий.
2. Численные алгоритмы (разностные схемы, метод конечных элементов, метод частиц и т.д.) механики сплошной среды. Они развиваются в соответствии с углубленным пониманием моделей среды и совер-

шенствованием вычислительной техники и программирования. Цепочка "модель-алгоритм-программа-архитектура ЭВМ" непрерывно совершенствуется и ее отдельные звенья все более приспособляются друг к другу, взаимно определяя свою структуру.

3. Математическая технология. Особенно большое значение этот раздел приобретает в связи со следующими факторами: системы автоматизированного проектирования инженерных конструкций, большие задачи, ЭВМ параллельного действия.

Дадим теперь обзор основных направлений исследований в каждом из указанных трех разделов.

Моделью первого принципа для достаточно разреженных газов является кинетическое уравнение Больцмана, в котором взаимодействие молекул описывается как мгновенное соударение упругих шаров. Методы проектирования позволяют получить из этой модели уравнения газовой динамики с явными выражениями для уравнений состояния и коэффициентов переноса. Однако, модель Больцмана достаточно обоснована только для одноатомных газов при умеренных температурах и давлениях. В настоящее время диапазон интересующих нас физических явлений резко расширился и модель Больцмана должна быть видоизменена для учета внутренней структуры атомов и молекул. Практически эти изменения вносятся в следствия уравнения Больцмана - в уравнение газодинамики, уравнения состояния и коэффициенты переноса. В стандартном алгоритме проектирования, кроме того, заложена гипотеза о близости состояния газа к равновесному. По-видимому, сходимость метода Чапмена-Энскога в области неравновесности (ударная волна, зона смешения, погранслои, область турбулентности потока) снижается, если вообще не пропадает. Модель Больцмана не может объяснить появление физических неоднородностей, возникновение кластеров и других мезообъектов. Поэтому в широком

диапазоне физических параметров модель Больцмана становится неудовлетворительной. Более сложные модели Н.Н.Боголюбова пока еще недостаточно исследованы математически, особенно в вопросе об устойчивости.

В этой связи в области теории турбулентности усилился интерес к простым, но точно решаемым моделям, а также моделям, исходящим из первых принципов, на основе которых можно получить упрощенную, но качественно верную картину того или иного сложного физического эффекта, например, генезиса крупных (когерентных) вихревых структур в сдвиговых потоках и связанного с ним явления отрицательной вязкости (отрицательного производства энергии турбулентности). Весьма плодотворной основой для построения таких моделей оказалось исследование статистических ансамблей дискретных (точечных) вихрей методами статистической механики [1]. Эти модели обладают определенной универсальностью и могут быть использованы в широком круге задач. Несомненным достоинством является их непосредственная направленность на описание распределений завихренности, которые являются центральным объектом современных теорий и экспериментальных исследований. Не менее существенным их качеством является то, что при относительной простоте эти модели правильно воспроизводят основные нелинейные эффекты динамики завихренности.

Простейшим объектом этого рода является динамическая система прямолинейных вихревых нитей в идеальной жидкости. Движение системы N вихрей одинаковой интенсивности κ допускает описание в гамильтоновом формализме

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_i}{dt} &= -\kappa \bar{e} \cdot \nabla_i H_N^0 + \bar{V}(\bar{z}, t), \quad i = 1, 2 \dots N, \\ H_N^0 &= -\sum_{i < j}^N V_{ij}, \quad V_{ij} = \ln |\bar{z}_i - \bar{z}_j|, \end{aligned} \quad (I)$$

$\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ - радиус-вектор i -вихря, $\vec{\nabla}_i = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i}$, \vec{e} - единичный вектор нормали к плоскости движения вихрей, $\vec{V}(\vec{r}, t)$ - внешнее поле скорости.

Эквивалентное (I) статистическое описание движения системы дается уравнением Лиувилля

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = (L_N^0 + L_N^1) f_N; \quad L_N^1 = -\kappa \vec{e} \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i H_N^0 \vec{\nabla}_i, \quad (2)$$

$$L_N^1 = - \sum_{i=1}^N \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_i$$

$f_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ - плотность вероятности совместного распределения N -вихрей.

Полагая в (2) внешнее поле скорости $\vec{V}(\vec{r}, t)$ равным нулю, можно исследовать вопрос об эволюции распределения средней завихренности в турбулентном потоке под действием собственного поля скорости. Для этого необходимо из (2) путем сокращения описания вывести замкнутое уравнение для одночастичной функции распределения $f_1(\vec{r}, t)$, которая имеет физический смысл искомого распределения. Следует заметить, что так как уединенная прямолинейная вихревая нить в идеальной жидкости покоится, то система (I) является сильно связанной и это исключает прямое применение к (2) методов возмущений, развитых в традиционной кинетической теории. В [1, 2] на основе модификации метода Пригожина-Балеску построения асимптотических решений (2) проделан вывод замкнутого кинетического уравнения для функции распределения осредненной завихренности. Оно имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\omega}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \bar{U}(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \bar{\omega}(\vec{r}, t) - A \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x_i^2} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \bar{\omega}(\vec{r}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot$$

$$\cdot \int d\vec{r}_1 B_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_1) [\bar{\omega}(\vec{r}_1) - \bar{\omega}_0] - c \int d\vec{r}_1 \sum B_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_1) \frac{\partial^2 \bar{\omega}(\vec{r}, t)}{\partial x_{1i} \partial x_{1j}} \cdot \quad (3)$$

Здесь \bar{U} — средняя гидродинамическая скорость, индуцированная завихренностью $\bar{\omega}(\bar{z}, t)$, $A > 0$, $\{B_{ij}\}$ — некоторая положительно определенная матрица, коэффициенты которой есть суммируемые функции, $\bar{\omega}_0$ — средняя величина завихренности в области течения.

Левая часть (3), получаемая в первом порядке построенной теории возмущений, есть уравнение Гельмгольца переноса (осредненной) завихренности в плоском случае. Используя то, что A , B_{ij} положительны и структуру B_{ij} , можно показать, что первые два члена в правой части определяют эллиптический оператор с нелокальными коэффициентами. Вместе с тем, из-за присутствия во 2-м члене функции $(\bar{\omega}(\bar{z}, t) - \bar{\omega}_0)$ знак эллиптического оператора в данной точке определяется мгновенным распределением завихренности $\bar{\omega}(\bar{z}, t)$ во всей области течения. Уравнение (3) в явной форме учитывает эффекты знакопеременной вихревой вязкости — оно описывает локальные процессы разрушения (положительная диффузия) и возникновения (отрицательная диффузия) крупных вихревых структур. Интересно отметить, что в отсутствие в области течения твердых границ информационная энтропия распределения завихренности

$$S|_{(\varphi)} = - \int d\bar{z} \, \omega(\bar{z}, t) \ln \omega(\bar{z}, t),$$

характеризующая "размазанность" распределения, не убывает в широком смысле для области в целом, хотя процессы создания крупных структур ведут к ее локальному уменьшению. Аналогичный факт корректности по отношению к закону неубывания информационной энтропии в замкнутой системе был установлен нами в [2] для модели формирования крупных вихревых структур в турбулентном слое сдвига, которая также в явном виде содержит эффект отрицательной вихревой вязкости, проявляющейся в потоке энергии от малых вихрей в направлении больших масштабов.

Уравнение (3) может трактоваться как уравнение для плотности

вероятности распределения пульсаций завихренности. При этом оно содержит меньший произвол, чем распространенное в работах западных авторов уравнение Лундгрена и может с успехом его заменить.

Еще одна возможная область приложения уравнения (3) и ему аналогичных, которые можно получить для других гамильтоновых вихревых моделей, оценка диссипативных и дисперсионных свойств различных методов вихревых частиц. При этом уравнения типа (3) играют ту же роль, что и первое дифференциальное приближение, предложенное нами как инструмент анализа разностных схем.

Для высоких температур и давлений наиболее реальной является модель Томаса-Ферми, когда атом представляется как атомная ячейка с ядром в центре, заполненная электронным газом. В последние четыре десятилетия это приближение интенсивно исследуется [1].

Как известно, чтобы система гидродинамических уравнений была полной, необходимо ее дополнить уравнением состояния, связывающим алгебраическим соотношением термодинамических параметров. Данное предположение справедливо только для сред, в которых эффекты нелокальности и памяти несущественны. Кроме того, необходимо выполнение гипотезы о локальном термодинамическом равновесии, выдвинутой в термодинамике необратимых процессов.

При выполнении сделанных предположений уравнения состояния можно классифицировать, исходя из анализа получаемых на их основе гидродинамических решений. Так уравнения состояния можно условно разделить на нормальные и аномальные. Под нормальными уравнениями состояния мы будем понимать уравнения состояния, удовлетворяющие условиям:

$$1. \quad \frac{\partial P(v, S)}{\partial v} < 0,$$

$$2. \quad \frac{\partial^2 P(v, S)}{\partial v^2} > 0,$$

$$3. \quad P(v, S) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad v \rightarrow 0,$$

$$4. \quad \frac{\partial P(\vartheta, S)}{\partial S} > 0,$$

$$5. \quad C_{\vartheta} = \frac{\partial \xi(\vartheta, T)}{\partial T} > 0,$$

где $P(\vartheta, S)$ - давление, как функция энтропии и объема, C_{ϑ} - теплоемкость при постоянном объеме, ξ - внутренняя энергия. Соотношения 1-5 были сформулированы Бете и Вейлем.

Нарушение одного из условий 1-5 приводит к аномальному поведению потока газа или жидкости. Например, нарушение условия 1-к смене типа системы уравнений газодинамики [4]. Нарушение условия 1 реализуется, например, в уравнении состояния Ван-дер-Ваальса, в окрестности значений термодинамических параметров, отвечающих метастабильным термодинамическим состояниям. Такие метастабильные состояния реализуются в окрестности фазовых переходов. Неустойчивые, метастабильные состояния

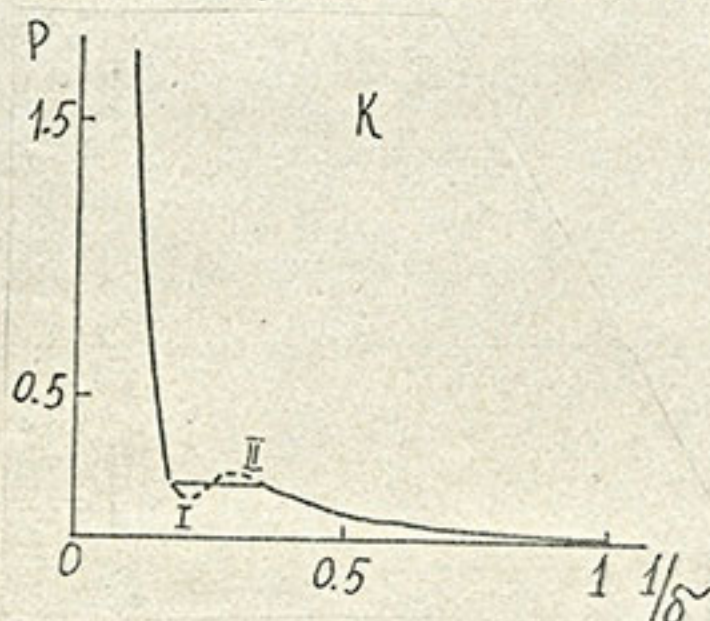


Рис.1. Кривая холодного сжатия калия. [14]. Давление в атомных единицах

(пунктирная кривая на рис.1) переходят в устойчивые состояния (двухфазные), например, газ-жидкость.

Другим примером аномальных уравнений состояния являются уравнения состояния с изломом (рис.2). Появление излома или точки перегиба ($\frac{\partial^2 P}{\partial \vartheta^2} \approx 0$) на ударной адиабате связано, например, в случае твердого тела со структурным фазовым переходом или выдавливанием электронов из локализованного состояния на атоме в

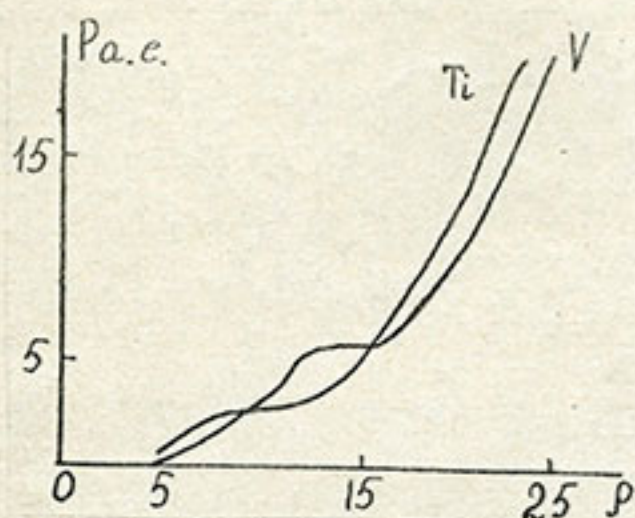


Рис.2. Кривые холодного сжатия титана и ванадия I4

непрерывный спектр. К таким же явлениям приведет пересечение электронных уровней в системе.

Нарушение условия 2 может привести к другому виду аномального гидродинамического поведения - существованию ударных волн разрежения [4]. Такие системы в настоящее время получены экспериментально.

Это, например, газ вблизи критической точки [5] или сверхплотное вещество в сверхсильном магнитном поле [6-7]. Интерес к последним сильно возрос в связи с серьезным продвижением экспериментальных исследований сильных ударных волн и достижением, за фронтом ударной волны, давлений $P \gtrsim 10^9$ Бар.

При построении уравнения состояния в столь экстремальных условиях необходимо учитывать также вклад в уравнение состояния электронной компоненты. Высокие давления и высокая плотность вещества приводит к тому, что среда представляет собой упорядоченную систему атомов, находящихся в узлах решетки. Термодинамику такой системы можно построить, вычислив свободную энергию электронной компоненты и ядерной компоненты. Для электронной подсистемы задача разбивается на два этапа:

1. решение уравнения Шредингера для системы электронов;
2. вычисление свободной энергии, внутренней энергии и других термодинамических величин.

Расчет уравнения Шредингера для кристалла представляет довольно сложную задачу. При ее решении используется условие трансляционной симметрии, что приводит к боровским краевым условиям,

для волновой функции. Используется одночастичное приближение, решение ищется в пределах элементарной ячейки Вигнера-Зейтца.

Для упрощения расчета уравнения Шредингера, как правило, используется еще ряд приближений - ячейка заменяется на сферу равного объема, нелокальный обменный потенциал заменяется на локальный, эффекты спиновой корреляции учитываются добавлением в потенциальную энергию взаимодействия корреляционной поправки. Проведение такого последовательного расчета требует огромных затрат машинного времени. Задача значительно упрощается, если использовать квазиклассическую модель для электронов в атоме, предложенную Томасом-Ферми и обобщенную на произвольные температуры Фейманом-Метрополисом-Теллером. Задача сводится к решению уравнения Пуассона для системы электронов, подчиняющихся статистике Ферми-Дирака и находящихся в поле ядра и самих себя (самосогласованном поле).

В случае предельных значений параметров:

1. $T \rightarrow \infty$ (температура)

2. $\rho \rightarrow \infty$ (плотность)

3. $T \rightarrow 0$

4. $\rho \rightarrow 0$

удается получить простые асимптотические выражения для функций, определяющих энергию и давление системы [3]. Уравнения состояния, которые получаются в этом случае, являются нормальными. Ситуация изменяется, если рассмотреть данную задачу с учетом сверхсильного магнитного поля. Примером такого сорта систем являются астрофизические объекты - пульсары и белые карлики.

Согласно современным представлениям вещество в этих звездах находится в сверхсильном магнитном поле $10^7 < B < 10^{12}$ Гс. В такого сорта полях энергия взаимодействия спина электрона с магнитным полем порядка энергии электрона на первой Боровской орбите и, поэто-

му, магнитное взаимодействие нельзя учитывать по теории возмущения. Свободный атом в таком сверхсильном магнитном поле имеет

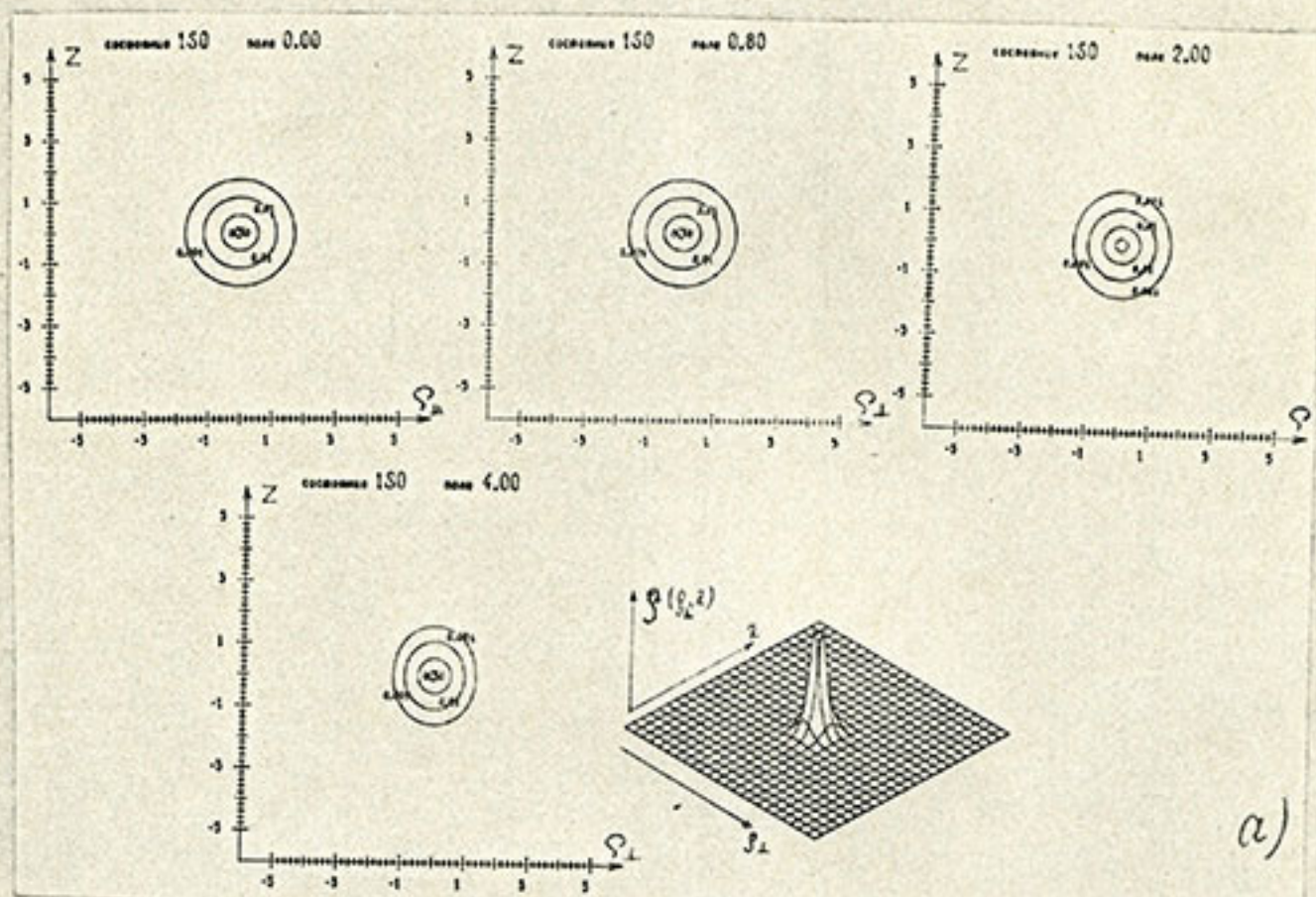
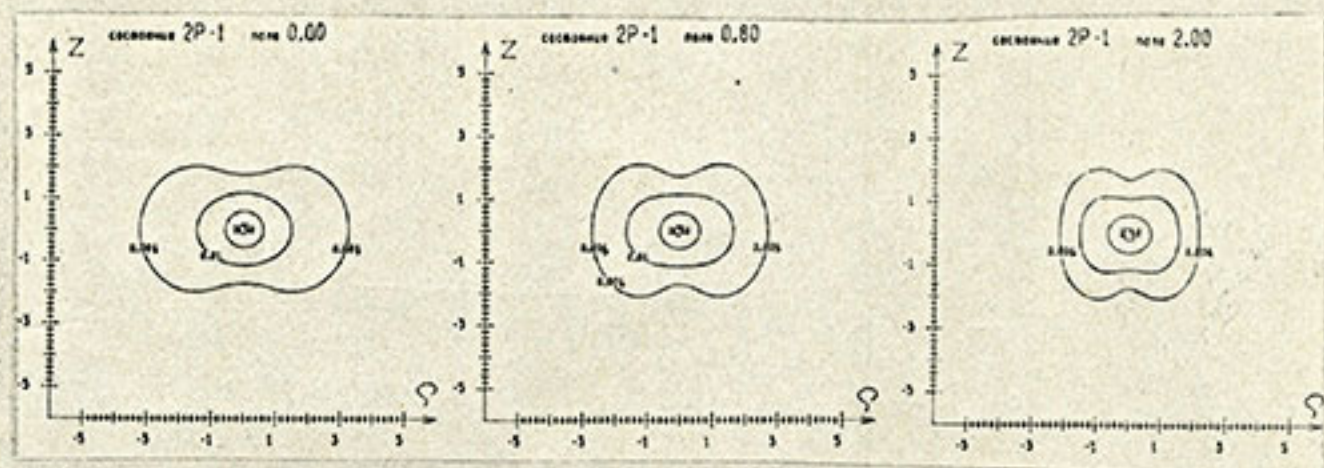


Рис.3. Изолинии электронной плотности $n(z, \rho)$ различных состояний гелиеподобного иона в относительных единицах. На всех рисунках приведены изолинии 0.5, 0.1, 0.01, 0.001 от значения максимальной плотности.

а) Изолинии для состояния $1 \cdot S_0$ для различных значений поля $B=0, 0.8, 2, 4$. ($B_0 = 2.3 \cdot 10^9$ Гс).



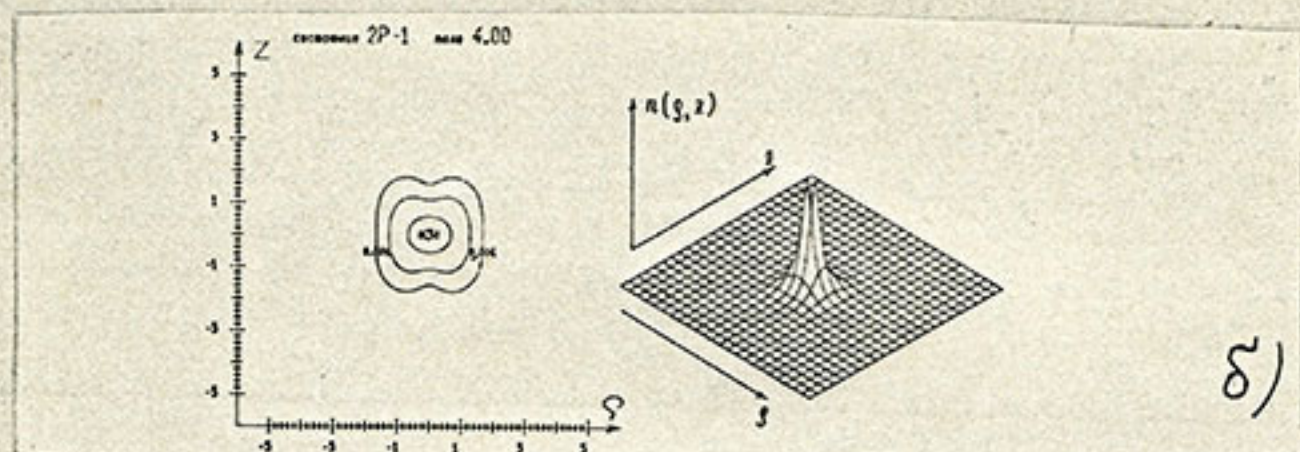


Рис.3. Продолжение. б) Изолинии для состояния $1 \cdot P_{-1}$. анизотропное распределение электронной плотности [8] .

Пример изолиний электронной плотности свободного гелиеподобного иона представлен на рис.3. С ростом магнитного поля происходит сначала вытягивание электронной плотности вдоль магнитного поля за счет параболического барьера $\sim B^2 z_1^2$ в плоскости перпендикулярной магнитному полю, а затем – сжатие атома вдоль поля, связанное с более сильным влиянием на волновую функцию кулоновского притяжения к ядру. Квадрупольный момент основного состояния гелиеподобного иона в этом случае будет сначала расти, а затем, достигнув максимума, падает. Распределение электронной плотности становится более сложного вида на границе атома и сферизованным в окрестности ядра. В случае сильно сжатого атома симметрия ячейки Вигнера-Зейтца позволяет рассматривать задачу в сферически симметричном приближении.

Функционал энергии электронного газа в атоме в магнитном поле с учетом градиентной поправки нетрудно получить [9], используя методику разложения операторных выражений, предложенную Киржницем. Можно рассмотреть два предельных случая.

В первом случае магнитное взаимодействие можно учесть, дополнив функционал Томаса-Ферми слагаемым вида

$$\sim -\frac{B}{2} \int (\varphi_- - \varphi_+) d\tau, \quad (4)$$

которое связано со спиновой поляризацией электронов (ρ_{\pm} — плотности электронов, имеющих спин (-) — против и (+) — вдоль магнитного поля).

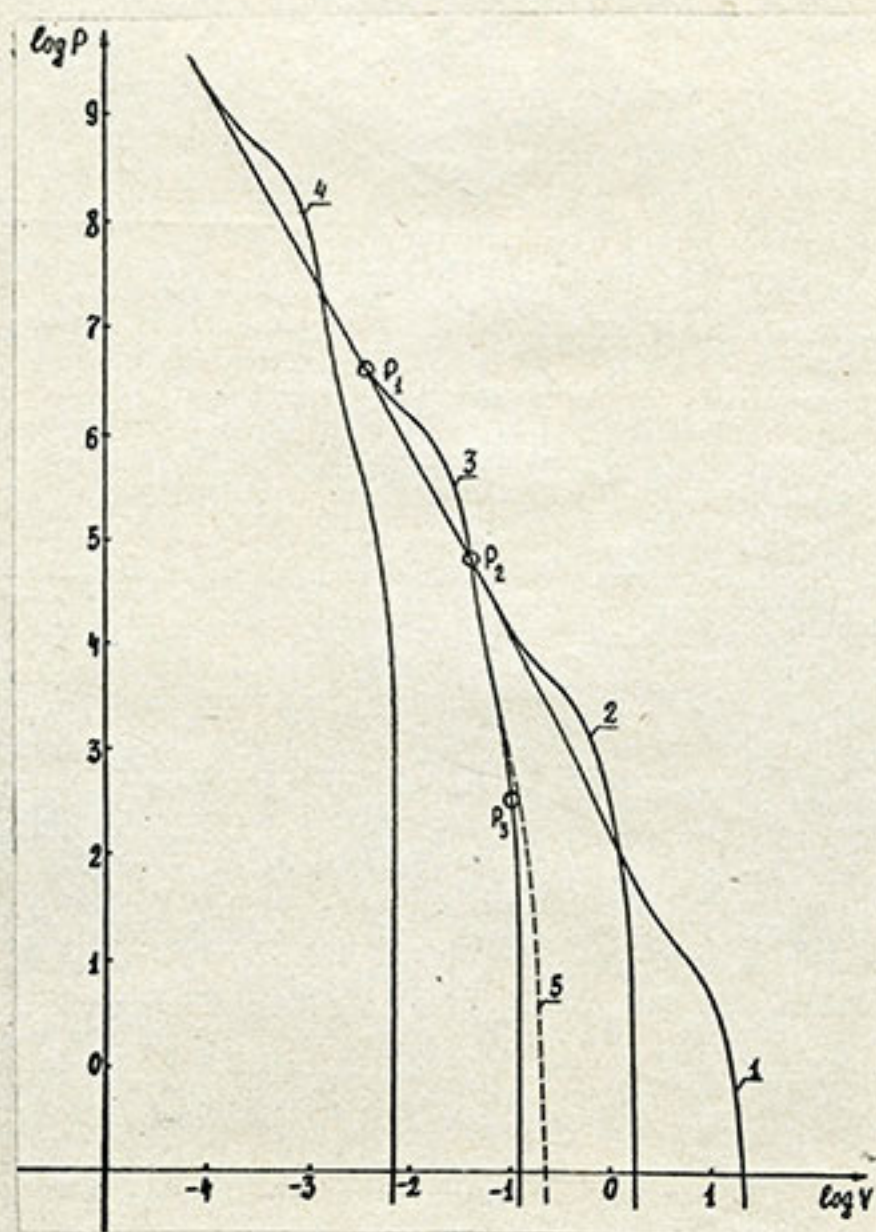


Рис.4. Зависимость давления P от удельного объема v для нескольких значений магнитного поля. 1 — $B = 0.1$; 2 — $B = 1.0$; 3 — $B = 10$; 4 — $B = 100$; 5 — расчет, сделанный для $B = 10$, без учета обмена.

Во втором случае необходимо учесть квантование Ландау. Это приводит к необходимости суммирования по всем заполненным состояниям Ландау. Без учета градиентных поправок плотность кинетической энергии электронов для нулевой температуры имеет вид:

$$\mathcal{E}_{\kappa\pm}(\bar{v}) = \frac{B}{(2\pi)^2} \sum_n \frac{P_{n\pm}^3}{3}, \quad (5)$$

где $P_{n\pm} = \sqrt{2(E_n - \varphi_{\pm}(z))}$, $E_n = B(n + 1/2)$,
 $\varphi_{\pm}(z) = \mu_0 - \vartheta(z) \pm B/2$,

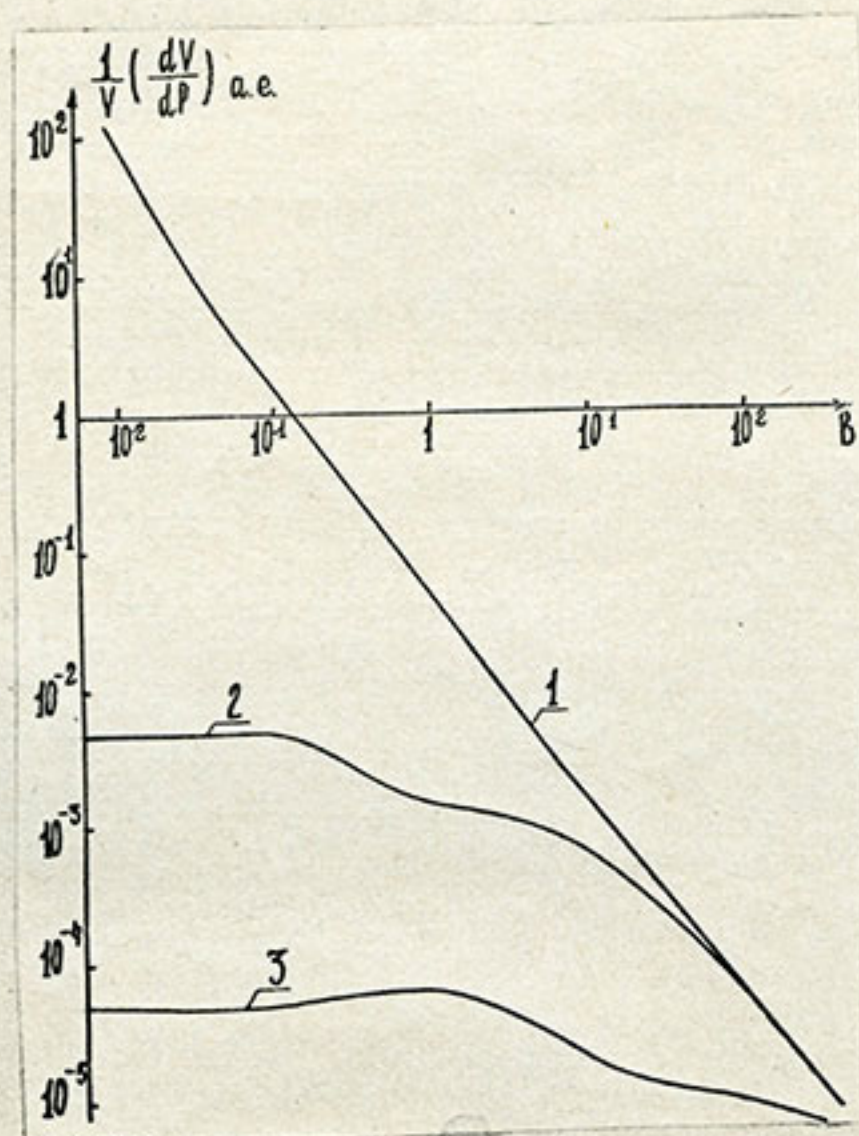


Рис.5. Зависимость объемного коэффициента сжимаемости от величины B для нескольких фиксированных P : 1 - $P = 0$; 2 - $P = 10^2$; 3 - $P = 10^4$

μ_0 - химический потенциал, $\vartheta(z)$ - самосогласованный потенциал в атоме, $n = 0, 1, 2, \dots$ целые числа. Соотношения (4) и (5) нетрудно обобщить и на случай произвольных температур.

Первая модель справедлива в диапазоне полей

$$1 \ll B < 2^{4/3},$$

(в единицах $B_0 = e^3 c m^2 / \hbar^3 \approx 2.35 \cdot 10^9$ Гс, Z - заряд ядра), а вторая -

$$z^{4/3} \ll B \leq z^5.$$

На рис.4 представлена кривая холодного сжатия аппроксимационной модели (1,3) [6]. При больших сжатиях кривые $P(\vartheta)$ выходят на свое асимптотическое томас-фермиевское решение. При малых сжатиях роль магнитного поля существенно возрастает. Резко падает сжимаемость среды (рис.5). Вещество ведет себя как несжимаемое вплоть до некоторого критического давления, которое зависит от поля.

На рис.6 представлены изотермы в поле $B = 10, 30 \cdot z^{4/3}$ ($z=26$) рассчитанные по второй модели для железа. С ростом давления все кривые выходят на томас-фермиевскую асимптотику $P(\vartheta, T = \text{const}, B = \text{const})$. Интересно поведение изотермической скорости звука (рис.7) от объема. Возникает аномальный рост скорости звука с ростом удельного объема в области заполнения первого уровня Ландау. Заполнение очередного уровня Ландау приводит к очередному падению скорости звука при изменении удельного объема, но не для слишком высоких температур. Так для $T = 300$ осцилляционный характер $S(\vartheta)$ исчезает. Последнее естественно, т.к. при $T \sim B$ дискретность уровней Ландау не существенна.

На основе скорости звука можно сделать оценку температуры Дебая, по которой можно учесть вклад в полное давление колебаний ядер. $F_{\text{я}} \approx T^4 / \theta_{\text{я}}^3$ и

$$P_{\text{я}} \approx - \left(\frac{\partial F_{\text{я}}}{\partial \vartheta} \right)_T \approx + \left(\frac{T}{\theta_{\text{я}}} \right)^4 \cdot \frac{d\theta_{\text{я}}}{d\vartheta},$$

при $d\theta_{\text{я}}/d\vartheta < 0$ имеем $P_{\text{я}} < 0$.

Если электронный газ сильно вырожден, то температурная поправка к давлению обусловлена давлением ядер $P_{\text{я}}$ и, как нетрудно видеть, тогда $\left(\partial P / \partial T \right)_{\vartheta} \approx \left(\partial P_{\text{я}} / \partial T \right)_{\vartheta} < 0$.

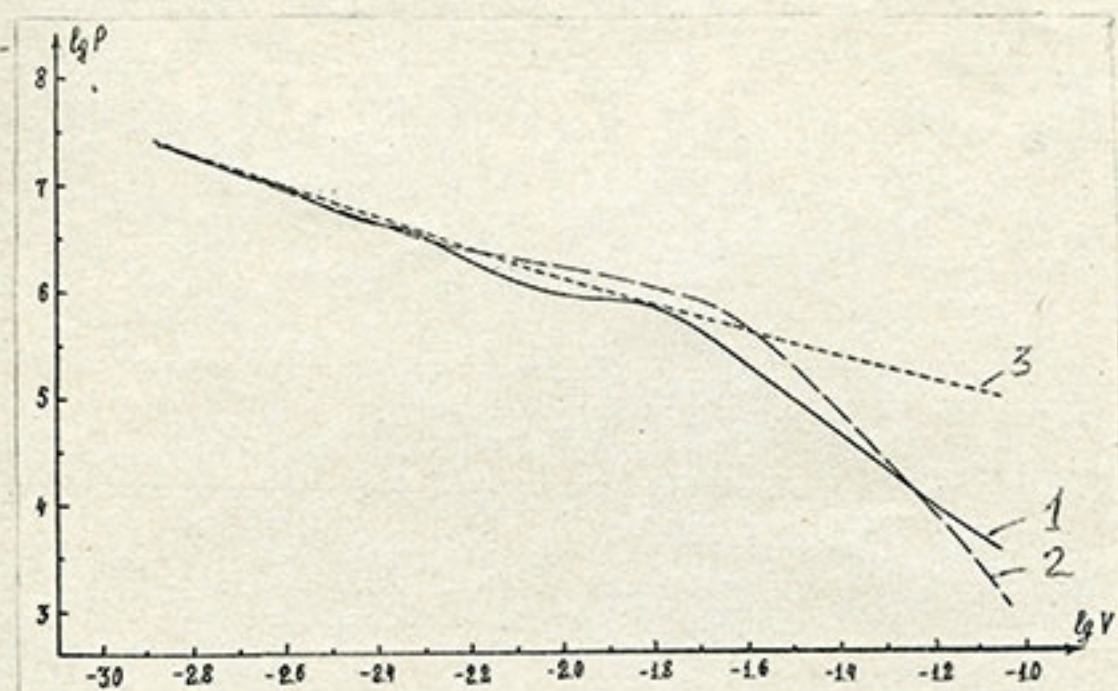


Рис.6. Зависимость давления P от удельного объема v для железа в поле $B = 10 \cdot z^{4/3}$ (или $1.8 \cdot 10^{12}$ гаусс) для нескольких значений температуры. 1. — = 10; 2. - - - = 300; 3. — — — = 0.

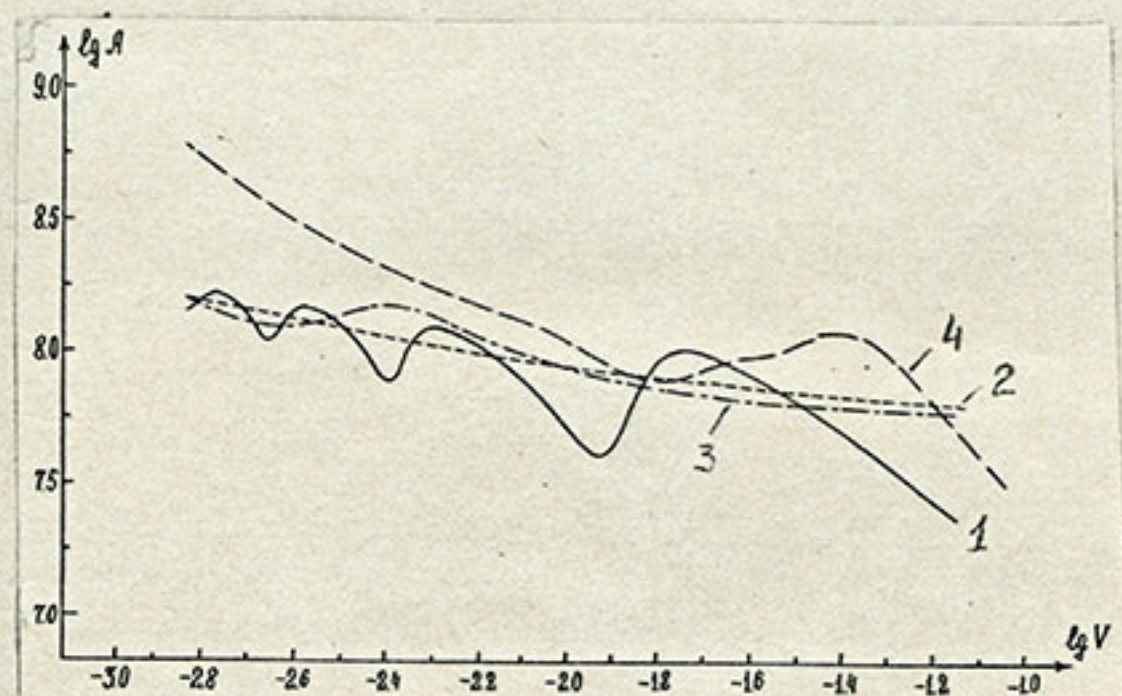


Рис.7. Зависимость скорости звука A в железе от удельного объема v для нескольких значений температуры T и поля B (скорость звука в см/сек).

1. — = 10; $B = 10 \cdot z^{4/3}$
 2. - - - = 300; $B = 300 \cdot z^{4/3}$

$$3. \text{ — — — — } = 30;$$

$$4. \text{ — — — — } = 0;$$

$$B = 30 \cdot z^{4/3}$$

$$B = 10 \cdot z^{4/3}.$$

Последнее приводит к отрицательному значению коэффициента теплового расширения $(\partial \theta / \partial T)_p < 0$ (как у воды при температуре $T < 4^\circ\text{C}$).

Промежуточной моделью между квазиклассической и точным зонным расчетом является модель сжатого атома [10-12], в которой поведение электронов в атоме определяется путем решения самосогласованного уравнения Шредингера для одночастичных функций с краевыми условиями вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=R} = 0, \quad \Psi(z=R) = 0,$$

задающими края зон (на языке молекулярных орбиталей первое соотношение (8) отвечает связывающей орбитали, а второе — разрыхляющей).

Возникающие при малых сжатиях зоны формируются валентными электронами. С ростом сжатия происходит уширение зон и возможно их пересечение с вышележащими зонами. Кроме того, происходит уширение основных уровней, формирование из них глубоколежащих зон, а при еще более высоких сжатиях возможно уширение зон основных состояний и их пересечение с валентными зонами. Пересечение электронных уровней приводит к особенностям в уравнении состояния, на которые было обращено внимание в [13].

Пример такого аномального поведения уравнения состояния представлен на рис. 8 [14]. В области $\zeta \simeq 2.7$ наблюдается плавное повышение на кривой сжатия, вызванное заполнением $3d$ -зоны. Это явление при $\zeta \simeq 2$ также отмечалось в работе [15]. Расчеты согласуются с экспериментальными данными, представленными на рис. 8. Наличие таких участков на кривой сжатия приводит к смене знака у $-\partial^2 P / \partial \theta^2$.

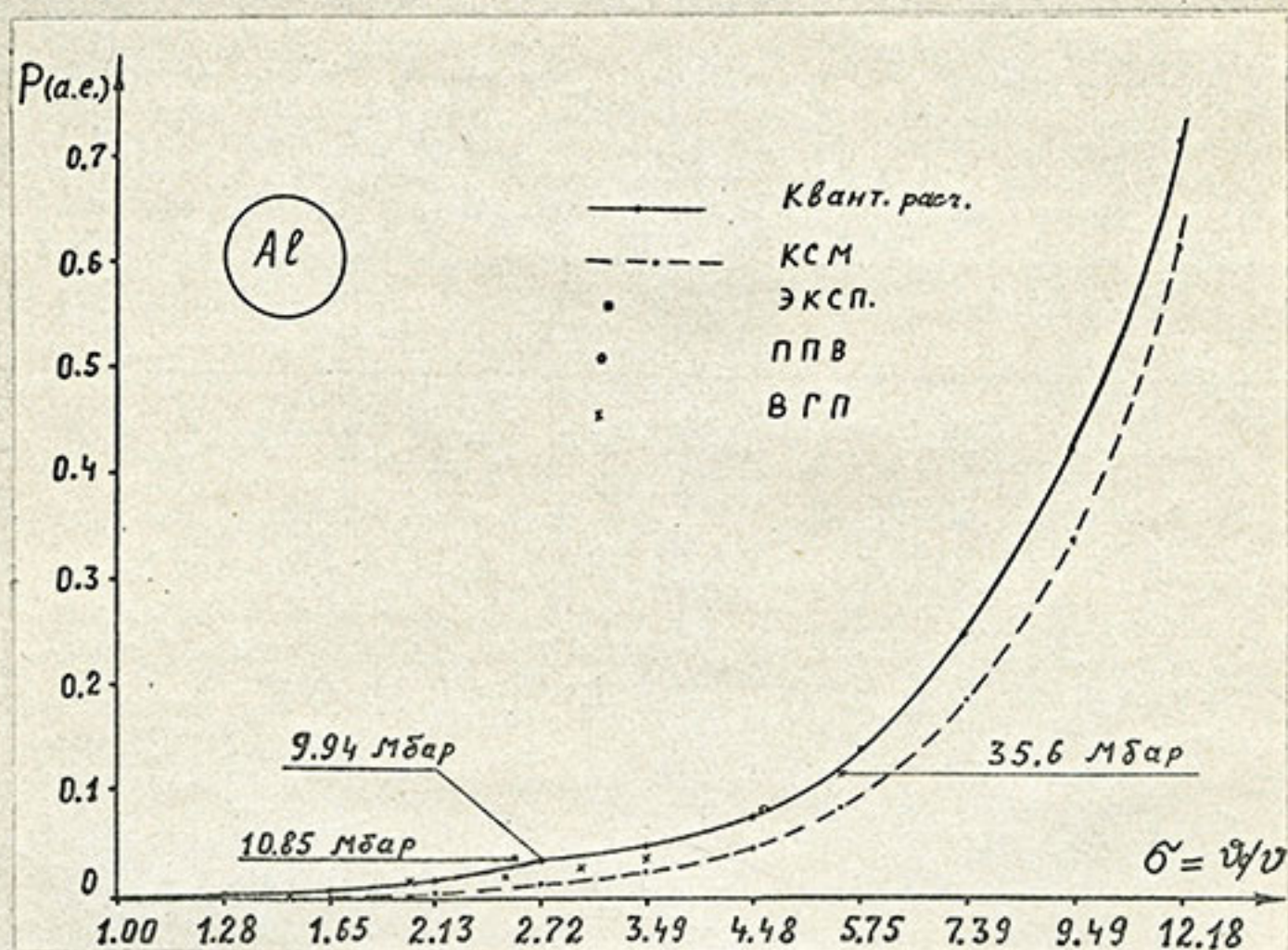


Рис. 8

Учет энергии электронного газа приводит к аномалиям в уравнениях состояния, которые приобретают характер уравнений состояния типа Ван-дер-Ваальса. Это может приводить к интересным эффектам, например, в нейтронных звездах [2-5]. Полученные результаты математического моделирования нуждаются, конечно, в экспериментальном подтверждении. При переходе к конденсированным средам (деформируемое твердое тело, жидкость) классические уравнения состояния становятся неприменимыми и пространство термодинамических состояний становится более чем двумерным. В феноменологических теориях нелинейной упругости используются уравнения состояния, которые бу-

дем называть неголономными. Это означает, что уже в одномерном случае пространство термодинамических состояний является более чем двумерным, а алгебраические соотношения заменяются дифференциальными уравнениями. Учет таких уравнений состояния приводит к двухступенчатому профилю ударной волны и другим новым эффектам [19]. Так, например, рассмотрим конденсированную среду, по которой распространяется сильная ударная волна. Мы представляем ее как область ударного перехода, в котором среда может находиться в трех различных состояниях: твердом (упругом), вязкопластическом и газообразном. Состояние сплошной среды в ударном переходе будем характеризовать распределением деформации $\varepsilon > 0$, напряжением $\sigma > 0$, внутренней энергией E и полем скорости V . В процессе движения этой сплошной среды должны выполняться законы сохранения массы, количества движения и энергии, которые в одномерном нестационарном случае имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial h}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial h}, \quad \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial h} (v\sigma). \quad (6)$$

Здесь t — время, h — координата Лагранжа, а ρ_0 — начальная плотность среды. Для описания состояния среды свяжем термодинамические величины σ , ε , E соотношениями

$$-A \frac{\partial \sigma}{\partial t} = c \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - j; \quad E = E(\varepsilon, T), \quad (7)$$

где $A = A(\varepsilon, \sigma)$, $c = c(\varepsilon, \sigma)$, $j = j(\varepsilon, \sigma, T)$.

Уравнение (7) является калорическим уравнением состояния среды, которое учитывает упругое взаимодействие между атомами, энергию колебания атомов около положения равновесия и тепловое возбуждение электронов.

Система уравнений (6) и (7) будет гиперболического типа и имеет три вещественные характеристики при $c/A > 0$. Если изучать течение в стационарном ударном переходе, то решение будем искать в виде

$$\varepsilon = \varepsilon(h - D_0 t), \quad \sigma = \sigma(h - D_0 t), \quad E = E(h - D_0 t), \quad (8)$$

где \mathcal{D}_0 - массовая скорость ударной волны. Подставляя соотношения (8) в уравнении (6) и интегрируя, найдем первые интегралы законов сохранения

$$\mathcal{D}_0 \xi - V = C_1, \quad \varrho_0 \mathcal{D}_0 V - \mathcal{G} = C_2, \quad \varrho_0 \mathcal{D}_0 \left(E + \frac{V^2}{2} \right) - \mathcal{G} V = C_3. \quad (9)$$

Соотношение (7), которое является не голономным, принимает после подстановки вид

$$\mathcal{D}_0 \left(\frac{d\mathcal{G}}{dx} A - \mathcal{C} \frac{d\xi}{dx} \right) = j, \quad x = h - \mathcal{D}_0 t. \quad (10)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные интегрирования. Распределение параметров среды в ударном переходе будет непрерывным при наличии диссипативных членов в правой части уравнения (10).

Таким образом, для полученной системы уравнений (10) поставим следующую краевую задачу Коши: найти функции

$$V(x), \mathcal{G}(x), E(x) \text{ и } \xi(x) \in C^1(-\infty, \infty),$$

удовлетворяющие системе (10) и граничным условиям при

$$x \rightarrow \infty \quad V(x) = V_1, \quad \mathcal{G}(x) = \mathcal{G}_1, \quad E(x) = E_1, \quad \xi(x) = \xi_1,$$

$$\text{при } x \rightarrow -\infty \quad V(x) = V_4, \quad \mathcal{G}(x) = \mathcal{G}_4, \quad E(x) = E_4, \quad \xi(x) = \xi_4.$$

Величины $V_1, V_4, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_4, E_1, E_4, \xi_1, \xi_4$ будут постоянными и равны численным значениям переменных до и за ударным фронтом, характеризующим два состояния среды.

Необходимым условием существования решения данной задачи является требование, чтобы точки $(V_1, \mathcal{G}_1, E_1, \xi_1)$ и $(V_4, \mathcal{G}_4, E_4, \xi_4)$ были стационарными точками системы уравнений (10), следовательно

$$\mathcal{D}_0 [\xi] = [V], \quad \varrho_0 \mathcal{D}_0^2 [\xi] = [\mathcal{G}], \quad [E] = \frac{\mathcal{G}_4 + \mathcal{G}_1}{2\varrho_0} [\xi]$$

где $[j] = 0$ и A, \mathcal{C} - ограниченные функции, $[\]$ - обозначаем скачок соответствующих величин

Полученные соотношения представляют собой обобщенные условия типа Гюгонио, с помощью которых можно рассчитывать величины на границах ударного перехода. С другой стороны, из последнего равенства следует ограничение на выбор функции $j(\xi, \mathcal{G}, E)$, входящей в уравнение состояния.

Для проведения качественного анализа решения задачи Коши конкретизируем вид уравнения состояния (7). Представим зависимости $C(\varepsilon, \sigma, E)$ и $\dot{\gamma}(\varepsilon, \sigma, E)$ в виде

$$C(\varepsilon, \sigma, E) = A(\varepsilon, \sigma) \cdot C_0(\varepsilon, \sigma) - \frac{\mu_1(\varepsilon)}{1-\varepsilon} A_1(\varepsilon, \sigma) \\ \dot{\gamma}(\varepsilon, \sigma, E) = A(\varepsilon, \sigma) \cdot g(\varepsilon, \sigma) - A_1(\varepsilon, \sigma) \left[\sigma - \frac{\rho_0(\gamma-1)}{1-\varepsilon} E \right],$$

где γ - отношение удельных теплоемкостей среды, μ_1 - коэффициент вязкости сжатия.

Произвольные функции $A(\varepsilon, \sigma)$ и $A_1(\varepsilon, \sigma)$ выбираем из условий того, что данное уравнение состояния должно одинаково удовлетворительно работать при $\varepsilon \sim 0$ и $\sigma \sim \infty$, что дает асимптотические выражения

$$A \approx (\varepsilon_0 - \varepsilon)^\beta [1 + \dots], \quad A_1 = C^0 \varepsilon^\alpha [1 + \dots],$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $C^0 > 0$ - постоянная размерности $\frac{1}{[E]}$, а $\varepsilon_0 = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \varepsilon$.

В газодинамическом приближении известно, что при $\sigma \rightarrow \infty$, $\rho_0 \rightarrow \infty$, а $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{2}{\gamma+1}$. Это позволяет установить

$$0 < \beta \leq 0,5, \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} C_0 \sim (\varepsilon_0 - \varepsilon)^{\gamma_1}, \quad \gamma_1 + \beta \leq 0,5, \\ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} g(\varepsilon, \sigma) \sim (\varepsilon_0 - \varepsilon)^{\gamma_2}, \quad \gamma_2 < 1 + \beta, \quad \max \mu_1 < A_0 = \text{const}.$$

Подставляя полученные выражения в (7), находим

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \left(C_0(\varepsilon, \sigma) - C^0 \frac{\varepsilon^\alpha}{(\varepsilon_0 - \varepsilon)^\beta} \cdot \frac{\mu_1}{1-\varepsilon} \right) - g(\varepsilon, \sigma) + C^0 \frac{\varepsilon^\alpha}{(\varepsilon_0 - \varepsilon)^\beta} \left[\sigma - \frac{\rho_0(\gamma-1)E}{1-\varepsilon} \right]. \quad (II)$$

Изучим сначала случай вязкоупругой среды. Уравнения, описывающие процесс, упрощаются и после преобразования имеют вид

$$\mathcal{D}_0 \varepsilon = V - V_1, \quad \sigma = \rho_0 \mathcal{D}_0^2 \varepsilon, \\ E - E_1 = \frac{\mathcal{D}_0^2 \varepsilon^2}{2}, \quad \frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{g(\varepsilon, \sigma(\varepsilon))}{\mathcal{D}_0 (\rho_0 \mathcal{D}_0^2 - C_0)}. \quad (I2)$$

В дальнейшем мы опираемся на метод, предложенный в [20, 21] и теорию дислокации [22, 23, 24]. Оба эти подхода позволяют построить модель упруго-вязко-пластического тела с учетом временных эффектов и влияния внутренних микроскопических процессов, проходящих в среде при ее деформировании.

Выберем функции $q(\xi, \zeta)$ и $C_0(\xi, \zeta)$, как предложено в работах [22, 23]:

$$\begin{aligned} q &= \frac{4}{3} E_0 b [N_0 + M \xi^p] V^* \varphi(\xi, \zeta), \\ \varphi &= \exp \left(- \frac{\mathfrak{D} - (1-\xi) H \xi^p}{\tau - H (\xi^p)^n} \right), \quad \tau = \frac{\zeta}{2}, \\ \xi^p &= \frac{4}{3} \left(\xi + \frac{\kappa_1}{E_0} \frac{\xi}{2} - \frac{\zeta}{E_0} \right), \quad C_0 = (E_0 + \kappa_1 \xi), \\ E_0 &= \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \alpha_0^2 = \frac{E_0}{\rho_0}. \end{aligned}$$

(α_0 — скорость распространения упругих волн), $0 \leq \xi \leq 1$.

Здесь $b, N_0, M, V^*, \mathfrak{D}, n, \lambda, \mu$ постоянные, численные значения которых для некоторого класса материалов приведены в [23].

Подставляя эти формулы в последнее уравнение системы (12) и упрощая полученное выражение, находим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} = L(\xi) &= \frac{V^* b \kappa_1 M}{2 E_0 M_0 \sqrt{E_0/\rho_0}} \cdot \frac{\varphi_1(\xi) \cdot \varphi_2(\xi)}{M_0^2 - 1 - \frac{\kappa_1}{E_0} \xi}, \\ \varphi_1 &= \xi^2 - \alpha_1 \xi + \alpha_2, \quad \varphi_2 = \exp \left(- \frac{\mathfrak{D} + \alpha_3 \xi (\xi - \alpha_1)}{E_0 M_0^2 \frac{\xi}{2} - \xi H \left[\frac{3}{8} \frac{\kappa_1}{E_0} \xi (\xi - \alpha_1) \right]^n} \right), \quad (13) \\ \alpha_1 &= \frac{2 E_0}{\kappa_1} (M_0^2 - 1), \quad \alpha_2 = \frac{8}{3} \frac{N_0 E_0}{M_0 \kappa_1}, \quad \alpha_3 = 3 H \kappa_1 (1 - \xi) / 8 E_0. \end{aligned}$$

Для простоты рассуждения положено $\zeta_1 = \xi_1 = 0$. Как легко видно, данное уравнение имеет три стационарные точки, в которых $\frac{d\xi}{dx} = 0$, с корнями

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2}, \quad \xi_3 = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2}}{2}$$

Учитывая интервалы изменения численных значений постоянных $H, N_0, M, E_0, \lambda, \mu$ и $n = 2m, m = 1, 2, \dots$ (см. [23]) устанавливаем, что $\xi_3 > \xi_2 > \xi_1$ при $M_0^2 > 1 + \frac{\kappa_1}{E_0} \xi_3$.

Интегрируя правые и левые части уравнения (13), получим

$$\int_0^{\xi_3} \frac{M_0^2 - 1 - \frac{\kappa_1}{E_0} \xi}{\varphi_1(\xi) \cdot \varphi_2(\xi)} d\xi = \frac{V^* b \kappa_1 M}{2 E_0 M_0 \sqrt{E_0/\rho_0}} x + \text{const}.$$

Анализируя подынтегральное выражение, устанавливаем, что значения $\xi = 0$ перед фронтом и $\xi = \xi_2$ за фронтом достигаются асимптотически на бесконечности ($x \rightarrow \pm\infty$), а в точке $\xi = \xi_2$ интеграл существует в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, график ударного перехода будет иметь двухволновую конфигурацию, а "ширина" зоны ударного перехода бесконечна, так как интеграл $\Delta \chi = \int_0^{\xi_2} h^{-1}(\xi) d\xi$ расходится.

В случае неголономных уравнений состояния проблема их аппроксимации может быть поставлена следующим образом: найти форму уравнений состояния, при которых система уравнений допускает решение с дифференциальными связями (обобщение волны Римана и волн Рахматулина в нелинейной упругости). Анализ, основанный на методе дифференциальных связей, позволил найти уравнения состояния, допускающие дифференциальные связи, и решить аналитически ряд краевых задач и задач Коши, в том числе задачу о распаде произвольного разрыва [25, 26, 27].

Для примера рассмотрим модель одномерных динамических процессов в сплошной среде. Систему уравнений движения и неразрывности

$$\vartheta_t = \frac{1}{\rho} \sigma_x, \quad \xi_t = \vartheta_x \quad (14)$$

можно замкнуть уравнением состояния, взятым формально в виде самого общего квазилинейного уравнения первого порядка

$$\tilde{Q}(\sigma, \vartheta, \xi) \sigma_t + \tilde{A}(\sigma, \vartheta, \xi) \xi_t + \tilde{B}(\sigma, \vartheta, \xi) \sigma_x + \tilde{H} \sigma_x + \tilde{C}(\sigma, \vartheta, \xi) = 0. \quad (15)$$

Предварительно от уравнения состояния можно требовать следующие математические свойства:

- 1) инвариантность уравнения состояния относительно преобразования Галилея (в эйлеровых координатах);
- 2) гиперболичность системы [14, 15];
- 3) равенство модулей тангенсов углов наклона двух характеристик разных семейств в точке пересечения и совпадение третьего семейства характеристик с траекториями частиц среды;

4) $\tilde{Q} \neq 0$ (уравнение состояния будет зависеть от скорости изменения напряжения).

Вследствие первого ограничения коэффициенты уравнения состояния не зависят от скорости и в силу четвертого его можно представить в виде

$$\sigma_t = A(\sigma, \varepsilon) \varepsilon_t + B(\sigma, \varepsilon) \varepsilon_{xx} + H(\sigma, \varepsilon) \sigma_{xx} + C(\sigma, \varepsilon). \quad (I6)$$

Второе ограничение означает, что в рассматриваемых сплошных средах динамические процессы обладают выделенными фронтами волн. Третье ограничение вытекает из требования равенства скоростей распространения малых возмущений в двух направлениях. Отсюда следует и вместо (I6) имеем

$$\sigma_t = \alpha(\sigma, \varepsilon) \varepsilon_t + C(\sigma, \varepsilon). \quad (I7)$$

Задача экспериментального определения функций $\alpha(\sigma, \varepsilon)$ и $C(\sigma, \varepsilon)$ является весьма сложной. Произвол в выборе функций $\alpha(\sigma, \varepsilon)$ и $C(\sigma, \varepsilon)$ можно сузить дополнительным требованием того, чтобы (I6), (I7) обладало и другими определенными математическими свойствами.

Пусть система уравнений (I), (4) обладает $\mathfrak{D}\mathfrak{H}$ - свойствами [26-29]. Упрощенно это свойство означает следующее. Когда уравнение состояния имеет вид $\sigma = f(\varepsilon)$ и в некоторых случаях при $C = 0$, система (I4), (I7) имеет инварианты Римана, которые представляют собой конечные соотношения между зависимыми переменными. Если инвариант Римана постоянный, то движение сплошной среды имеет частный характер и по установившейся терминологии [30] называется волной Римана или простой волной. Нахождение решения системы квазилинейных уравнений в случае простой волны сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что можно считать довольно таки простой задачей.

Неоднородная система квазилинейных уравнений в общем случае не

имеет инвариантов Римана. Для системы, обладающей $\Phi\Gamma$ - свойством, роль инвариантов Римана играют дифференциальные связи (26), которые представляют собой дополнительные дифференциальные уравнения относительно зависимых переменных (то есть, дифференциальные соотношения в отличие от инвариантов Римана, являющихся конечными соотношениями). В этом случае говорят, что совокупная система (переопределенная) полученная объединением исходной системы и дифференциальных связей, совместна. Если решение системы (I4), (I7) удовлетворяет двум дифференциальным связям, то оно обладает свойствами простых волн [26] и находится интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для системы, совместной с одной дифференциальной связью, задача интегрирования также несколько упрощается. В этом случае, например, для системы (I4), (I7) с постоянными коэффициентами строится общее решение [29, 31].

В нелинейном случае имеют место существенные упрощения. Прежде всего сужается произвол в выборе функций $\alpha(\zeta, \xi)$ и $\zeta(\zeta, \xi)$ в уравнении состояния (I7): они выражаются через функции с меньшим произволом (результат полного анализа сформулирован в [29, 31]). Имеет место также упрощение в задаче построения решений системы (I4), (I7).

На самом деле пусть система (I4), (I7) совместна с дифференциальной связью первого порядка, которую, как показывает анализ, [26, 29, 31], в самом общем случае можно брать в виде квазилинейного уравнения

$$\zeta_x = \delta(\zeta, \xi) \cdot \xi_t + \mathcal{F}(\zeta, \xi) \zeta_x + \mathcal{G}(\zeta, \xi) \quad (I8)$$

(функции δ , \mathcal{F} и \mathcal{G} выражаются через $\alpha(\zeta, \xi)$ и $\zeta(\zeta, \xi)$). Система уравнений (I7), (I8) представляют собой замкнутую систему уже только двух уравнений относительно двух зависимых переменных ζ , ξ (если из (I7), (I8) найти ζ и ξ , то v находится решением системы обыкновенных уравнений). В одном из случаев, кото-

рый здесь имеет место, $\xi = \xi(\varepsilon)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon)$ и $\mathcal{G} = 0$ система (I7), (I8) после преобразования годографа

$$t_{\varepsilon} = \vartheta_{\infty}, \quad \omega_{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\vartheta} t_{\varepsilon} + \frac{F}{\vartheta} t_{\nu}$$

сводится к одному линейному уравнению

$$t_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\vartheta} t_{\varepsilon\nu} - \frac{\mathcal{F}}{\vartheta} t_{\nu\nu} = 0$$

Оно в характеристических переменных

$$\lambda = \vartheta + \int \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{\vartheta}} d\varepsilon, \quad \mu = \vartheta - \int \sqrt{\frac{\mathcal{F}}{\vartheta}} d\varepsilon$$

имеет вид

$$t_{\lambda\mu} + \frac{\mathcal{F}'\sqrt{\vartheta}}{8\mathcal{F}^{3/2}} (t_{\mu} - t_{\lambda}) = 0 \quad (I9)$$

Для уравнения (I9) задача построения различных частных и приближенных численных решений существенно упрощается. Кроме того, здесь осталась одна функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varepsilon)$ одного аргумента, которая может быть найдена путем сопоставления физического эксперимента и решения соответствующей краевой задачи для системы (I4), (I7). После того, как $\mathcal{F}(\varepsilon)$ будет приближенно найдено, то дальнейшее уточнение уравнения состояния (при необходимости) можно вести, предполагая зависимость функций α или \mathcal{C} от \mathcal{G} , также путем сопоставления расчетов и экспериментов, но при этом надо будет опять-таки искать зависимость только одной функции от одного аргумента. В работах [29, 31] приводится пример нахождения уравнения состояния ($\alpha = \alpha(\varepsilon)$) для системы (I4), (I7), обладающей ДН-свойством. Там рассматривается задача о растяжении стержня из неупругого материала.

На самом деле здесь указана только одна из возможностей применения метода дифференциальных связей, который в настоящий момент является одним из довольно-таки общих методов выделения и построения отдельных классов решений систем уравнений в частных производных [26-32].

Наименее изученной является проблема замыкания для описания диссипативных процессов внутреннего трения (вязкие среды). Укажем

здесь только на наиболее парадоксальные эффекты знакопеременной или отрицательной вязкости. Экспериментально наблюдаемый эффект отрицательной вязкости заключается в том, что величина $\nu = -\overline{ru'v'}/\frac{\partial u}{\partial y}$, которую обычно определяют как коэффициент турбулентной вязкости, может менять знак. Другим проявлением отрицательной вязкости является перенос энергии от мелкомасштабной к крупномасштабной турбулентности. Величина ν и изменение ее знака могут толковаться неоднозначно в зависимости от используемой математической модели. Таким образом, критерий знакопеременной вязкости $\nu \geq 0$ не является инвариантным, и можно строго говорить о собственно коэффициенте вязкости и его применимости только в случае модели типа Навье-Стокса (или Рейнольдса), то выражение для ν уже не будет, вообще говоря, коэффициентом вязкости. В настоящее время в ИГиМ СО АН СССР идет интенсивное изучение математических моделей знакопеременной вязкости и их сопоставление с экспериментом [33, 34, 38]. В связи с этим следует сказать об уравнениях переменного типа.

В применении к уравнениям типа Навье-Стокса, Рейнольдса два основных класса уравнений переменного типа имеют вид (для простоты взяты одномерные уравнения):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

матрица A имеет комплексные корни, $B > 0$;

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

матрица A имеет вещественные корни, $B \geq 0$.

Более строго в последнем случае следует добавлять регуляризатор:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \varepsilon \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

либо

$$\left(E + \varepsilon \frac{\partial^4}{\partial x^4} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

где $\varepsilon > 0$.

Доказана корректность постановки этих задач. [30].

Указанный далеко не полный перечень проблем говорит о том, что предстоит большая теоретическая работа по созданию математических моделей сплошной среды, которая должна идти рука об руку с экспериментальным исследованием.

Пока ничего не говорилось о моделях многофазных сред, которые, будучи неоднородными, описываются, как правило, моделями, не выводимыми из первого принципа. Применение однородных аналитических моделей также затруднительно. Наиболее перспективными для этих сред можно считать модели, исходящие из понятия мезообъекта. Такие модели зачастую являются дискретными и, следовательно, могут рассматриваться как прямые численные алгоритмы, поэтому о них будет сказано ниже.

Перейдем к второму разделу вычислительной механики. В отличие от классических задач математической физики (по сути своей линейных), задачи механики сплошных сред являются существенно нелинейными и связаны, как правило, с большими деформациями среды, наличием переходных зон и других неоднородностей, возникновением неустойчивых режимов, сменой типа определяющих уравнений. Поэтому решение таких задач в равномерной сетке нецелесообразно и требуется строить сетку в соответствии с характером течения и деформации среды (адаптируемая сетка). Модель адаптируемой сетки в континуальной формулировке приводит к понятию информационной среды, движение которой управляется некоторым вариационным принципом. Соответствующий функционал зависит от движения материальной среды и может определяться различными способами. Наиболее строгой формулировкой вариационного принципа является требование минимизации ошибки решения при заданном числе аналитических единиц. Однако, такое требование повышает порядок уравнений Эйлера, вытекающих из функционала, и делает систему очень сложной. Поэтому зачастую ограничиваются требованием равномерной точности решения при заданном числе

аналитических единиц (в простейшем случае – числа точек). В результате для описания течения среды в подвижной сетке возникает система уравнений вида

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\partial \sum^{\infty} \mathbf{z}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}}{\partial x^{\infty}} = F,$$

где \mathbf{z} – вектор состояний двух сред – материальной и информационной. В случае уравнений газовой динамики имеем $\{\mathbf{z}\} = \{\bar{w}, \bar{v}\}$,

$$\bar{w} = \{\rho, T, u^1, u^2, u^3\}, \quad \bar{v} = \{v^1, v^2, v^3\}$$

где u^i – компонента скорости материального элемента среды, v^i – компонента скорости информационной среды [27, 35–37]. При изучении вязких течений управление сеткой производится на основе функционала, в который входят градиенты скоростей таким образом, чтобы сетка сгущалась в областях больших градиентов, в результате чего происходит автоматическое выделение зон быстрого перехода: ударных волн, включая висячие скачки, погранислоев, зон отрыва.

Большинство существующих разностных методов и методов конечных элементов успешно работают, когда течения среды устойчивы. Когда условия в потоке приближаются к критическим и начинает развиваться процесс неустойчивости, физико-математические модели, лежащие в основе схем, и сами схемы перестают работать. Требуются новые модели и новые схемы. В соответствии с этим будем различать два класса схем и задач: схемы для устойчивых течений, схемы для неустойчивых течений. Понятие устойчивого и неустойчивого течения зависит от выбора математической модели и критериев устойчивости. Модели осредненного турбулентного течения математически устойчивы, хотя описывают физически неустойчивый процесс. Поэтому особую трудность представляет описание процессов не чисто устойчивых или чисто неустойчивых, а процессов перехода – возникновение и развитие неустойчивости. Имеется принципиальное различие между схемами отмеченных двух классов. Хотя нельзя считать исчерпанной проблематику, связанную со схемами первого класса, но в этой области заложены

теоретические основы и созданы алгоритмы, предопределяющие их дальнейшее развитие. Основными нерешенными проблемами для схем первого класса следует считать: создание схем повышенной точности, автоматическое построение схем и сеток, модульный анализ и стыковка модулей, создание САПР для больших задач, а также доведение теоретических проблем до строгого уровня и общности теоретической математики (критерии устойчивости для нелинейных уравнений, метод дифференциальных приближений, метод дифференциального анализатора, метод дробных шагов, вариационно-разностные схемы и т.д.).

Конечно-разностные схемы сквозного счета являются одним из наиболее эффективных средств математического моделирования течений газа с разрывами. При использовании методов сквозного счета сильные разрывы "размазываются" на нескольких интервалах расчетной сетки, в связи с чем при практическом использовании указанных методов возникает ряд проблем, среди которых отметим следующие две: проблему интерпретации получаемых числовых результатов и проблему повышения точности численных решений в окрестности сильных разрывов. Проблема интерпретации включает в себя локализацию (то есть определение положения) различных особенностей в течениях газа и их классификацию (ударные волны, контактные разрывы и т.п.).

Один из известных способов локализации ударных волн в разностных решениях — дифференциальный анализатор — основан на определении точек максимума искусственной вязкости q [30]. В [39–42], по-видимому, впервые были рассмотрены вопросы точности локализации ударных волн в одномерных течениях с помощью дифференциальных анализаторов. Сначала был рассмотрен случай локализации фронта стационарной ударной волны по максимуму искусственной вязкости q ,

вводимой аддитивно в давление в соответствии с методикой, предложенной в 1950 г. Нейманом и Рихтмайером. Следуя [40], перейдем в систему координат, связанную с ударной волной, то есть будем предполагать, что решение зависит только от переменной $\omega' = \omega - \mathfrak{D}t$, где \mathfrak{D} — скорость стационарной ударной волны, ω — эйлера координата, t — время. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \varrho u' &= C_1 = m, & p + q + m u' &= C_2, \\ m \left[p / (\gamma - 1) + (u')^2 / 2 \right] + (p + q) u' &= C_3, \end{aligned} \quad (20)$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования, $u' = u - \mathfrak{D}$, u — скорость, p — давление газа, ϱ — плотность, γ — постоянная в уравнении состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1) \varrho \varepsilon, \quad (21)$$

где ε — удельная внутренняя энергия. Искусственная вязкость в (I) берется, как и в [36, 37] в виде

$$q = \begin{cases} F(h du/dx, h dp/dx, h d\varrho/dx, p, \varrho), & \frac{du}{dx} < 0, \\ 0, & \frac{du}{dx} \geq 0, \end{cases} \quad (22)$$

где h — шаг равномерной сетки на оси ω .

Штрихи при величинах ω и в (22) опущены для краткости. С помощью (20) можем найти выражения для v, p, ϱ, q в функции удельного объема $\vartheta = 1/\varrho$. Подставляя полученные выражения в формулу (22), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $\vartheta(x)$

$$\tilde{F}(\vartheta, h d\vartheta/dx) = q(\vartheta). \quad (23)$$

Пусть ϑ_1, ϑ_2 — значения удельного объема, соответственно, за фронтом и перед фронтом стационарной ударной волны. Поскольку ширина "размазывания" фронта разрыва в результате введения псевдовязкости (22) заранее неизвестна, для $\vartheta(x)$ используем следующие краевые условия

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \vartheta_1, & x \rightarrow -\infty, \\ \vartheta_2, & x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (24)$$

В [40, 41] показано, что при ряде ограничений на функцию F , входящую в (22), в решении задачи (23), (24) существует такая точка x_0 , в которой значение решения $v(x)$ не зависит от сеточного параметра h . Эта точка была названа центром размазанной ударной волны. Пусть X — толщина по Прандтлю зоны размазывания ударной волны, $X = O(h)$. Поскольку $X \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то разумно при исследовании точности различных способов локализации ударных волн использовать в качестве точки, характеризующей истинное положение фронта разрыва в зоне размазывания, введенный выше центр размазанной ударной волны. В [40–42] были исследованы с помощью указанного подхода некоторые известные искусственные вязкости q (квадратичная, линейная, комбинированная) и были найдены ограничения на безразмерные коэффициенты в этих вязкостях, при которых погрешность локализации фронта ударной волны по $\max(q)$ не превышает величины шага сетки h . Поскольку эффективное "размазывание" разрывов может быть достигнуто не только за счет введения искусственной вязкости, но и при подходящем выборе разностной аппроксимации исходных уравнений течения, был также рассмотрен вопрос о влиянии структуры аппроксимационной вязкости на существование центра размазанной ударной волны. Аналогично предыдущему, снова использовались решения типа бегущей волны, то есть решения, зависящие только от переменной $x' = x - \mathfrak{D}t$. В [40–43] рассматривался класс схем первого порядка точности, первое дифференциальное приближение (п.д.п.) которых имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(w)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(B(w, h, t) \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (25)$$

где $w = (\rho, \rho u, \rho(\varepsilon + u^2/2))^T$, B — некоторая квадратная матрица. Подставляя в (25) $w = w(x - \mathfrak{D}t)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\mathfrak{D}w + \varphi(w) + G = B(w, h, t) \cdot dw/dx', \quad (26)$$

где G — постоянный вектор. Аналогично (24) для решения

используем краевые условия

$$\mathcal{W}(x') = \begin{cases} W_1, & x' \longrightarrow -\infty, \\ W_2, & x' \longrightarrow +\infty, \end{cases} \quad (27)$$

где W_1 , W_2 - постоянные векторы, описывающие состояние газа, соответственно, за фронтом и перед фронтом ударной волны.

Вектор G определяется с учетом (27) в виде

$$G = \mathcal{D} \cdot W_1 - \varphi(W_1) = \mathcal{D} W_2 - \varphi(W_2).$$

В [40] были доказаны существование и единственность центра размазанной ударной волны для случая, когда в (26) $B(w, h, \xi) = \alpha(h, \xi) \cdot I$, где $\alpha > 0$, I - единичная матрица. Такую структуру имеет матрица B в системе (26), например, в случае схемы Лакса 1954 г. [41].

В [44-47] была предложена методика исследования точности дифференциальных анализаторов контактных разрывов для одномерных газодинамических течений. Основу этой методики составляют определение операции квазилинеаризации L первого дифференциального приближения разностной схемы и понятие K - согласованности п.д.п.

Разработанные алгоритмы дифференциальных анализаторов сильных разрывов нашли применение при решении ряда прикладных задач, см. [48-50].

Для схем второго класса пока еще не заложена основа; сделаны первые, хотя и многообещающие исследования. Прежде всего, здесь не хватает континуальных физико-математических моделей, описывающих неустойчивые и турбулентные течения. Пока развиваются дискретные модели, которые не опираются на континуальные модели первого принципа, а являются результатом полуконтинуального феноменологического подхода. Следует отметить в этой связи метод частиц в ячейках и родственные ему методы.

Первоначально этот метод зародился в задачах первого класса как средство описания контактной поверхности раздела двух сред и,

по существу, означал переход к задачам второго класса, т.к. граница приобретает нерегулярные очертания в результате развития неустойчивости течения в ее окрестности. Удовлетворительное описание неустойчивой и сильно деформирующейся границы достигалось благодаря расщеплению всего процесса изменения гидро-и термодинамического состояния на два этапа (чередующихся периодически с временным интервалом τ). На первом этапе учитываются только инерционные силы, движение каждого материального элемента происходит по инерции. На втором этапе происходит интегрирование системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих свободно-молекулярный поток, т.е. применяется подход Лиувилля. Производится пересчет плотности, импульса и энергии осреднением по частицам в ячейке, после чего определяются термодинамическое состояние и скорости частицы. Метод частиц означает не только расщепление по физическим процессам, но и использование совершенно различных подходов на каждом этапе: сеточно-полевой и Лиувилевский.

В дальнейшем метод частиц развивался в различных модификациях: маркеров, потоков, крупных частиц, материальных объемов с форм-фактором и т.д. Все эти методы характеризуются различным соотношением Лиувилевской и сеточно-полевой стадий. Положительной особенностью метода крупных частиц, разрабатываемого в СССР, является возможность использования экономичных разностных схем. Этот метод с успехом применялся к задачам аэродинамики [39]. В то же время аппроксимационная вязкость схемы крупных частиц может приводить к искусственной стабилизации неустойчивого течения. Численный анализ неустойчивости течения неизбежно связан с исследованием спектра малых возмущений или, по крайней мере, с определением его границ. Следовательно, решение задачи Коши для течения, теряющего устойчивость, должно идти одновременно с анализом спек-

тра. Последняя задача значительно более сложна, нежели исходная задача Коши. Поэтому второй класс задач значительно выше по трудности первого. Задачи второго класса для исследования устойчивости стационарного вязкого течения решаются сведением к уравнению Орра-Зоммерфельда и нахождением его спектра. Эволюция неустойчивого течения решается псевдоспектральным методом в работах Б.Л. Рождественского, С.Орсага и др.

Наиболее сложной задачей гидродинамической устойчивости является завершающий этап сильно нелинейной неустойчивости со стадией взрывной неустойчивости и дальнейшим переходом в область турбулентности. Турбулентность не сводится к максимально неустойчивому течению вязкой жидкости, описываемой уравнениями Навье-Стокса, и должна определяться новой моделью. Ведутся поиски континуальной модели; одновременно проверяются модели дискретных вихрей, которые позволяют наглядно представить распределение завихренности в пространстве и времени. Модель дискретных вихрей позволяет описывать развитие вихревых пелен при обтекании тел, а также явления слияния и дробления вихрей. Точнее говоря, дискретные вихри можно рассматривать как неразложимые и неуничтожаемые элементы, из которых складываются вихри крупномасштабные, а для них уже возможны как процессы создания так и распада. Модель подсеточной турбулентности описывает крупные вихри индивидуально, а мелкие — осредненно на основе континуальной стохастической модели.

До сих пор мы рассматривали разностные схемы для однородных сред, микроскопическое поведение которых описывается одним законом; как следствие, течение описывается одной континуальной моделью. Явления гидродинамической неустойчивости и фазовые переходы приводят к неоднородности среды и невозможности единого физического и аналитического описания. В этом случае образуются достаточно устойчивые конгломераты (кластеры) микрочастиц; будем на-

зывать их мезообъектами, т.к. они по своим размерам занимают промежуточное положение между макроскопическим масштабом и размером микрочастиц. Мезообъекты могут иметь различную физическую природу и структуру. Понятие мезообъекта позволяет единым образом представить разные неоднородные среды: упруго-пластические, многофазные, турбулентные. В случае турбулентной среды мезообъектом является вихрь – локальное мезотечение, которое не инвариантно и взаимодействует с другими мезотечениями, меняя форму, интенсивность завихренности, энергию, энтропию, массу.

Рассмотрим случай, когда неоднородная среда может быть представлена как некоторая однородная среда (основная фаза), в которой распределены конгломераты K_i другой однородной среды. Если размеры K_i малы сравнительно с размером ячейки Дирихле с центром в K_i , то этот конгломерат можно рассматривать как сингулярность, а ячейку Дирихле с приближенным аналитическим представлением решения – как сингулярный конечный элемент. Тогда к расчету многофазных течений можно применять метод сингулярных конечных элементов. Если размещение конгломератов K_i достаточно сконцентрированное, аналитическое решение в ячейке Дирихле довольно сложно. Тогда возможен другой подход. Рассмотрим тот же пример неоднородной среды, в которой основная фаза – газ, а конгломераты – твердые частицы. Покроем область интегрирования некоторой сеткой, которая расщепит ее на криволинейные каналы. По данному состоянию течения можно определить "пористость" твердой фазы в любом сечении, пересекающем любой канал. Тогда на первом этапе, рассматривая твердую фазу фиксированной, можно рассчитать по относительным скоростям течение газа в каналах методом распада разрыва. Затем по этому течению на втором этапе определяем ускорения частиц твердой фазы. В модели можно учесть также силы трения.

Остановимся теперь на третьем разделе вычислительной механики - математической технологии. К настоящему времени при решении на ЭВМ задач математической физики сложилась вполне определенная технологическая цепочка I : объект исследования \rightarrow физическая модель \rightarrow математическая модель \rightarrow численный алгоритм \rightarrow программа \rightarrow расчет на ЭВМ. Объектом математической технологии здесь является вычислительная часть этой цепочки: математическая модель \rightarrow \rightarrow численный алгоритм \rightarrow программа \rightarrow расчет на ЭВМ, которую в дальнейшем будем называть просто вычислительной цепочкой. Структура ее такова, что допускается цикличность как для всей цепочки в целом, так и между ее отдельными звеньями, т.е. является нелинейной. В силу этого основная задача математической технологии - оптимизация вычислительной цепочки - должна рассматриваться как задача глобальной оптимизации. Примером существенной нелинейности цепочки может служить влияние на ее структуру применения многопроцессорных ЭВМ. Действительно, их специфика приводит не только к определенному пересмотру численных алгоритмов, но и вносит в вычислительную цепочку новое звено - структуру ЭВМ, под которой здесь следует понимать совокупность технических и системных средств, допускающих взаимодействие с остальными звеньями цепочки. Тогда вычислительная цепочка приобретает вид: математическая модель \rightarrow \rightarrow численный алгоритм \rightarrow программа \rightarrow структура ЭВМ \rightarrow расчет. Практика вычислений позволяет утверждать, что структура алгоритма и программы выдвигают ряд требований, предъявляемых к структуре ЭВМ. Как следствие, может оказаться целесообразным создание специализированных вычислительных комплексов для решения задач математической физики. Так, например, в настоящее время уже назрела проблема создания процессоров и соответствующих структур оперативной и внешней памяти, специально приспособленных для работы с большими разреженными матрицами, столь часто встречающихся в зада-

цах математической физики, поскольку эффективность здесь универсальных ЭВМ крайне низка.

Появление многопроцессорных ЭВМ позволяет решить очень важную проблему — проблему сокращения существующего разрыва между требованиями по быстродействию, предъявляемыми к ЭВМ этими задачами и техническими возможностями существующих (однопроцессорных) ЭВМ. Так, по оценкам американских специалистов (см., также, [52]) для решения задач пространственного обтекания тел в широком диапазоне изменения числа Маха набегающего потока для детального учета структуры течения (ламинарный, переходный, турбулентный участки) требуется ЭВМ с быстродействием порядка 10^{10} операций в секунду. Очевидно, что вплотную подойти к решению таких задач можно только с помощью ЭВМ параллельного действия, имеющим достаточно большое число процессоров.

В связи с этим вопрос организации параллельных вычислений, затрагивающий все звенья вычислительной цепочки, приобретает сейчас принципиальное значение.

Построение пакета прикладных программ для класса задач математической физики начинается с модульного анализа вычислительного алгоритма [51, 53, 57]. Если в основу алгоритма положены методы расщепления по физическим процессам и пространственным переменным [58], то решение исходной задачи из рассматриваемого класса сводится к последовательному решению более простых задач [53]. Рассмотрение и учет условий, накладываемых на программную реализацию таких задач конкретной структурой ЭВМ, проведенное в работе [59] для задач аэродинамики привело к формированию понятия "простая задача". Она была определена как краевая задача с однородной физико-математической моделью, однородной разностной сеткой и целиком вкладывающаяся в однородную (оперативную) память ЭВМ. Проводя сегментацию области решения исходной задачи на ряд

подобластей, в каждой из которых определена простая задача, мы решаем одновременно проблему перераспределения памяти ЭВМ между ее неоднородными компонентами и получаем возможность организации параллельного решения задачи в целом. Для стыковки решения на сложных границах подобластей используется введенное в [57] понятие обменных краевых условий. Еще одно преимущество такого подхода заключается в том, что в рамках каждой простой задачи существенно облегчается задача построения хорошо обусловленной сетки, правда, появляется задача стыковки решения на разных сетках, но это уже отдельный, впрочем вполне разрешимый, вопрос.

Определенная выше простая задача может рассматриваться как определение модуля в смысле [53], сведение же конкретной задачи к последовательности таких "простых задач" является модульной декомпозицией задачи. Дать определение "простой задачи" вообще (как, впрочем, и модуля) пока не представляется возможным и поэтому мы попытаемся указать лишь общий способ ее определения для различных классов задач математической физики. Опыт решения больших задач показывает, что конечной устойчивостью (устойчивость при конкретных расчетах в отличие от теоретической; безаварийность) чаще всего обладают программы, реализующие однородные алгоритмы и математические модели в однородной информационной среде. Тогда наложением ряда независимых требований по однородности на рассматриваемый класс задач каких именно — определяется как самим классом задач, так и методами их решения и способами реализации) можно определить "простую задачу". Все конкретные задачи из этого класса будут представлены конкретной же совокупностью этих "простых задач", определенная последовательность решения которых и даст решение исходной задачи. Так, для задач механики сплошной среды "простая задача" должна удовлетворять следующим требованиям:

- I. Однородность математической модели.

Под этим требованием понимается единство структуры математического описания физической модели исследуемого явления. Если, например, для описания используется система дифференциальных уравнений, то она не должна менять своей структуры, т.е. набора определяющих членов в области определения "простой задачи". Тип ее может и меняться на решении или от решения к решению, лишь бы алгоритм решения был единым. Примером здесь может служить применение метода установления для решения стационарных уравнений Эйлера в газовой динамике. Однородность математической модели позволяет применять апробированные, конечно-устойчивые алгоритмы, существенно упрощает тестирование задачи в целом. Практически однородность модели достигается чаще всего применением метода расщепления по физическим процессам.

2. Однородность постановки задачи.

Включает в себя: а) однородность математической модели, б) алгоритмическую однородность начальных и краевых условий. Последнее означает, что заданный набор краевых условий не приводит к изменению алгоритма решения задачи. Сам этот набор, естественно, зависит от алгоритма. Например, для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в случае задач Дирихле и Неймана алгоритмы решения различны. Тогда в случае разнородных условий, когда на одной части границы области (γ) заданы условия $u|_{\gamma_1} = Q(\gamma_1)$, а на другой $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma_2} = b(\gamma_2)$, требованиям однородности можно удовлетворить, если применять алгоритм, допускающий единую реализацию условий вида $Q(\gamma)u + \beta(\gamma)\frac{\partial u}{\partial n} = q(\gamma)$, где $Q(\gamma)$, $\beta(\gamma)$ могут обращаться в нуль на γ или любой ее части.

3. Однородность алгоритма.

Здесь наряду с обычными, традиционными требованиями однородности, предъявляемыми к алгоритмам, само понятие однородности трактуется

в более широком аспекте. Прежде всего, сюда включено требование модельности алгоритма. Модельность алгоритма есть требование аппроксимации корректно поставленной континуальной задачи. Это означает, что алгоритм не должен содержать наборов различного рода малых параметров, не связанных с существом задачи и с дискретизацией континуальной модели, влияние которых на само решение трудно контролировать. Так, например, для нелинейных неявных разностных схем использование различного рода итераций по нелинейности может привести к потере модельности. В целом этот вопрос в настоящее время почти не исследован и конкретных рекомендаций практически нет. Другим важным требованием, связанным с модельностью и применением методов аналитического расщепления алгоритма, является требование одноступенчатости алгоритма. Это означает, что сам алгоритм решения "простой задачи" должен представлять собой последовательность простых, одноступенчатых, алгоритмов. В качестве примера можно указать на двухшаговые схемы типа предиктор-корректор (две ступени), на многошаговые методы типа Рунге-Кутты и ряд других. Такой одноступенчатый алгоритм уже не будет содержать, например, итераций по нелинейности. По отношению к нему они оказываются внешними, увеличивая лишь пошаговую дробность всего алгоритма в целом.

Расчетная схема тогда будет следующей. В каждой "простой задаче" одноступенчатый алгоритм продвигает решение на один шаг. Далее, если нужно, рассчитываются краевые условия и осуществляется стыковка решений на границах областей определения "простых задач" и процесс повторяется.

Таким образом, алгоритм решения "простой задачи" может быть только алгоритмом одного глобального шага.

4. Однородность информационной среды.

Под информационной средой в задачах математической физики здесь

понимается дискретное представление области определения задачи вместе с формальной структурой аналитического представления решения (способ дискретизации, шаблон, аппроксимация на этом шаблоне и т.д.). Информационная среда неотделима от метода решения и определяется самим методом. Так, в случае применения конечных разностных методов это будет разностная сетка, для конечного элемента – упорядоченное множество, определяемое способом триангуляции области решения и т.д. Требование однородности информационной среды заключается в том, чтобы в пределах "простой задачи" она не вносила элементов неоднородности в алгоритм решения. Например, это означает, что разностная сетка должна быть регулярной, т.е. переход от обработки одного ее узла к другому не должен приводить к перестройке алгоритма решения. Стыковка различных сеток, не согласованных между собой, должна осуществляться только на границах областей решения "простых задач".

Аналитическое представление решения также должно быть однородным, т.е. должно быть единство способа и порядка аппроксимации решения при переходе от континуального его представления к дискретному.

5. Однородность памяти.

Это есть требование вложения простой задачи в оперативную память ЭВМ. Тогда вопрос о перераспределении памяти ЭВМ между внешней и оперативной для всей задачи в целом решается путем сегментации области решения на подобласти таким образом, чтобы каждая из них была областью определения "простой задачи". Для стыковки решения между ними на границах этих подобластей используются обменные краевые условия [57].

6. Хорошая обусловленность.

Под этим требованием понимается, кроме обычного требования хорошей обусловленности краевой задачи, еще и требование определен-

ности областей изменения параметров однородного алгоритма, при которых гарантируется его надежная реализация на ЭВМ.

7. Функциональная и алгоритмическая полнота.

Это требование означает, что алгоритм, реализующий простую задачу, должен быть достаточно универсальным и должен включать в себя максимально возможное число произвольных параметров и функций, которые соответствуют свободным параметрам и функциям в исходной системе уравнений, начальных и краевых условиях, описаниях области решения. В частности, алгоритм должен быть рассчитан на его применение в достаточно произвольных областях и допускать достаточно произвольную сетку основным требованиям, предъявляемым и которой, является требование ее реальной невырожденности.

8. Автономность, неавтономность.

"Простая задача" называется автономной, если ее область определения совпадает с областью решения исходной задачи. Краевые условия для нее заданы, а ее решение не зависит от решения других "простых задач". Для больших задач математической физики эта ситуация является исключительной.

Как правило, область решения исходной задачи требуется сегментировать (см. п.4) и уже тогда для каждой "простой задачи", определенной на сегменте, на каждой соприкасающейся границе должны быть заданы краевые условия, обеспечивающие стыковку решений этих "простых задач". Такие краевые условия называются обменными [57, 59], а "простая задача" становится неавтономной, т.к. ее решение зависит от решения других "простых задач". Реализация обменных краевых условий определяется самим алгоритмом решения. Так, для конечно-разностных методов в случае явных схем это может быть просто переброска массивов, в случае неявных приходится рассматривать параметрические краевые условия и неавтономная "простая задача" должна уже решаться как параметрическая.

Рассмотрим теперь какую роль играет "простая задача" в организации параллельных вычислений в задачах математической физики. Прежде всего заметим, что при редукции исходной задачи к последовательности "простых задач" (модульная декомпозиция), как правило, возникает иерархическая структура. В этой структуре сегментация области решения приводит к стыковкам "простых задач" по пространству только через обменные краевые условия, что образует горизонтальный уровень. Требование однородности математической модели (обычно расщепление по физическим процессам) образует вертикальный уровень, когда строго последовательно решение одной "простой задачи" передается следующей в качестве входных значений. Нетрудно видеть, что горизонтальный уровень этой структуры естественным образом приспособлен для распараллеливания вычислений. Таким образом, модульная декомпозиция задачи по существу решает проблему распараллеливания вычислений. В качестве примера рассмотрим смешанную задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(Q_m(\xi) \frac{\partial u}{\partial x_m} \right), \quad Q_m(\xi) > 0, \quad (28)$$

$$u(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathcal{D}, \quad u(\xi', t) = \psi(\xi', t), \quad \xi' \in \mathcal{I}.$$

Для простоты положим $\bar{\mathcal{D}} = \{0 \leq x_m \leq 1\}$, тогда $\mathcal{I} = \bar{\mathcal{D}} - \mathcal{D}$. Пусть далее $\tau > 0$, $N_m h_m = 1$ (обозначения см. в [60]). В случае применения здесь явной разностной схемы можно, например, провести сегментацию области $\bar{\mathcal{D}}$ на прямоугольные подобласти $\bar{\mathcal{D}}_i$ ($\bigcup \bar{\mathcal{D}}_i = \bar{\mathcal{D}}$) и определить на $\bar{\mathcal{D}}_i$ простую задачу:

$$u_{i,j}^{n+1} = (E + \tau(\lambda_1 + \lambda_2)) u_{i,j}^n,$$

причем на границах \mathcal{I}_i будут определены обычные и (или) обменные краевые условия. Для реализации последних достаточно ввести примыкающие к границам фиктивные узлы разностной сетки и организовать переброску в них значений искомой функции из соседних под областей. Однако гораздо целесообразнее воспользоваться расщепле-

нием по пространственным переменным

$$u_{i,j}^{n+1/2} = (E + \tau \Lambda_1) u_{i,j}^n; \quad (29)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = (E + \tau \Lambda_2) u_{i,j}^{n+1/2}. \quad (30)$$

Тогда простой задачей в \bar{D}_i будет решение одномерного уравнения теплопроводности. Реализация обменных краевых условий здесь существенно проще, а при переходе от (29) к (30) достаточно выполнить только операцию транспонирования. Распараллеливание здесь очевидное: в (29) счет по индексу i можно выполнять одновременно для всех j , а в (30) наоборот. Кроме того, внутри простой задачи также допускается распараллеливание, дробность которого ограничена только шаблоном разностной схемы. Такая приспособленность явных схем к распараллеливанию породила ряд необоснованных высказываний об усилении их роли в связи с появлением многопроцессорных ЭВМ. Однако это совершенно не так. Еще в работе 1965 г. Г.И.Марчука и Н.Н.Яненко [58] было указано на возможность параллельной реализации неявных схем расщепления. Это высказывание позднее было повторено Д.Дугласом в дискуссии по большим компьютерам. Покажем, как для (28) организовать распараллеливание в случае применения неявных схем.

Будем использовать неявную схему расщепления с весами

$$(E - \tau \alpha \Lambda_1) u_{i,j}^{n+1/2} = (E + \tau \beta \Lambda_1) u_{i,j}^n, \quad (31)$$

$$u_{i,j}^{n+1/2}|_{x=0,1} = (E - \tau \Lambda_2) \psi^{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2 - 1,$$

$$(E - \tau \gamma \Lambda_2) u_{i,j}^{n+1/2} = (E + \tau \delta \Lambda_2) u_{i,j}^{n+1/2},$$

$$u_{i,j}^{n+1}|_{x=0,1} = \psi^{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1. \quad (32)$$

Здесь, как и прежде, (31), (32) есть простые задачи, допускающие параллельный счет по j в (31) и по i в (32). При сегментации на \bar{D}_i реализация обменных краевых условий осуществляется с помощью параметрической прогонки [61, 62]. Кроме того, имеется возможность распараллеливания вычислений и в самой простой задаче путем распараллеливания прогонки [61]. Ряд других

примеров, подтверждающих эффективность применения неявных схем при распараллеливании вычислений, приведен в работе [63].

Рассмотрим теперь связь между структурой алгоритмов решения задач механики сплошной среды и структурой современных ЭВМ, на которой они должны быть наиболее эффективно реализованы.

Производительность современных многопроцессорных ЭВМ, позволяющих за счет параллельных вычислений достигать скоростей сотен миллионов операций в секунду (ILLIAC - IV, STAR - 100, CRAY - I и др.) существенно зависит от класса решаемых задач и алгоритмов их решения. Так, скорости вычислений на "удобных" и "неудобных" задачах могут отличаться в десятки и даже сотни раз [64], что свидетельствует о наличии сильной связи между структурой алгоритма и задачи (но не программы!) и структурой ЭВМ. Выходом здесь может быть создание узкоспециализированных ЭВМ, как это предложено, например, в [65] для решения уравнений Навье-Стокса, но тогда потребуется очень широкий спектр таких машин, массовое производство которых, по крайней мере в настоящее время, невозможно из-за их высокой стоимости. Тем не менее успехи современной микроэлектроники позволяют надеяться на создание мощных многопроцессорных ЭВМ, структура которых может подстраиваться под структуру алгоритмов конкретных задач [66]. Все это говорит о том, что в настоящее время уже назрела необходимость проведения структурного анализа не только самих задач, решаемых на ЭВМ, но и всех основных звеньев технологической вычислительной цепочки. Конечным результатом такого анализа должна быть формулировка требований, предъявляемых к структуре ЭВМ тем или иным классом задач, что является уже по сути переходом к глобальной оптимизации всей нелинейной технологической вычислительной цепочки. Покажем, как можно осуществить подобное структурирование задач механики сплошной среды на основе введенного выше понятия "простой задачи".

Этап постановки задачи. Здесь "простая задача" определяется как задача с однородной физической и математической моделью. Однородность физической модели обычно достигается разбиением области, в которой исследуется сложное физическое явление, на подобласти с однородными физическими процессами. Связь между этими подобластями осуществляется через соответствующие краевые условия. Например, в задачах аэродинамики при обтекании затупленных тел сверхзвуковым стационарным потоком газа (рис. 9) можно выделить ряд таких подобластей с вязким (пограничный

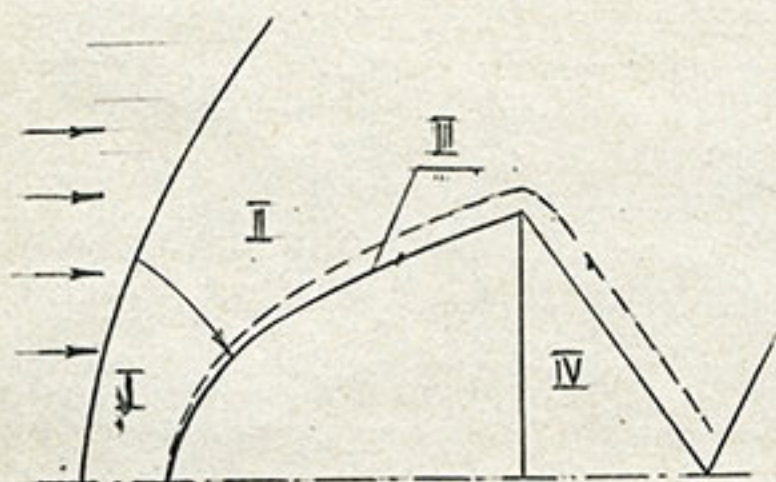


Рис. 9.

слой (III), течение в ближнем следе (IV)) и невязким (области I, II) течениями, для стыковки которых используются только граничные условия. Следует отметить, что разбиение на такие подобласти является традиционным подходом в механике сплошной среды. Однако тот факт, что к нему же приводит и модульный анализ задачи

придает этому подходу вполне определенную методологическую основу.

Однородность математической модели есть единство структуры математического и алгоритмического описания и достигается обычно применением метода расщепления по физическим процессам. Единство структуры состоит в том, что система дифференциальных уравнений, например, не должна менять своих определяющих членов в области определения "простой задачи", хотя тип ее может и меняться на решении или от решения к решению. Однако в любом случае алгоритм решения должен быть единым. На рис. 9 в областях дозвукового (I)

и сверхзвукового (II) течений определены разные "простые задачи", когда алгоритмы их решения различны. Но если для расчета течения используется метод установления, то тогда "простая задача" будет определена уже на совокупности этих областей. Таким образом, уже на этапе постановки задачи модульная декомпозиция позволяет не только структурировать исходную задачу, но и определить связи между отдельными структурными элементами, на основе которых для них могут быть построены графы по управлению и информации.

Э т а п о п и с а н и я а л г о р и т м а. Алгоритм решения "простой задачи" должен удовлетворять следующим требованиям однородности: однородность математической модели и краевых условий, однородность информационной среды (однородность разностной сетки, шаблона, способа аппроксимации на нем и так далее), однородность самого алгоритма (пошаговость, модельность, одноступенчатость). Кроме всего этого алгоритм должен допускать реализацию обменных краевых условий, с помощью которых осуществляется стыковка решений неавтономных "простых задач". Напомним, что неавтономной называется "простая задача", областью определения которой является часть области определения исходной задачи (сегмент). Тогда на соприкасающихся границах соседних сегментов и задаются обменные краевые условия, обеспечивающие стыковку решений "простых задач".

С помощью сегментации обычно и удается удовлетворить требованиям однородности, например, тогда, когда в области решения исходной задачи применяются разные сетки, разные алгоритмы и тому подобное. Однако сегментацию можно применять и в самой простой задаче, что позволяет организовать в ней параллельные вычисления. Алгоритм решения "простой задачи", удовлетворяющий описанным выше требованиям однородности, всегда допускает расщепление по пространственным переменным, что позволяет эффективно решать многомерные задачи механики сплошной среды на многопроцессорных ЭВМ в случае

как явных, так и неявных разностных схем.

Этап программирования. Для программной реализации на ЭВМ "простой задачи" существенное значение имеет требование однородности памяти, т.е. вложения "простой задачи" в оперативную память ЭВМ. Тогда вопросы перераспределения памяти ЭВМ между оперативной и внешней и организации параллельных вычислений, когда в оперативной памяти могут находиться одновременно несколько "простых задач", решаются путем сегментации области решения исходной задачи.

Программная реализация "простых задач" дает набор программных объектов (базисных модулей), имеющих вполне определенные наборы входных и выходных величин и наборы входов и выходов по управлению, что и составляет основу модульного программирования. Внутри "простой задачи" на уровне ее программной реализации возможно и дальнейшее структурирование [67, 68], но это уже будет структурирование программ, не затрагивающее алгоритмическую структуру задачи в целом, и нами здесь не рассматривается.

Описанный выше принцип модульной докомпозиции задач механики сплошной среды приводит к следующей иерархической структуре (рис. 10). На этапе постановки исходная задача приводится к опре-

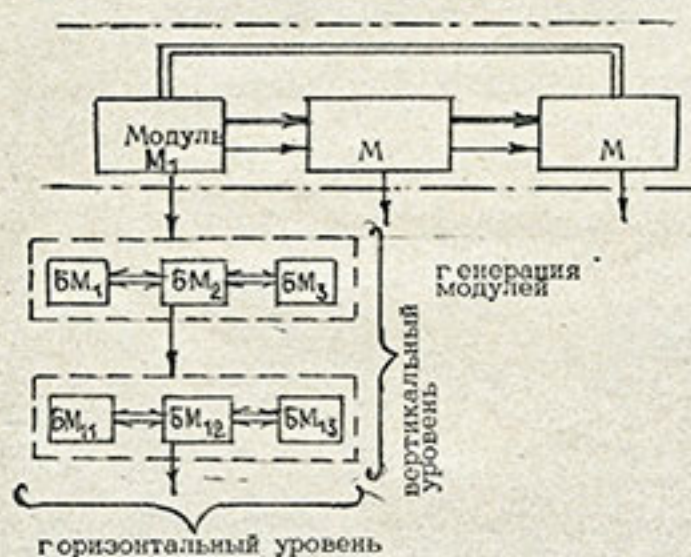


РИС. 10

деленной совокупности однородных физических задач, связанных между собой только через краевые условия. Такие однородные задачи будем называть модулями, а реализацию связей между ними по управлению и информации — сборкой модулей. Каждый модуль, в свою очередь, строится (генерируется) из базисных модулей (БМ),

т.е. "простых задач", образующих два уровня – вертикальный (расщепление по физическим процессам), когда ЭМ работают строго последовательно, и горизонтальный, возникающий при сегментации области определения модуля. На этом уровне связь между ЭМ осуществляется только через обменные краевые условия, что позволяет им работать параллельно. Такая структура, в частности, положена в основу модульной системы СПРУТ [69], [70] и "ИСТОК" [71], предназначенной для решения прикладных задач газовой динамики.

Рассмотрим теперь, каким образом в рамках этой иерархической структуры могут быть организованы параллельные вычисления и какая структура ЭВМ может быть здесь наиболее эффективной. На уровне сборки модулей их параллельное исполнение возможно, но оно является нерегулярным, так как определяется в основном графом информационных связей между модулями. В пределах самого модуля распараллеливание всегда возможно на каждом из горизонтальных уровней и именно здесь, особенно в случае многомерных задач, применение многопроцессорных ЭВМ дает наибольший эффект. Действительно, сегментация на "простые задачи" образует первый уровень распараллеливания. Далее, внутри каждой "простой задачи" однородность алгоритма и однородность вычислительной среды позволяют путем расщепления по пространственным переменным сводить многомерные задачи к совокупности одномерных. Возможность их независимого решения образует второй, внутренний уровень распараллеливания.

Теперь о структуре самой ЭВМ. В настоящее время наиболее быстродействующие многопроцессорные ЭВМ имеют, в основном, два типа синхронных процессоров – матричный (ILLIAC-IV) и векторный (STAR-100, CRAI-1). Если под эффективностью понимать степень загрузки, то использование матричного процессора, управляемого одним потоком команд, для описанной модульной структуры неэффективно, по крайней мере, по двум причинам. Во-первых, круг "удобных" задач

(алгоритмов) механики сплошной среды, где его эффективность наибольшая, ограничен, в основном, классом сравнительно простых явных разностных схем. Во-вторых, использование расщепления по пространственным переменным переводит его в режим работы векторного процессора, причем эффективность работы существенно зависит от соотношения длины вектора входных величин и числа элементарных процессоров, входящих в состав матричного процессора. Эффективность векторного процессора, построенного на конвейерном принципе [72] (STAR - 100, CRAY - I), практически не зависит от длины вектора, что дает ему значительное преимущество перед матричным для данной модульной структуры. Однако один векторный процессор не позволяет реализовать распараллеливание на горизонтальном уровне.

В итоге, ЭВМ должна иметь набор универсальных асинхронных центральных процессоров (ЦП) и набор векторных процессоров (ВП), причем между ЦП и ВП нет жестких связей, т.е. каждый ЦП может запускать один или несколько любых ВП.

Функциональная схема такой ЭВМ приведена на рис. II. Монитор задачи анализирует межмодульные управляющий и информационный графы и определяет, какие модули могут выполняться параллельно. Каждый такой модуль обрабатывается своим ЦП. Далее, в самом модуле

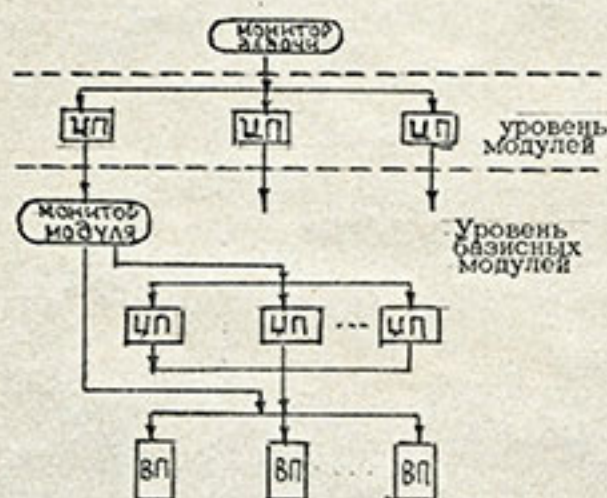


Рис. II

также имеется свой монитор, реализующий распараллеливание на горизонтальном уровне для базисных модулей. Как правило, здесь используется набор ЦП, обслуживающих первый уровень внутримодульного распараллеливания, и набор ВП для второго уровня распараллеливания. Однако возможен и выход ЦП модуля непосредственно на ВП.

Все процессоры работают на общую оперативную память, объем которой должен позволять разместить в ней как можно больше БМ модуля (желательно, все). Это позволяет упростить реализацию и ускорить счет обменных краевых условий, а также выполнение операций транспонирования, связанных с применением расщепления по пространственным переменным.

Остановимся еще на вопросах эффективности алгоритмов и принципах их декомпозиции для современных ЭВМ. Понятия алгоритма и его эффективности существенно изменились в связи с расширением области математического моделирования и усложнением структуры ЭВМ.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением алгоритмов, возникающих при моделировании задач механики сплошной среды, хотя многое из нашего рассмотрения имеет общее значение. Такой выбор объясняется тем, что модели механики сплошной среды имеют единый системный подход, основанный на применении законов сохранения, замыкающих соотношений, возможности представления полного процесса как совокупности процессов, замены взаимодействия примыкающих областей через краевые условия и т.д.

1. Реальный вычислительный алгоритм. Вычислительный алгоритм, реализуемый на ЭВМ (реальный вычислительный алгоритм, р-в.а) состоит из двух частей:

- i) аналитический алгоритм (А.А)
- ii) кибернетический алгоритм (К.А)

А.А есть совокупность арифметических, алгебраических, символьных операций, выполняемых в определенном порядке на логических элементах ЭВМ, что иногда приводит к потере информации (например, вследствие ошибок округления для арифметических операций). Кибернетический алгоритм включает в себя только операции переноса информации (численной, алгебраической или символьной), осуществляе-

мые в элементах и функциональных устройствах ЭВМ и в коммуникациях между ними. Сюда же следует отнести организацию логических перестроек функциональных устройств ЭВМ и связей между ними. Все эти операции не несут потери информации. Пока ЭВМ были медленными, а их структура простой, качество (эффективность) реального вычислительного алгоритма оценивалось целиком или в основном по качеству аналитического алгоритма. В частности, время на переносы не учитывалось. Кибернетический алгоритм был скрыт в реальной программе для ЭВМ и проявлялся только в командных кодах ЭВМ. С ростом быстродействия ЭВМ относительная доля времени исполнения операций переноса растет и при сложной структуре задачи и ЭВМ может иметь решающее значение для оценки алгоритма. Таким образом, качество алгоритма уже будет определяться в зависимости не только от структуры А.А., но и от структуры программы, архитектуры ЭВМ и способа реализации А.А в данной структуре ЭВМ. Все настоятельнее становится необходимость согласования указанных компонент вычислительного процесса.

2. **Общая структура алгоритма.** Для больших задач механики сплошной среды общепринятой является модульная структура алгоритма. Алгоритм, описывающий эволюцию или состояние сложной физической системы, разбивается на части, соответствующие частям физической системы (декомпозиция системы на подсистемы и алгоритма на модули). Декомпозиция может быть согласованной, когда примыканию подсистемы отвечает примыкание областей определения модулей и частично согласованной, когда примыкание областей модулей происходит с перекрытием. Модули стыкуются между собой с помощью комплексирующего модуля, или модуля стыковки. Этот способ мы будем называть способом физической декомпозиции. Существует другой способ построения модульной структуры. Алгоритм, описывающий всю систему,

отображается методами конечно-разностной или конечно-элементной аппроксимации на систему уравнений линейной алгебры с большим количеством неизвестных (глобальная алгебраическая система). Последняя подразделяется на совокупность более простых систем, которые решаются раздельно (последовательно либо параллельно), а затем объединяются в общее решение (синтез малых задач в большую) с помощью стыковочного модуля. Второй способ будем называть алгебраической д е к о м п о з и ц и е й. Этот подход формально является более общим, однако алгебраическая декомпозиция значительно менее наглядна, нежели декомпозиция алгоритма, связанная с декомпозицией физической системы. Кроме того, важной задачей аппроксимации процесса является построение адекватной сетки и аналитического представления в ячейке сетки с тем, чтобы получить нужную структуру матрицы глобальной алгебраической системы.

Здесь мы приходим к важной задаче конструирования матриц задач линейной алгебры через конструирование алгоритма, к построению информационной среды. Для облегчения синтеза глобального алгоритма необходимо, чтобы его модули были однородны по своей структуре и размерность базиса модулей была невелика.

3. П р о с т о й м о д у л ь. В работах [73.-75] были даны определения базиса модулей, простого (однородного) модуля, автономного (неавтономного) модуля, локального алгоритма, глобального алгоритма. П р о с т ы м м о д у л е м называется программа, реализующая А.А., обладающий следующими качествами:

1. Устойчивость алгоритма и контролируемость числа обусловленности встречающихся матриц,

- Контролируемые аппроксимация и точность алгоритма,
- Однородность алгоритма,
- Однородность информационной среды (криволинейная регулярная

разностная сетка, регулярная триангуляция),

Согласованность физической и аналитической моделей: алгоритм является аппроксимацией некоторой краевой задачи Коши или ее оператором шага,

Компактность: программа и входные данные отображаются в некоторую подобласть Ω оперативной (однородной) памяти и в процессе исполнения используют только область Ω .

Полнота: входные данные модуля являются дискретными представлениями произвольных функций заданного класса. Данное свойство придает модулю адаптивность, особенно важную при стыковке в большой программе или при перенесении их из одной большой программы в другую.

Возможность реализации простого модуля в виде автономного либо неавтономного модуля [79]. В случае автономного модуля (напомним, что модуль есть по сути реализация оператора шага $(n+1) \mathcal{T}$) все входные данные $I_n(M_i)$ определяются по входным данным задачи и по выходным данным $O_n(M_i)$ того же модуля на предыдущем шаге и не требуют данных от других модулей M_j ($j \neq i$). При наличии неавтономных модулей $\{M_i\}$ возникает необходимость переработки данных или обмена с другими модулями или даже со всеми модулями $\{M_\alpha\}$. Обмен и переработка данных производятся с помощью стыковочного модуля, который из простых (локальных) алгоритмов воссоздает глобальный алгоритм. Заметим, что понятие простого модуля означает, в основном, однородность и контролируемость алгоритма, но не означает неразложимость модуля.

Введем в рассмотрение ряд обозначений и символов, связанных с модулем

m_i - континуальная модель для модуля M_i ,

d_i - дискретная модель для модуля M_i ,

n_i - сетка, соответствующая модулю M_i ,

- Ω_i - область (массивы) начальных данных M_i ,
 ω_i - данные, присоединяемые к Ω_i для осуществления стыковки в явном модуле,
 $\bar{\Omega}_i = \Omega_i + \omega_i$
 Ψ_i - массив выходных коэффициентов,
 Z_i - массив краевых условий, соответствующий оператору шага (либо задаче Коши) модуля M_i ,
 Y_i - массив неопределенных краевых условий $\{\alpha\}$, соответствующий неавтономному модулю M_i ,
 \bar{Y}_i - расширение Y_i , необходимое для определения $\{\alpha\}$ модуля M_i ,
 $\{\bar{Y}_i\}$ - массив модуля стыковки, соответствующий подлежащим определению краевым условиям системы модулей $\{M_i\}$,
 W_i - массив данных ассоциированных с модулем M_i и необходимых для его расчета.

Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
 W_i &= \Omega_i + \Psi_i + Z_i, & (\text{автономный модуль}) \\
 W_i &= \Omega_i + \Psi_i + Y_i, & (\text{неавтономный модуль}) \\
 W_i &= \bar{\Omega}_i + \Psi_i & (\text{неавтономный явный модуль})
 \end{aligned}$$

В целом M_i следует рассматривать как функцию от массивов Ω_i , Ψ_i , Y_i , т.е. $M_i = M_i(\Omega_i, \Psi_i, Y_i)$. При фиксированных данных Ψ_i , Y_i автономный модуль M_i осуществляет свою функцию оператора шага и его следует рассматривать как функцию от Ω_i , т.е. $M_i(\Omega_i)$.

Введем понятие каркасного модуля. Естественным образом понятие каркасного модуля возникает в теории разностных схем. Пусть в исходных координатах (эйлеровых, лагранжевых или каких-либо иных) построена схема с постоянными коэффициентами (каркасная схема). Тогда при преобразовании системы координат она переходит в схему с переменными коэффициентами, которая может рассматриваться как

полученная из каркасной замены переменных и переносом массивов. Каркасная схема, таким образом, представляет собой прообраз схем, принадлежащих некоторому классу. Каркасный прообраз полностью определяет тип краевой задачи. Тогда каркасный модуль есть некоторый модуль $M(\Psi)$ со стандартным массивом Ψ , сопоставленный системе модулей $\{M_i\}$ таким образом, чтобы матрицы $M_i\{\Psi_i\}$ были эквивалентны матрице M . Это символически можно записать в виде

$$M_i(\Psi_i) = M(\Psi_i), \quad T(\Psi_i \rightarrow \Psi) M(\Psi),$$

где $M(\Psi)$ - каркасный модуль, $T(\Psi_i \rightarrow \Psi) = T_i(\Psi_i)$ - модуль переноса. Если рассматривать, более общим образом, модуль как функцию модели и сетки

$$M_i = M_i(m_i, d_i, n_i, \Omega_i, \Psi_i),$$

то можно говорить о каркасном модуле в обобщенном смысле. В этом случае можно положить

$$M_i = M(m, d, n, \Psi), \quad \Pi(m \rightarrow m_i; d \rightarrow d_i; n \rightarrow n_i; \Psi_i \rightarrow \Psi),$$

где Π - оператор преобразования, который содержит в себе, в частности, оператор аналитического преобразования массивов m_i , n_i , d_i , Ψ_i и оператор переноса $T(m \rightarrow m_i; d \rightarrow d_i; n \rightarrow n_i; \Psi \rightarrow \Psi_i)$. При анализе эффективности простого автономного алгоритма на скалярной ЭВМ основную роль играет число операций на точку в операторе шага.

Введем в рассмотрение функцию числа арифметических операций $\varphi(N)$ в операторе шага модуля, содержащего N точек.

Определение. Если $\varphi(N) \leq \text{const} \cdot N$, где const не зависит от N , то схема локально экономична (экономична на операторе шага). Если

$$\varphi(N) \leq \text{const} \cdot \frac{N \cdot t}{\tau_\alpha},$$

где τ_α - максимально допустимый по точности шаг, то схему можно назвать глобально экономичной или эффективной (экономичной на

операторе решения).

Замечание. Здесь мы рассматриваем эффективность на фиксированной сетке. Если допускать преобразование сетки, то можно повысить очень сильно эффективность за счет увеличения τ_s , τ_a , (где τ_s - шаг, максимально допустимый по устойчивости).

Если m_2 - число операций на точку в неявной схеме, а m_1 - соответственно в явной и τ - шаг неявной схемы, τ_1 - явной, то при условии, что величина τ_2 отвечает требованиям точности, неявная схема предпочтительна, если

$$\tau_2/\tau_1 > m_2/m_1.$$

Возможность получения эффективных простых автономных алгоритмов подтверждается следующим утверждением:

существует декомпозиция многомерной неявной схемы - в виде расщепления по направлениям - на произведение одномерных неявных абсолютно устойчивых эффективных схем. Для широких классов уравнений и схем указанное утверждение доказано и, следовательно, для них существуют эффективные многомерные простые модули. Более того, возможна дальнейшая декомпозиция одномерного неявного эффективно-го модуля на совокупность многих одномерных же простых модулей, например, на основе параметрической прогонки [61].

Замечание. Не всякое расщепление по направлениям приводит к декомпозиции на чисто одномерные задачи. Так, при расщеплении уравнения второго порядка со смешанными пространственными производными последние берутся на нижнем слое и дробно-шаговые модули в смысле массивов не являются одномерными. Здесь возможна полная декомпозиция на одномерные массивы следующими способами:

- введением прогонок по диагоналям,
- интерполяцией смешанных производных через их значения на трех смежных линиях.

Если после интерполяции применять полное расщепление, то по-

лучим дробно-шаговые модули чисто одномерные, но не обязательно корректные, с компенсацией ошибки на дробных шагах. Оператор интерполяции может рассматриваться как одномерный дробно-шаговый модуль или как модуль стыковки в случае полного расщепления на одномерные операторы.

4. Г л о б а л ь н ы й а л г о р и т м. Теперь мы переходим к реальному вычислительному процессу и реальным модулям. В случае глобального алгоритма, представляющего собой композицию простых (локальных) неавтономных модулей, эффективность алгоритма определяется значительно сложнее и сильно зависит от архитектуры ЭВМ, структуры модульной системы и стыкуемого модуля, в частности.

Остановимся на относительной эффективности явных и неявных схем для глобальных алгоритмов. В случае явных схем стыковочный модуль заключается в присоединении к области Ω_i интегрирования i -го простого модуля M_i и окаймляющей полосы ω_i , взятой из массивов Ω_{ij} соседних модулей M_j на тот же момент времени. Это осуществляется путем переноса информации из соответствующего массива памяти и расчета решения, исходя из расширенной области $\bar{\Omega}_i = \Omega_i + \omega_i$. Такой метод композиции можно толковать в рамках примыкания. При этом замечательной особенностью модуля стыковки явных алгоритмов является неизменность аналитического алгоритма при усложнении кибернетического. Таким образом, дополнительные потери информации стыковочный модуль не несет и является по существу кибернетическим. Следует также отметить большую гибкость глобального алгоритма в смысле декомпозиции алгоритма вообще и в выборе областей Ω_i простых модулей, в частности. Отрицательной особенностью явных схем является ужесточение критерия устойчивости при композиции стыкуемых модулей. Для больших областей интегрирования Ω , требующих декомпозицию на простые модули критерий устойчивости может стать очень жестким. Так,

для задач вязкого обтекания при высоких числах Re в решении появляются очень большие градиенты. Из требования равномерной точности следует измельчение пространственной сетки в пограничном слое и шаг по времени $\tau_1 = \tau_1(h_{min})$, допускаемый условием устойчивости может стать очень мелким и явная схема оказывается глобально неэкономичной (неэффективной). Условия устойчивости в значительно меньшей степени ограничивают (или даже совсем не ограничивают) неявную схему, но алгоритм стыковки много сложнее, нежели у явной схемы. Более того, он может влиять на аналитический алгоритм вследствие итераций, интерполяций, необходимости решать систему уравнений, связанную с алгоритмом стыковки. Аналитический алгоритм может потерять при этом характер полугруппового алгоритма вследствие дополнительных внутренних итераций по нелинейности. (Заметим, что при синтезе модулей перекрытием алгоритм, как правило, теряет характер полугруппового как для неявных, так и для явных схем. Однако во многих типичных случаях, когда возможно применение полного расщепления по направлениям, модуль стыковки сводится к стандартной операции транспонирования прямоугольной матрицы или к алгебраической прогонке [79] .

Эффективность неявных алгоритмов повышается и достигает максимума для однородной модульной структуры.

5. О д н о р о д н а я м о д у л ь н а я с и с т е м а. Программа, обладающая хорошей модульной структурой, хорошо реализуется и на ЭВМ параллельного действия. Особенно это проявляется в случае однородной модульной структуры.

Определение. Совокупность однородных простых модулей $M_1(N_1)$, $M_2(N_2)$, ..., $M_p(N_p)$ (N_i — число точек в модуле M_i), модулей обмена информации E_1, \dots, E_p , модулей настройки T_1, \dots, T_p (определяют i -тый модуль M_i из каркасного модуля M путем задания конкретных коэффициентных функций $M_i = T_i M$)

составляет однородную модульную структуру, если

$$1) \quad N_1 = N_2 = \dots = N_p,$$

2) Аппроксимируемые модели и схемы в модулях M_i тождественны с точностью до коэффициентных функций,

3) Сетки тождественны с точностью до функции распределения точек

4) Совокупность модулей обмена $\{E_i\}$ и настройки $\{T_i\}$ каждая в отдельности представляет собой однородные системы. В случае скалярного процессора шаг вычислительного процесса сводится к циклу:

$$\begin{aligned} & (M_1, E_1) (M_2, E_2) \dots (M_p, E_p) = \\ & = (M, T_1, E_1) (M, T_2, E_2) \dots (M, T_p, E_p) = \\ & = M (T_1, E_1) M (T_2, E_2) \dots M (T_p, E_p), \end{aligned}$$

который имеет характер однооператорного цикла с различными массивами входных данных на каждом переходе цикла. В случае ЭВМ параллельного действия этот цикл реализуется параллельным исполнением модулей $M_1 \dots M_p$ в режиме SIMD. В случае неравных N_i ($i=1 \dots p$) программное исполнение модулей неизменно, но входные параметры меняются. В этом случае необходима гомогенизация структуры модулей. В ряде случаев она может быть осуществлена, например, методом фиктивных областей (MFO).

6. Гомогенизация неоднородных структур модулей. В случае модельно-неоднородной структуры модулей гомогенизация достигается при наличии накрывающей модели, т.е. модели, которая порождает, как частный случай, модели, лежащие в основе простых модулей. Примером этого является система уравнений Навье-Стокса, которая дает как частные случаи модели идеального газа, пограничного слоя и отрывных течений. При этом совокупность однородных моделей, лежащих в основе простых модулей, оказывается уже неоднородной и может быть гомогенизирована лишь в

том случае, если она (совокупность) аппроксимируется накрывающей (универсальной) моделью. На ней и реализуется однородная структура. При этом число операций (время счета) может и увеличиться, однако модульная структура становится однородной, число базовых модулей уменьшается, структура программы упрощается. Следует ожидать, что увеличение быстродействия машин повлечет за собой уменьшение моделей, уменьшение базиса модулей и упрощение программирования. В случае структуры параметрически неоднородной (например, одномерные массивы с различным количеством точек) есть различные подходы гомогенизации. Так, метод фиктивных областей (МФО) позволяет дополнить произвольную область Ω до прямоугольной Π и аппроксимировать неоднородную структуру $M_i(\Omega_i, A_i, N_i)$ и однородной структурой $M_i(\Omega_i(N), A_i)$, где $\Omega_i(N)$ — равномошные эквивалентные области интегрирования, а алгоритм A_i , соответствующий простому модулю M_i , представляется в виде

$$A_i = A \cdot B_i,$$

где B_i — оператор настройки модуля, A — каркасный модуль, единый для всех простых модулей. Коэффициентные функции в МФО являются сингулярными и не содержат нелинейные разветвления. Нелинейные разветвления, снижающие коэффициент параллелизма, могут быть исключены заменой (аппроксимацией) алгоритма с разветвлением алгоритмом без таковых.

Так, схема Леттера, более предпочтительная с точки зрения расчета волн сжатия и волн разрежения, может быть заменена однородной схемой Неймана. Разветвления, остающиеся в линеаризованном алгоритме, могут выйти в однородный аналитический алгоритм, как дополнительные — логические — функции. Таким образом, может быть получен однородный смешанный аналитически-логический алгоритм.

Пример:

а) неоднородный алгоритм для уравнения переноса

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \alpha_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} = 0, \quad \text{если} \quad \alpha_i^n < 0,$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \alpha_i^n \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = 0, \quad \text{если} \quad \alpha_i^n \geq 0.$$

б) однородный алгоритм

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - \frac{|\alpha_i^n| + \alpha_i^n}{2} \cdot \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} + \frac{|\alpha_i^n| - \alpha_i^n}{2} \cdot \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = 0.$$

Указанные приемы гомогенизации не исчерпывают всех возможностей и задачей теории эффективных алгоритмов для ЭВМ параллельного действия остается эффективная гомогенизация. Это позволяет уменьшить число базисных модулей, увеличить коэффициент параллелизма, уменьшить число перестроек в структуре ЭВМ (перестройка векторных операторов в рекуррентных соотношениях, реализуемых в режиме chaining). Можно говорить об однородности модульной структуры и аналитического алгоритма в рамках одной размерности. Таким образом, можно говорить об однородной структуре модулей только в классе модулей одной размерности. Особое место занимают модули, реализующие краевые условия и отличные по размерности (сравнительно с основными модулями, относящимися к операторам определенных на внутренних многообразиях). При всем разнообразии краевых условий можно представить оператор шага (итерации) как произведение оператора первой краевой задачи на оператор пересчета граничных условий меньшей размерности [80]. Это позволяет стандартизовать краевую задачу, вынеся ее своеобразие в оператор пересчета краевых условий. Это также уменьшает число базисных модулей, хотя как правило, нереализуемо в режиме SIMD. Упрощению модульной структуры, уменьшению базиса модулей, повышению эффективности способствует также использование подвижной сетки (информационной среды). Умелое использование подвижной сетки уменьшает число подобластей Ω_i в декомпозиции глобального алгоритма. Подвижная (сгущающаяся) сетка, адаптирующая

щаяся к решению, позволяет автоматически выделять особенности потока типа ударные волны контактные полосы, пограничные слои, зоны обратного течения и т.д., а также особые точки.

7. Э ф ф е к т и в н о с т ь г л о б а л ь н о г о а л г о р и т м а. Наличие операторов обмена усложняет глобальный алгоритм. Поэтому желательна минимизация обмена. Оптимальная минимизация возможна в методе расщепления по направлениям в случае, когда модули становятся автономными, а оператор переноса сводится к транспонированию матрицы данных. Однако такой оптимум возможен только в частных, хотя и типичных случаях, например, когда дифференциальный оператор содержит только чистые производные по координатным осям. В общем случае, помимо оператора транспонирования, следует ввести модуль обмена между соседними модулями на основе оператора интерполяции, связывающего смешанные производные с чистыми. В этом случае возможен и другой подход. Оператор интерполяции можно рассматривать как явную схему и тогда он сводится к оператору шага вычислительной явной схемы, который может быть реализован гибкой декомпозицией. Идея реализации метода расщепления по направлениям в ЭВМ параллельного действия была высказана в работе [81]. В 70-80 годах на Западе стало общепринятым адаптация архитектуры суперкомпьютеров к методам переменных направлений. Более общим образом можно говорить о реализации метода дробных шагов (МДШ) на ЭВМ параллельного действия. Необходима тщательная классификация и оценка эффективности МДШ на ЭВМ параллельного действия. Эконометрика глобального алгоритма, в частности, для МДШ находится на стадии качественных оценок. Однако уже сейчас возможны общие и надежные качественные оценки и сравнения различных типов и схем МДШ. При распараллеливании алгоритма на ЭВМ параллельного действия схемы МДШ алгебраически

(аналитически) эквивалентные реализуются различными реальными вычислительными алгоритмами, с различной кибернетической частью, отличными модульными структурами. Так, ³⁸ для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad m = 2, 3$$

схемы продольно-поперечной прогонки (п.п.п.) и расщепления с весами аналитически эквивалентны [80] для $m = 2$ и аналитически не эквивалентны для $m = 3$ (схема п.п.п. условно устойчива, схема расщепления с весами абсолютно устойчива). Однако их реализация уже при $m = 2$ неэквивалентна. В случае п.п.п. модуль стыковки состоит, помимо оператора прекоммутации глобальной матрицы, из модуля обмена между тремя соседними одномерными модулями, в случае расщепления этот модуль обмена отсутствует. И в том, и в другом случае на каждом дробном шаге имеем однородные структуры модулей, тождественные - в каждом алгоритме - для дробных шагов. Алгоритм п.п.п. был реализован в ЭВМ ADINA [82]. Ясно, что соответствующий алгоритм расщепления более эффективен и имеет большой коэффициент параллелизма. Оба алгоритма реализуются в режиме SIMD. Схема стабилизирующей поправки реализуется на дробных шагах различными схемами и, следовательно, не укладывается в режим SIMD. Примеры и более общие соображения приводят к выводу, что схемы расщепления являются наиболее эффективными с точки зрения реального вычислительного алгоритма, достигая минимума обмена данными, максимальные однородность и простоту программы. Отдельные, но очень важные, примеры показывают, что соотношение эффективности между явными и неявными алгоритмами в классе полного расщепления по направлениям сохраняется для ЭВМ с N параллельными процессорами, где $N \times N$ есть размерность глобальной матрицы. При этом ускорение счета достигается в $K \cdot N$ раз, где K - коэффициент параллелизма. Даже в случае п.п.п. он близок к единице. Каждый из

N процессоров может представлять собой связку элементарных процессоров, работающих в режиме *pipe line* и *chaining* (конвейер и зацепление), образуя, таким образом, функциональное устройство, реализующее векторное рекуррентное соотношение. Так как реализация одномерной неявной схемы для уравнений механики сплошной среды осуществляется с помощью векторных прогонок, то каждой из них может быть применено существенное ускорение за счет *pipe line* и *chaining*. Можно дать аналитическую оценку степени параллелизма для МДШ. Пусть m_1 — число этапов в выполнении операций над числом (асимптотический коэффициент параллелизма в *pipe line*), m_2 — выигрыш в скорости в связке (асимптотический коэффициент параллелизма в *chaining*). Тогда выигрыш в быстродействии при зацепленных операциях над векторными аргументами равен $m \approx m_1 \cdot m_2$. Если число параллельно действующих связок равно N_2 (где N_2 — число строк), то выигрыш в быстродействии на первом дробном шаге (направление α_1) равен $m \cdot N_2$. Проигрыш в быстродействии на первом дробном шаге у неявной схемы по сравнению с явной равен $1/M$, где M — порядок числа итераций в обращении матрицы компонент вектора. Так как M не зависит от N_1 , то неявный одномерный модуль, реализуемый на связке процессоров, является (асимптотически при $N_1 \rightarrow \infty$) эффективным. При переходе от одного дробного шага к другому меняется координатная ось (α_1 на α_2) прогонки, что производится с помощью перекоммутации $N_1 \times N_2$ матрицы (аналогично обстоит дело в трехмерном случае). Один из способов перекоммутации с помощью буферной памяти и специальной переключательной сети предложен в работе [82]. При скалярных прогонках время на перекоммутацию невелико, а коэффициент "к" параллелизма близок к единице. Система связок векторных процессоров может приобрести характер эррэйного (array) процессора с еще большим выигрышем в быстродействии. Для этого каждый процессор подразделяется на сегменты (микропроцессоры),

связка процессоров соответственно сегментируется на связку микропроцессоров, которые, наряду с арифметическими, могут осуществлять алгебраические операции.

К связке должен быть подключен процессор, осуществляющий стыковку. Если p — число точек в сегменте, N/p — число сегментов, то ускорение за счет сегментации связок процессоров пропорционально числу сегментов N/p и тогда общее ускорение пропорционально общему числу микропроцессоров и выражается числом:

$$K \frac{N^2}{p \cdot m},$$

где K — некоторая константа, не зависящая от N , p , m и выражающая потерю времени на алгебраическую прогонку и стыковочный модуль. Таким образом, асимптотически соотношение между явными и неявными схемами сохраняется.

Эти оценки справедливы не только для эррэйного компьютера, но и с поправленной мультипликативной константой для реального компьютера параллельного действия. В такой форме компьютер имеет, по существу, эррэйную структуру на $\sim N \times N$ элементарных процессоров и имеет $K \sim 1$. Аналогичную архитектуру можно построить для трехмерных задач с более сложной коммутационной сетью для переброски массивов данных [82].

Таким образом, стало общепризнанным, что производительность ЭВМ до 10 миллиардов операций в секунду и память в несколько миллионов слов может быть достигнута в основном за счет новой архитектуры ЭВМ. Это приведет к бурному развитию вычислительной механики, а, следовательно, и будут решены новые принципиальные задачи техники, которые позволят сократить большие капитальные затраты при создании натуральных образцов новой техники.

Л и т е р а т у р а

1. N.N.Yanenko, Y.N.Grigorrev. Hamiltonian vortex models in the theory of turbulence. Arch. Mech., 34, N 5-6, p. 621-631. (1982)
2. Н.Н.Яненко, Ю.Н.Григорьев и др. Неравновесная статистическая механика систем точечных вихрей в идеальной жидкости и ее приложения к моделированию турбулентности. Пр. № 22-82 ИТПМ, 1982.
3. Яненко Н.Н. Приближенные формулы для давления и внутренней энергии газа в обобщенной статистической модели атома Томаса-Ферми. - ДАН СССР, 1956, т.109, № 5, с.916-918.
4. Березин Ю.А., Дмитриева О.Е., Яненко Н.Н. Расчет моделей нейтронных звезд с тонкой конденсацией. - Письма в АЖ, 1982, т.8, № 2, с.86-89.
5. Борисов А.А., Борисов Ал.А. Ударная волна разрежения вблизи критической точки жидкость - пар. - Препринт № 59-80, ИТФ СО АН СССР, Новосибирск, 1980, с.16.
6. Гадияк Г.В., Обрехт М.С., Яненко Н.Н. Численное моделирование атома в сверхсильном магнитном поле. - ЧММСС, 1980, т.II, № 3, с.27-46.
7. Гадияк Г.В., Обрехт М.С., Яненко Н.Н. Уравнение состояния А-е фазы коры пульсара с учетом действия сверхсильного магнитного поля. - Астрофизика, 1981, т.I7, № 4, с.777-786.
8. Gadiyak G.V., Lozovik Yu.E., Mashchenko A.I., Obrecht M.S. The spectrum and dipole and quadrupole moments of hydrogelike and helium-like ions superstrong fields. J.Phys.B, 1982, v.15, N 16, p 2615-2626.
9. Гадияк Г.В. Исследование электронных и энергетических свойств поверхностных слоев и нарушений решетки твердого тела. - Диссертация, Новосибирск, 1984.
10. Rozsnyai F. Balazs. Relativistic Hartree-Fock-Slater calculations for arbitrary temperature and matter density. Phys.Rev. A.1972, v.5, N 3, p.1137-1149..
11. Гадияк Г.В., Чернов С.В., Яненко Н.Н. Кластерная модель для построения уравнения состояния кристаллического тела при изотропном сжатии. - ЧММСС, 1980, т.II, № 6, с.36-45.
12. Гадияк Г.В., Чернов С.В. О влиянии чисел заполнения одноэлек-

- тронных уровней при расчете уравнения состояния сжатого вещества. - ЧММСС, 1980, т.II, № 7, с.40-43.
13. Киржниц Д.А., Шпатаковская Г.В. ЖЭТФ, 1974, т.66, с.1828.
 14. Чернов С.В. Кривые холодного сжатия L_i и A_0 . - В сб.: Физическая механика неоднородных сред. Новосибирск, ИТПМ, 1984.
 15. Воропилов А.И., Гандельман Г.М., Подвальный В.Г. Электронные энергетические спектры и уравнения состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. - УФН, 1970, т.100, в.2, с.193-224.
 16. Березин Ю.А., Дмитриева О.Е., Яненко Н.Н. Нестационарные процессы в нейтронных звездах. - Препринт ИТПМ № 15-81, Новосибирск
 17. Berezin Yu.A. Dmitrieva O.E., Yanenko N.N.. Modeling of gas-dynamic processes in neutron stars with Phase transitions.- Lecture Notes in Physics, 1982, N170, p.138-142.
 18. Березин Ю.А., Дмитриева О.Е., Муканова Б.Г., Яненко Н.Н. Моделирование газодинамических процессов в нейтронном веществе. - Препринт ИТПМ № 24-82, Новосибирск.
 19. Яненко Н.Н., Гулидов А.И., Фомин В.М. Структура волн сжатия в неупругих средах. - Изв. АН СССР: Механика твердого тела, 1975, № 5, с.92-98.
 20. Фомин В.М., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Д-свойства систем одномерных уравнений динамики неупругой сплошной среды. ДАН СССР, 215, 5, 1974.
 21. Фомин В.М., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Применение метода дифференциальных связей к построению замкнутых математических моделей, описывающих одномерные динамические процессы в сплошной среде. ЧММСС, 4, 3, Новосибирск, 1973.
 22. Гилман Д.Ж. Динамика дислокаций и динамическая текучесть. Сб. переведен, Механика, 1970, 2. (J. Appl. Mech. Rev. 21, 8, 1968, p.767 -783
 23. Kuriyama S. Kamata K. Propagation of stress wave with plastic deformation in metal obeying the constitutive equation of the Johnston-Gilman type. J. Appl. Phys. 44, N8, p.3445 -3454.
 24. Нигматулин Р.И., Холин Н.Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования, МТТ, 4, 131-146, 1974.

25. Мелешко С.В., Шапеев В.П. Приложение ДП - решений к задаче о распаде произвольного разрыва в неупругой сплошной среде. - ЧММСС, 1979, т.10, № 6, с.85-96.
26. Мелешко С.В., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и задача о распаде произвольного разрыва. - ДАН СССР, 1980, т.254, № 4, с.796-798.
27. Fomin V.M., Schapreev V.P., Yanenko N.N. Modeling of continuum mechanics problems with large deformations. - Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng. 1982, v.32., p.157-197.
28. Яненко Н.Н. Теория совместности и методы интегрирования систем нелинейных уравнений в частных производных. - В кн.: Труды IV Всесоюзного матем. съезда. Ленинград, Наука, 1964, т.2, с.247-259.
29. Фомин В.М., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Д-свойства систем одномерных уравнений динамики неупругой сплошной среды. - ДАН СССР, 1974, т.215, № 5, с.1067-1070.
30. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - М., Наука, 1978, с.687.
31. Фомин В.М., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Применение метода дифференциальных связей к построению замкнутых математических моделей, описывающих одномерные динамические процессы в сплошной среде. - В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1973, т.4, № 3, с.39-48.
32. Распопов В.Е., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Д-свойства системы уравнений симметричных течений газа. - ДАН СССР, 1979, т.244, № 2, с.308-311.
33. Berezin Yu.A. Dudnikova G.I. Novikov V.A., Yanenko N.N., Analytical and numerical studies of equations with signchanging viscosity, - Lecture Notes in Mathematics, 1977, N594, p.30-38.
34. Yanenko N.N., Kurbatski A.F. J.Fluid Mech., 1983, v. 130. p. 453-462.
35. Яненко Н.Н., Мещеряков Ю.П., Шапеев В.П. О решении нестационарных задач газовой динамики в подвижных сетках. - ЧММСС, 1981, т.12, № 1, с.131-140.

36. Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток. - ЧММСС, 1977, т.8, № 4, с.157-163.
37. Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О методе подвижных координат в газовой динамике. - В кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики. М., Наука, 1977, с.107-115.
38. Яненко Н.Н., Ларькин Н.А., Новиков В.А. Нелинейные уравнения переменного типа. Изд-во "Наука" СО, 1983.
39. Белоперковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод "крупных частиц". М., Наука, 1983.
40. Яненко Н.Н., Ворожцов Е.В., Фомин В.М. Дифференциальные анализаторы ударных волн. - Докл. АН СССР, 1976, т.227, № 1, с.50-53.
41. Fomin V.M. Vorozhtsov E.V. and Yanenko N.N. Differential analysers of shock waves theory. Computers and Fluids, 1976, v. 4, N 3/4, p. 171-183.
42. Ворожцов Е.В., Фомин В.М., Яненко Н.Н. Дифференциальные анализаторы ударных волн. Приложения теории. - Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1976, т.7, № 6, с.8-23.
43. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On some algorithms for shock wave recognition by shock-capturing computational results. Computers and Fluids, 1980, v.8, N 3, p.313-326.
44. Яненко Н.Н., Ворожцов Е.В. К теории дифференциальных анализаторов контактных разрывов. - Докл. АН СССР, 1979, т.247, № 1, с.48-52.
45. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. On the theory of differential analysers of contact discontinuities in one-dimensional flows. - Computers and Fluids, 1981, v.9, N 1, p. 1-32.
46. Yanenko N.N., Vorozhtsov E.V. Differential analysers of - strong discontinuities in one- dimensional gas flow.- Compytat. Technigues in Transient and Turbalent Flow. Swansea, Pineridga Press, 1981, p.59-96.
47. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. Одномерная теория контактной полосы. Новосибирск, препринт ИТПМ СО АН СССР, 1981, № 45, с.47.

48. Yanenko N.N., Kroshko E.A., Fomin V.M.

Methods for the constction of moving for problems of fluid dynamics with big deformations. Lechure Notes in Physics, 1976, N 59, p. 454-459.

49. Яненко Н.Н., Фомин В.М., Ворожцов Е.В. Дифференциальные анализаторы ударных волн в схемах сквозного счета задач газодинамики. Новосибирск, препринт ИТПМ СО АН СССР, 1978, № 7, с.19.

50. Fomin V.M., Fedorov A.V. and Yanenko N.N. A.Differential analyzer for discontinuities of solutions of Nonhomogeneous hyperbolic Equations. Soviet Math. Dokl. 1980, v.22, N 2, p.416.

51. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н. Технологические аспекты численных методов математической физики. Acta Universitatis Carolinal, Mathematica of Physica, 1974, N 1-2, p.47-53.

(51)
52. Софронов И.Д. Оценка параметров вычислительной машины, предназначенной для решения задач механики сплошной среды. Сб. "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1975, т.6, № 3.

53. Коновалов А.Н., Яненко Н.Н. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды. Сб. "Комплексы программ математической физики", Новосибирск, 1972, с.48-54.

54. Коновалов А.Н. Модульный анализ вычислительного алгоритма в задаче планового вытеснения нефти водой. Труды III Семинара по комплексам программ математической физики, Новосибирск, 1973, с.81-94.

55. Коновалов А.Н. О принципах построения пакета программ для решения задач математической физики. Acta Politechnica, Práce CVUT, Praze, ved.- 1975, IV, p. 37-49.

56. Коновалов А.Н., Карначук В.И. О пакете прикладных программ математической физики. - Структура и организация пакетов программ. Международная конференция (тезисы докладов) "Мециниереба", Тбилиси, 1976, с.51-52.

57. Яненко Н.Н., Карначук В.И., Коновалов А.Н. Проблемы математической технологии. Сб. "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1977, т.8, № 3, с.129-157.

58. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск. Изд. СО Наука, 1970г.
59. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Некоторые проблемы развития пакетов программ для решения задач аэродинамики. Сб. "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1979, т.10, № 3, с.89-99.
60. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.
61. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В. Об организации параллельных вычислений и "распараллеливание" прогонки. Сб. "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1978, т.9, № 7.
62. Воеводин А.Ф. Метод прогонки для разностных уравнений, определенных на комплексе, ЖВМ и МФ, 1973, т.13, № 2, с.494-497.
63. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н. Некоторые вопросы теории модульного анализа и параллельного программирования для задач математической физики и механики сплошной среды. Сб. "Современные проблемы математической физики и вычислительной математики", изд-во МГУ, 1979.
64. Королев Л.Н. Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение. М., Наука, 1978.
65. Gritton E.C. et al. Feasibility of a Special-Purpose Computer to solve the Navier-Stokes Equations. RAND Corp. R- 2183-RC. 1978, p. 74.
66. Каляев А.В. Многопроцессорные системы с распределенной памятью, универсальной коммутацией и программируемой структурой. Электронное моделирование, 1979, № 1, с.8-13.
67. Дал У., Дейкстра Э., Хоор К. Структурное программирование. М., Мир, 1975.
68. Dennis J.B. Modularity.- Lecture Notes in Computer Science. 1975, N 3, p. 128-182.
69. Лымарев А.П., Рычков А.Д., Яненко Н.Н. Опытная версия модульной системы для решения прикладных задач газовой динамики. - В сб.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск, Б.и., 1978, с.59-65.
70. Лымарев А.П., Рычков А.Д., Яненко Н.Н. Об одной реализации мо-

73. дульной системы для решения прикладных задач газовой динамики. - В сб.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск, Б.и., 1980, с.46-59.

71. Яненко Н.Н., Фомин В.М. и др. Современное состояние, пути дальнейшего развития разработки пакетов и архитектура системы "ИС-ТОК" для организации, эксплуатации пакетов прикладных программ. Сб. Принципы организации пакетов прикладных программ ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1981, с.3-80.
72. Жиров В.Ф. Математическое обеспечение и проектирование структур ЭВМ. М., Наука, 1979.
73. Коновалов А.Н., Яненко Н.Н. Модульный принцип построения программ как основа создания пакета прикладных программ решения задач механики сплошной среды. В кн.: Комплексы программ математической физики. Новосибирск, 1972.
74. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н. Технологические аспекты численных методов математической физики.
75. Яненко Н.Н., Карначук В.И., Коновалов А.Н. Проблемы математической технологии. В кн. "Численные методы механики сплошной среды". Новосибирск, т.8, № 3, 1977.
76. Яненко Н.Н. Вопросы модульного анализа и параллельных вычислений в задачах математической физики. В кн. "Параллельное программирование и высокопроизводительные системы". Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, т.1, 1980.
77. Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В. Об организации параллельных вычислений и распараллеливание прогонки. В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, т.9, № 7, 1978.
78. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск, "Наука", 1981.
79. Погодин Ю.А., Сучков В.А., Яненко Н.Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики. Докл. АН СССР, т.119, № 3, 1958.
80. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, Наука, 1967.
81. Марчук Г.И., Яненко Н.Н. Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики. Докл. на конгр. ИФИП, Нью-Йорк, май 1965 (см. в кн. "Некоторые вопросы

53 прикл. и вычисл. матем.", Новосибирск, 1966.

82. Tatsuo Nogi. ADINA Computer I and II. Reprinted from the
Memorias of the Faculty of Engineering, Kyoto University,
vol. XLIII. Part 3, July, 1981.