

АКАДЕМИЯ НАУК СССР- СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Н. Н. ЯНЕНКО

МЕТОД ДРОБНЫХ ШАГОВ
РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ
ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»- СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК-1967

Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Н. Н. Я н е н к о, 1967, стр. 197.—

В монографии описывается новый метод численного интегрирования дифференциальных уравнений математической физики — так называемый метод дробных шагов, который получил бурное развитие в вычислительной математике за последние десять лет как эффективное средство решения сложных многомерных задач математической физики.

В книге дается единое освещение разностных схем с дробными шагами с точки зрения методов расщепления и приближенной факторизации разностных схем и операторов, разработанных советскими математиками. Эти методы, заключающиеся в сведении сложной краевой задачи к последовательному решению краевых задач более простой структуры, позволяют строить простые гибкие, экономичные разностные схемы.

В книге приведены многочисленные примеры применения экономичных схем для решения задач гидродинамики, упругости, теории переноса и т. д.

Книга будет полезна для научных сотрудников, инженеров, математиков-вычислителей, занимающихся численным решением задач математической физики и исследованием корректной математической постановки этих задач.

Книга может служить также учебным пособием для студентов и аспирантов вузов, специализирующихся по вычислительной математике, математической физике и механике сплошной среды.

Илл. 15, библиограф. 100.

Предметом настоящей книги является «метод дробных шагов», который возник несколько лет тому назад и получил бурное развитие как метод построения экономичных разностных схем.

Метод дробных шагов позволил решить задачи, которые были не под силу обычным разностным схемам — схемам простой аппроксимации, где при переходе от одного временного слоя к другому одновременно удовлетворяются условия устойчивости и аппроксимации. Это приводит к большей простоте формул, однако схема становится менее гибкой, обладает меньшим числом произвольных параметров и, тем самым, не может удовлетворять всем требованиям, которые предъявляются к схемам. В противовес этому метод дробных шагов, расчлняя переход от нижнего слоя к верхнему на ряд промежуточных этапов и не требуя на каждом этапе обязательного выполнения свойств аппроксимации исходного уравнения и устойчивости, имеет в своем распоряжении набор параметров, что делает возможным выбор экономичной и точной схемы.

Метод дробных шагов явился ответом на реальную потребность, возникшую в вычислительной математике — потребность создания простых экономичных схем решения сложных многомерных задач математической физики.

Начиная с отправной работы Писмэна, Рэкфорда и Дугласа (1955), метод расширялся и углублялся в работах американских и советских ученых: Дугласа, Рэкфорда, Бэйкера, Олифанта, К.А. Багриновского и С.К. Годунова, Е.Г. Дьяконова, Г.И. Марчука, А.А. Самарского и других.

В настоящее время метод дробных шагов является неотъемлемым элементом построения схем при решении сложных многомерных задач математической физики. Несмотря на то, что метод дробных шагов продолжает развиваться и не получил еще полного теоретического обоснова-

ния, уже сейчас он служит не только средством построения оптимальных алгоритмов, но и инструментом теоретического исследования разностных и дифференциальных уравнений.

Книга основана на курсе лекций, который автор читал в Уральском, Новосибирском, Томском, Казахском государственных университетах с 1959 г. по настоящее время. Книга является попыткой осмыслить и дать, по возможности, единообразное изложение многочисленных схем с дробными шагами, описание которых можно найти только в журналах и сборниках.

Автор стремился учесть, по возможности, все работы, имевшие значение для развития метода дробных шагов, но, естественно, освещение предмета не является равномерным и отражает личные вкусы автора. В частности, в книге не освещены работы по методам априорных оценок. Автор ограничился более простым методом гармонического анализа устойчивости. Очень бегло дана также теория локальных критериев устойчивости. Основное внимание уделено методам построения эффективных схем.

В книге нашли отражение также результаты автора и его сотрудников. Автору особенно приятно вспомнить о совместной работе с коллективом молодых математиков, который разработал первые неявные схемы расщепления для решения различных задач математической физики, успешно применив их в расчетах. Это, в первую очередь, Н.Н. Анучина, В.А. Енальский, А.С. Жариков, А.И. Зуев, А.Н. Коновалов, В.Е. Неуважаев, Ю.Я. Погодин, В.А. Сучков, В.Д. Фролов.

Имевшая место в 1962 г. дискуссия, в которой приняли участие Е.Г. Дьяконов, А.А. Самарский, Б.Л. Рождественский, способствовала более глубокому пониманию роли краевых условий в оценке точности схем с дробными шагами и послужила толчком к ряду работ.

Совместная работа и многочисленные дискуссии с Г. И. Марчуком и сотрудниками ВЦ СО АН СССР Ю. Е. Бояринцевым, Г. В. Демидовым, В.П. Ильиным, Б. Г. Кузнецовым, М. М. Лаврентьевым, В. В. Пененко, Ю. Н. Ватолиным способствовали дальнейшим приложениям метода дробных шагов и его теоретическому обоснованию. Большую помощь при оформлении рукописи оказал А. Н. Валиуллин. Всем этим товарищам автор приносит свою благодарность.

Автор надеется, что книга будет полезна для научных работников, занимающихся расчетами многомерных задач механики и физики, а так-

же для студентов старших курсов университетов, специализирующихся по вычислительной математике. Автор будет признателен читателям книги за указание возможных ошибок и недостатков.

Новосибирск,
Академгородок
Ноябрь 1965 г.

— \triangle —

§ 1. ОДНОРОДНЫЕ СХЕМЫ

П. 1. КЛАСС РАССМАТРИВАЕМЫХ ЗАДАЧ. ЗАДАЧА КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В нашем курсе лекций мы в основном ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = L(D)u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

где $u(x, t) = \{u_1(x_1, \dots, x_m, t), u_2(x_1, \dots, x_m, t), \dots, u_n(x_1, \dots, x_m, t)\}$,
 $f(x, t) = \{f_1(x_1, \dots, x_m, t), f_2(x_1, \dots, x_m, t), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m, t)\}$ — векторные функции векторного пространственного аргумента $x = (x_1, \dots, x_m)$ и времени t ; $L(D)$ — линейный дифференциальный оператор-матрица с переменными коэффициентами $D = \{D_i\}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, m$.

Расписанное в индексах уравнение (1)^{*1} принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(x_1, \dots, x_m, t)}{\partial t} &= \sum_{j, \alpha} a_{ij\alpha_1 \dots \alpha_m}(x_1, \dots, x_m, t) D_1^{\alpha_1} \dots \\ &\dots D_m^{\alpha_m} u_j(x_1, \dots, x_m, t) + f_i(x_1, \dots, x_m, t), \quad (2) \\ 0 \leq \alpha_k \leq q_k, \quad k &= 1, \dots, m, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для системы (1) можно поставить *задачу Коши* в полосе

$$|x| < \infty, \quad 0 \leq t \leq T < \infty,$$

¹Сквозная нумерация формул принята только в пределах одного пункта. В ссылках на формулы в пределах одного параграфа слева добавляется номер пункта; в пределах монографии — номер параграфа. Например, (5.3.20) означают формулу (20) в пункте 3 параграфа 5; (4.13) — формулу (13) пункта 4 того же параграфа; (10) — формулу (10) того же пункта

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3)$$

или же *смешанную задачу Коши* в цилиндре

$$\Omega = G \times H,$$

где G есть некоторая область в гиперплоскости $t = 0$ с границей γ , $H = \{0 \leq t \leq T\}$. Во втором случае к начальным данным

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in G \quad (4)$$

следует присоединить некоторое краевое условие, справедливое на боковой поверхности $\Gamma = \gamma \times H$ области Ω

$$l(D)u = \varphi(x, t). \quad (5)$$

Здесь $l(D)$ есть некоторый дифференциальный оператор, зависящий от символов $D_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, D_1, \dots, D_m ; $\varphi(x, t)$ – векторная функция, определенная на Γ .

В дальнейшем в общем рассмотрении мы ограничимся задачей Коши в полосе, обращаясь к смешанной задаче Коши только на конкретных примерах. Это избавит нас от необходимости входить в анализ краевых условий. В большинстве случаев рассматриваемая задача Коши будет обладать свойством периодичности, т.е. коэффициенты, правая часть $f(x, t)$, начальные данные и, как следствие, решения будут периодическими функциями x .

Мы будем рассматривать более общую задачу Коши, когда начальные данные ставятся в момент времени t_1 , $0 \leq t_1 \leq T$, и требуется определить решение $u(x, t)$ системы (1) для всех t , $t_1 \leq t \leq T$, непрерывно примыкающее к функции начальных данных $u(x, t_1)$ при $t \rightarrow t_1$.

Мы будем предполагать, что задача Коши однозначно разрешима для всех моментов t_1 , $0 \leq t_1 \leq T$, и что решение $u(x, t)$ имеет непрерывными все производные, входящие в уравнение (2), если функция начальных данных $u(x, t)$ достаточно гладкая функция x . Такое решение будем называть *классическим*. Обозначим функцию $u(x, t)$ через $u(t)$, рассматривая t как параметр, а функцию $u(x, t)$ при фиксированном t как элемент пространства функций от x . В этих обозначениях решению $u(x, t)$ системы (1) будет соответствовать однопараметрическое семейство элементов $u(t)$. Соответственно оператор $L(D)$ и функцию $f(x, t)$ в (1) будем обозначать через $L(t, D)$, $f(t)$.

Пусть $u(t)$ есть классическое решение однородной задачи Коши ($f \equiv 0$) с начальными данными $u(t_1)$. В силу сделанных нами предположений соотношение

$$u(t_2) = S(t_2, t_1)u(t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad (6)$$

для достаточно гладких функции $u(t_1)$ определяет линейный *оператор перехода* $S(t_2, t_1)$.

Мы будем предполагать, что существует банахово пространство B функций от x , в котором некоторое множество гладких функций образует плотный класс, и что соотношение (6) может быть распространено на функции из B . В силу известной теоремы о расширении оператора это возможно, если оператор $S(t_2, t_1)$ ограничен на гладких функциях. Все оценки операторов будем давать по норме пространства B .

Определение. Задача (1), (3) называется *корректной*, если

$$\|S(t, 0)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t < T. \quad (7)$$

Система (1) называется *корректной*, если

$$\|S(t_2, t_1)\| \leq M(T), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (8)$$

Система (1) называется *равномерно корректной*, если справедлива оценка

$$\|S(t_2, t_1)\| \leq e^{\alpha(t_2-t_1)} \quad (9)$$

для всех t_1, t_2 , удовлетворяющих условию $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, где α — константа, зависящая только от T .

Ясно, что из равномерной корректности системы следует ее корректность и из корректности системы следует корректность задачи. В дальнейшем будем рассматривать только равномерно корректные системы. Свойство корректности обеспечивает закон композиции для семейства ограниченных операторов $S(t_2, t_1)$

$$S(t_3, t_1) = S(t_3, t_2) \cdot S(t_2, t_1). \quad (10)$$

Равенство (10) означает *обобщенный принцип Гюйгенса–Адамара*: последовательное решение задачи Коши в промежутках $t_0, t_1; t_1, t_2; \dots; t_{m-1}, t_m$ эквивалентно решению задачи Коши в промежутке t_0, t_m .

Мы будем предполагать также, что выполняется условие *сильной непрерывности* оператора $S(t_2, t_1)$

$$\|S(t + \tau, t)u_0 - u_0\| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0, \quad (11)$$

для произвольных $u_0 \in B$ и t .

Семейство операторов $S(t_2, t_1)$, удовлетворяющих условиям (9), (10), (11), образует *полугруппу**². Подробно на задаче Коши в банаховых пространствах мы остановимся в §10.

П. 2. ОДНОРОДНЫЕ СХЕМЫ

Пусть

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n + F^n \quad (1)$$

есть двухслойная разностная схема, соответствующая системе (1.1). Здесь

$$u^n(x) = \{u_i(x_1, \dots, x_m, n\tau)\}, \quad F^n(x) = \{F_i(x_1, \dots, x_m, n\tau)\}$$

суть векторные функции, $\Lambda_0 = \Lambda_0(t, \tau, h, T)$, $\Lambda_1 = \Lambda_1(t, \tau, h, T)$ — разностные операторы-матрицы с переменными коэффициентами,

$$T = \{T_\alpha\}, \quad \alpha = -q_\alpha, -q_\alpha + 1, \dots, q_\alpha,$$

операторы сдвига T_α определяются формулами:

$$T_i u(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_m); \quad (2)$$

$$T_{-i} u(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_i - h_i, \dots, x_m); \quad T_{-i} = T_i^{-1}.$$

В индексной записи схема (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = & \sum_{j, \beta} b_{ij\beta_1 \dots \beta_m}(x, t, \tau, h) T_1^{\beta_1} \dots T_m^{\beta_m} u_j^{n+1} + \\ & + \sum_{j, \beta} c_{ij\beta_1 \dots \beta_m} T_1^{\beta_1} \dots T_m^{\beta_m} u_j^n + F_i^n, \end{aligned} \quad (3)$$

где индексы β_s ($s = 1, \dots, m$) могут пробегать как положительные, так и отрицательные целые значения.

Введем ряд понятий. Схемы вида (1) будем называть *однородными*, так как аппроксимация (1) носит единообразный характер независимо

²По поводу решения задачи Коши и теории полугрупп см. [2-4, 99]. Необходимые понятия функционального анализа см. в работах [1], [72]

от точки x , t^{*3} Схему (1) будем называть *явной*, если в пространстве сеточных функций оператор $E - \tau\Lambda_1$ изображается матрицей с одной диагональю, *неявной* — в противном случае. Оператор Λ называется *сингулярным*, если для любой сколь угодно гладкой функции f имеем

$$\|\Lambda f\| \geq \frac{A}{h^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad A > 0,$$

где A не зависит от $h = \max h_i$.

Если $|\beta_s| \leq Q$, где Q не зависит от τ, h , будем называть операторы Λ_0, Λ_1 *финитными*. Заметим, что оператор, обратный финитному, вообще говоря, не является уже финитным.

В практическом счете равенства (1) рассматриваются в точках сетки, и тогда запись (3) должна быть дополнена сеточными индексами

$$\begin{aligned} \frac{u_{ik_1 \dots k_m}^{n+1} - u_{ik_1 \dots k_m}^n}{\tau} &= \sum_{j, \beta} b_{ij\beta_1 \dots \beta_m} u_{jk_1 + \beta_1 \dots k_m + \beta_m}^{n+1} + \\ &+ \sum_{j, \beta} c_{ij\beta_1 \dots \beta_m} u_{jk_1 + \beta_1 \dots k_m + \beta_m}^n + F_{ik_1 \dots k_m}^n, \end{aligned} \quad (4)$$

где индексами k_1, \dots, k_m фиксируется точка

$$x_1 = k_1 h_1, \dots, \quad x_m = k_m h_m.$$

В теоретическом исследовании мы будем рассматривать операторы Λ_1, Λ_0 действующими в том же пространстве, что и оператор L из (1.1), и считать функции $u^n(x)$ принадлежащими B . Поставим для (1) начальное условие

$$u^0(x) = u_0(x). \quad (5)$$

Пусть $u^n(x)$ есть решение однородной задачи Коши (1), (5) ($F_n = 0$). Тогда равенство

$$u^{n+1}(x) = C(\tau, h, t + \tau, t)u^n(x), \quad t = n\tau, \quad (6)$$

определяет *разностный оператор шага* $C(\tau, h; t + \tau, t)$, равенство

$$u^n(x) = C(\tau, h, t_2, t_1)u^m(x), \quad 0 \leq t_1 = m\tau \leq t_2 = n\tau \leq T, \quad (7)$$

определяет *разностный оператор перехода* $C(\tau, h; t_2, t_1)$.

³Понятие однородной схемы было введено в работе А. Н. Тихонова, А. А. Самарского [93].

Будем также обозначать:

$$C_{nm} = C(\tau, h; t_2, t_1); \quad t_2 = n\tau, \quad t_1 = m\tau; \quad C_n = C_{nn-1}. \quad (7')$$

Определение. Задача Коши (1), (5) *корректна*, если

$$\|C(\tau, h, t, 0)\| \leq M(t), \quad 0 \leq t = n\tau \leq T, \quad \tau^2 + h^2 \leq \tau_0^2, \quad (8)$$

где τ_0 — некоторая достаточно малая константа. Схема (1) *корректна*, если

$$\|C(\tau, h; t_2, t_1)\| \leq M(t), \quad 0 \leq t_1 = m\tau \leq t_2 = n\tau \leq T; \quad (9)$$

равномерно корректна, если

$$\|C(\tau, h; t_2, t_1)\| \leq e^{\omega(t_2-t_1)}, \quad 0 \leq t_1 = m\tau \leq t_2 = n\tau \leq T; \quad (10)$$

где ω — константа, зависящая только от T ; *устойчива*, если

$$\|C(\tau, h; t_2, t_1)\| \leq 1, \quad 0 \leq t_1 = m\tau \leq t_2 = n\tau \leq T; \quad (11)$$

асимптотически устойчива, если

$$\|C(\tau, h; t_2, t_1)\| \rightarrow 0, \quad t_2 \rightarrow \infty; \quad (11')$$

сильно устойчива, если

$$\|C(\tau, h, t + \tau, t)\| \leq 1 - \varepsilon(\tau, h, T), \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ при } \tau, h \rightarrow 0. \quad (12)$$

Данные определения без труда переносятся на случай произвольных шагов

$$\tau_1 = t_1 - t_0, \quad \tau_2 = t_2 - t_1, \quad \dots, \quad \tau_n = t_n - t_{n-1}.$$

Определение. Схема (1) *аппроксимирует* уравнение (1.1), если

$$\frac{\|[C(\tau, h, t + \tau, t) - S(t + \tau, t)]u(x, t)\|}{\tau} \rightarrow 0 \quad (13)$$

при $\tau \rightarrow 0$ равномерно по t , $0 \leq t \leq T$, для гладких решений $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.3).

Определение. Решение $u^n(x)$ задачи (1), (5) сходится к решению $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.3), если

$$\|u^n(x) - u(x, n\tau)\| = \|[C(\tau, h, n\tau, 0) - S(n\tau, 0)]u_0\| \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $\tau \rightarrow 0$ равномерно по $t = n\tau$ в интервале $0 \leq t \leq T$ для произвольного $u_0 \in B$ *4.

Определения корректности, аппроксимации, сходимости требуют указания закона предельного перехода

$$h = h(\tau), \quad h \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0, \quad (15)$$

при котором справедливы соотношения (8)–(14).

Определение. Схема (1) *безусловно (абсолютно) корректна*, если она корректна при любом законе предельного перехода $\tau, h \rightarrow 0$, т.е. оценка (9) имеет место в полной окрестности

$$\tau^2 + h^2 \leq \tau_0^2 \quad (16)$$

для достаточно малых τ_0 . Схема (1) называется *условно корректной* в противном случае, т.е. если оценка (9) имеет место не для произвольного закона предельного перехода.

В случае условной корректности оценка (9) справедлива в некоторой неполной окрестности нуля в плоскости τ, h , граница которой проходит через точку $(0, 0)$. Аналогично определяются понятия абсолютной и условной равномерной корректности, устойчивости, сильной устойчивости.

Определение. Схема (1) абсолютно аппроксимирует уравнение (1.1), если соотношение (13) имеет место в окрестности (16), и условно аппроксимирует в противном случае.

Аналогично определяется абсолютная и условная сходимость. Справедлива следующая

теорема сходимости*5.

Если

- 1) разностная и дифференциальная задачи Коши корректны,
 - 2) оператор $\Lambda_1 + \Lambda_0$ аппроксимирует $L: \Lambda_1 + \Lambda_0 \prec L$,
 - 3) $\|(E - \tau\Lambda_1)^{-1}\| \leq N(T)$,
- то решение разностной задачи Коши (1), (5) сходится к решению дифференциальной задачи Коши (1.1), (1.3).

Доказательство. Пусть $u(x, t) \in C_q$ — решение задачи (1.1), (1.3), соответствующее $u_0(x) \in C_p$, $u^n(x)$ — решение разностной задачи (1), (5)

⁴Мы определили сходимость для $t = n\tau$. Ввиду ограниченности $C_n t$ из сходимости при $t = n\tau$ следует сходимость для любого t .

⁵Аналогичные признаки сходимости были получены впервые В.С. Рябенским [5] и Н.Н. Мейманом [6]. Мы для простоты ограничиваемся случаем $f = F = 0$.

с той же начальной функцией. Величина

$$v^n(x) = u^n(x) - u(x, n\tau) \quad (17)$$

удовлетворяет разностному уравнению

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \Lambda_1 v^{n+1} + \Lambda_0 v^n + R_{n+1}, \quad (18)$$

где

$$R_{n+1} = -\left\{ \frac{u[x, (n+1)\tau] - u(x, n\tau)}{\tau} - \Lambda_1 u[x, (n+1)\tau] - \Lambda_0 u(x, n\tau) \right\} \quad (19)$$

с начальными данными

$$v^0 = 0. \quad (20)$$

По условию 2 (условие аппроксимации) имеем

$$\max_n \|R_n\| \rightarrow 0 \quad (21)$$

при $\tau \rightarrow 0$. Используя условие 3 теоремы, перепишем уравнение (18) в виде

$$v^{n+1} = C_{n+1}v^n + r_{n+1}, \quad (22)$$

$$C_{n+1} = (E - \tau\Lambda_1)^{-1}(E + \tau\Lambda_0), \quad r_{n+1} = \tau(E - \tau\Lambda_1)^{-1}R_{n+1}. \quad (23)$$

Нетрудно убедиться в справедливости представления

$$v^n = C_{n0}v^0 + \sum_{\alpha=1}^n C_{n\alpha}r_\alpha, \quad (24)$$

$$C_{n\alpha} = C_n C_{n-1} \dots C_{\alpha+1}. \quad (25)$$

Из условия корректности следует:

$$\begin{aligned} \|v^n\| &\leq \|C_{n0}\| \|v^0\| + \sum_{\alpha=1}^n \|C_{n\alpha}\| \|r_\alpha\| \leq \\ &\leq n\tau NM \max_{k=1, \dots, n} \|R_k\| = tMN \max_{k=1, \dots, n} \|R_k\|. \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда

$$\|v^n\| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0$$

равномерно в интервале $[0, T]$, что и требовалось доказать.

Имеет место *теорема эквивалентности**⁶. Если схема (1) аппроксимирует уравнение (1.1), то для того, чтобы решение $u^n(x)$ задачи (1), (5) сходилось в B к решению $u(x, t)$ корректной задачи (1.1), (1.3), необходимо и достаточно, чтобы задача (1), (5) была корректна.

Корректность разностной задачи является самостоятельным требованием, не вытекающим из свойства аппроксимации. Покажем это на примере уравнения с постоянными коэффициентами. Пусть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(D)u \quad (27)$$

есть уравнение с постоянными коэффициентами, где u — скалярная функция от x_1, \dots, x_m, t ,

$$L(D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} \quad (28)$$

- полином от операторов дифференцирования D_i .

В этом случае справедлив простой критерий корректности. Рассмотрим гармоническую функцию

$$u = u_0 e^{\omega t + ikx}, \quad u_0 = \text{const}, \quad k — \text{целое}. \quad (29)$$

Для того чтобы гармоника (29) была решением (27), необходимо и достаточно, чтобы ω, k были связаны соотношением (так называемое *дисперсионное* или *характеристическое* уравнение)

$$\omega = L(ik). \quad (30)$$

Система (27) корректна в $L_2(\pi, \pi)$ тогда и только тогда, когда

$$\text{Re } \omega(k) \leq \mu_1 \quad (31)$$

для всех k , где μ_1 — константа, не зависящая от k . Пусть

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = L\left(\frac{\Delta}{h}\right) u^n \quad (32)$$

есть явная однородная аппроксимация (27); Δ/h — некоторая аппроксимация D , например,

$$\frac{\Delta_i}{h_i} = \frac{T_i - E}{h_i} \prec D_i.$$

⁶Теорема эквивалентности принадлежит Лаксу (см. [3], [4]) и справедлива для однородного уравнения (1.1). Ее обобщение на случай неоднородной задачи принадлежит Рихтмайеру [7].

Тогда (29) может быть решением (32) при условии (разностное дисперсионное уравнение)

$$\frac{e^{\omega\tau} - 1}{\tau} = L \left(\frac{e^{ikh} - 1}{h} \right) = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \left(\frac{e^{ik_1 h_1} - 1}{h_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{e^{ik_m h_m} - 1}{h_m} \right)^{\alpha_m}. \quad (33)$$

Необходимым и достаточным условием корректности схемы (32) является снова неравенство

$$\operatorname{Re} \omega(\tau, h, k) \leq \mu_2, \quad (34)$$

где на этот раз ω определяется из (33), μ_2 не зависит от k, τ, h . Для ограниченных $k \leq K$

$$\omega(\tau, h, k) \rightarrow \omega(k) = L(ik) \text{ при } \tau, h \rightarrow 0 \quad (35)$$

и, следовательно, на классе функций, имеющих финитный образ Фурье, дисперсионное уравнение (33) аппроксимирует уравнение (30), а разностная схема (32) будет корректной на этом классе.

Однако практически имеет место другая ситуация: τ, h малы, но конечны и k сколько угодно или достаточно велико^{*7}. Отсюда следует, что $\omega(\tau, h, k)$ может как угодно сильно отличаться от $\omega(k)$ и условие (34) не следует из условия (31).

Гармонический анализ устойчивости удобен для уравнений с постоянными коэффициентами. В отличие от ε -схемы, в которой рассматривается возмущение начальных данных в отдельной точке сетки и анализируется его дальнейшее распространение в фазовом пространстве (x_1, \dots, x_m, t) в гармоническом анализе рассматривается начальное возмущение типа гармоники

$$\delta u = \delta u_0 e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_m x_m)}$$

и исследуется его дальнейшее распространение. Гармонический критерий устойчивости может быть сформулирован тогда в следующем виде: если амплитуда каждого гармонического возмущения возрастает не сильнее, чем $e^{\mu t}$, то схема корректна. В дальнейшем возмущения в начальных данных или в процессе счета (ошибка округления) вида $\delta u_0 e^{ik_1 x_1}$ будем кратко называть ошибкой по x_1 , возмущения вида $\delta u_0 e^{ik_2 x_2}$ — ошибкой по x_2 и т.д.

⁷ Если разностная задача рассматривается в том же пространстве B , что и исходная задача Коши, то k сколь угодно велико. Если разностная задача рассматривается в пространстве сеточных функций, то $k \sim \frac{1}{h}$.

Таким образом, разностные схемы должны удовлетворять двум независимым требованиям: 1) аппроксимация, 2) корректность. Как мы увидим дальше, эти требования не только независимы, но и в известной мере вступают в противоречие одно с другим.

Кроме требований 1), 2), которые являются безусловными, разностные схемы должны удовлетворять еще ряду требований, которые носят менее категоричный характер, но практически необходимы. В первую очередь это требование *экономичности* схемы, где мерой экономичности служит некоторое условное машинное время. Экономичность разностной схемы есть не только средство экономии машинного времени, но в некоторых случаях и практически обязательное условие реализации схемы в виде программы.

При интегрировании нелинейных уравнений с частными производными критерии аппроксимации и корректности сильно усложняются. Поэтому почти обязательным является требование *дивергентности* схемы *⁸.

Эти требования можно было бы умножить, но и без того становится ясным, что построение хорошей разностной схемы является очень сложной задачей.

⁸Разностная схема называется *дивергентной* (*консервативной*), если она тождественно удовлетворяет разностным законам сохранения.

П. 3. ПРИМЕРЫ

Поясним введенные понятия некоторыми примерами.

Рассмотрим четыре схемы интегрирования для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const} \neq 0. \quad (1)$$

I. Схема «крест» (схема Ричардсона):

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^n, \quad \Delta_1 = T_1 - E, \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1}. \quad (2)$$

Аппроксимация, как легко проверить, имеет 2-й порядок. Положим $\rho = e^{\omega\tau}$. Тогда дисперсионное уравнение для схемы (2) имеет вид

$$\rho^2 + 8r \sin^2 \frac{kh}{2} \rho - 1 = 0; \quad r = \frac{a^2 \tau}{h^2}. \quad (3)$$

Отсюда

$$\rho_{1,2} = -4r \sin^2 \frac{kh}{2} \pm \sqrt{(4r \sin^2 \frac{kh}{2})^2 + 1}.$$

Норма оператора шага равна $4r + \sqrt{1 + (4r)^2}$. При любых τ , h схема (2) абсолютно неустойчива. Итак, схема «крест» абсолютно аппроксимирует, но абсолютно неустойчива.

II. Схема «ромб» (схема Дюфорты–Френкеля):

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{a^2}{h^2} [T_1 u^n + T_{-1} u^n - (u^{n-1} + u^{n+1})]. \quad (4)$$

Схема преобразуется к виду

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{a^2}{h^2} \Delta_1 \Delta_{-1} u^n - \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2}. \quad (4')$$

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\rho^2 - \frac{4r \cos kh}{1 + 2r} \rho + \frac{2r - 1}{2r + 1} = 0.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{2r \cos kh \pm \sqrt{(2r \cos kh)^2 - 4r^2 + 1}}{2r + 1} = \frac{2r \cos kh \pm \sqrt{1 - \varepsilon}}{2r + 1},$$

$$\varepsilon = 4r^2 \sin^2 kh \geq 0.$$

Если $\varepsilon > 1$, то корни ρ_1, ρ_2 комплексные сопряженные и имеют модуль

$$\sqrt{\frac{2r-1}{2r+1}} < 1.$$

Если $\varepsilon \leq 1$, то $\sqrt{1-\varepsilon} = \vartheta \leq 1$,

$$|\rho| = \frac{2r \cos kh \pm \vartheta}{2r+1} \leq 1.$$

Таким образом, схема «ромб» абсолютно устойчива. Проверим аппроксимацию. Пользуясь (4'), видим, что схема «ромб» аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{a^2 \tau^2}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

При законе предельного перехода

$$\frac{a^2 \tau}{h^2} = r = \text{const}$$

схема «ромб» аппроксимирует уравнение теплопроводности (1). При законе предельного перехода

$$\frac{a\tau}{h} = \varkappa = \text{const}$$

схема «ромб» аппроксимирует уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varkappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Следовательно, схема «ромб», являясь абсолютно устойчивой и явной, неабсолютно аппроксимирует уравнение теплопроводности.

III. Явная двухслойная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u^n. \quad (6)$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\rho = 1 - 4r \sin^2 \frac{kh}{2}. \quad (7)$$

Схема (6) корректна при условии

$$r = \frac{a^2 \tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (8)$$

т.е. условно устойчива. Нетрудно видеть, что схема (6) абсолютно аппроксимирует (1). Значит, схема (6) абсолютно аппроксимирует уравнение (1), но условно устойчива.

IV. Неявная двухслойная схема (схема Кранка–Николсона):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{a^2}{h^2} \Delta_1 \Delta_{-1} [\alpha u^{n+1} + (1 - \alpha) u^n], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (9)$$

Дисперсионное соотношение имеет вид

$$\rho = \frac{1 - 4r(1 - \alpha) \sin^2 \frac{kh}{2}}{1 + 4r\alpha \sin^2 \frac{kh}{2}}. \quad (10)$$

Ясно, что схема (9) абсолютно аппроксимирует (1). При $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (9) является также и абсолютно устойчивой в L_2 . При $\alpha = 1$ схема (9) абсолютно устойчива в C , так как удовлетворяет принципу максимума. При $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, $r \leq \frac{1}{2(1-2\alpha)}$ схема (9) устойчива в L_2 .

В приведенных примерах абсолютно корректными и аппроксимирующими схемами были только неявные схемы. По-видимому, это верно и в общем случае. Для практических расчетов схемы, обладающие одновременно качеством абсолютной аппроксимации и корректности, особенно удобны.

П. 4. МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ (ПРОГОНКИ)

Для реализации неявной схемы (3.9) применяется метод факторизации, который заключается в представлении оператора второго порядка $E - \alpha r \Delta_1 \Delta_{-1}$ в виде произведения двух операторов первого порядка. Для разностного уравнения 2-го порядка

$$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

формулы прогонки имеют вид

$$u_i = X_i u_{i+1} + Y_i; \quad (2a)$$

$$X_i = -\frac{C_i}{B_i + A_i X_{i-1}}, \quad Y_i = -\frac{f_i - A_i Y_{i-1}}{B_i + A_i X_{i-1}}. \quad (26)$$

Для схемы (3.9), полагая $u_i^{n+1} = u_i$, имеем

$$A_i = C_i = -\alpha r; \quad B_i = 1 + 2\alpha r; \quad f_i = [E + (1 - \alpha)r\Delta_1\Delta_{-1}]u_i^n. \quad (3)$$

Отсюда

$$X_i = \frac{\alpha r}{(1 + 2\alpha r) - \alpha r X_{i-1}} = \frac{1}{(2 + \frac{1}{\alpha r}) - X_{i-1}}; \quad (3')$$

$$Y_i = \frac{f_i + \alpha r Y_{i-1}}{(1 + 2\alpha r) - \alpha r X_{i-1}} = \frac{Y_{i-1} + \frac{1}{\alpha r} f_i}{(2 + \frac{1}{\alpha r}) - X_{i-1}}.$$

Величины X_0, Y_0 определяются из краевых условий на левом конце. Например, если для уравнения (3.9) решается краевая задача:

$$\text{а) } \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \text{б) } u(1, t) = 1; \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

то X_0, Y_0 определяются из прогоночного соотношения

$$u_0 = X_0 u_1 + Y_0. \quad (5)$$

Отсюда для удовлетворения краевого условия (4а) достаточно положить

$$X_0 = 1, \quad Y_0 = 0. \quad (6)$$

После этого с помощью соотношений (2) рекуррентно определяются X_i, Y_i .

Из правого условия (4б) определяется u_{N+1} и из соотношения (2а) справа налево определяются u_i .

Нетрудно видеть, что схема прогонки (2), (3) является *пространственно устойчивой*, т.е. в рекуррентном счете X_i, Y_i, u_i ошибка не возрастает. Алгоритм прогонки очень эффективен, и число операций на шаг в схеме (3.9) только примерно в 5 раз больше числа операций на шаг в простой схеме (3.6).

Учитывая это, видим, что применение неявной схемы становится экономически выгодным, если $\tau_2/\tau_1 > 5$, где τ_1 — шаг явной схемы, τ_2 — шаг неявной схемы, допустимый по точности.

П. 5. МЕТОД МАТРИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

Иначе обстоит дело при переходе к многомерному уравнению теплопроводности. Рассмотрим, например, двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

в параллелепипеде

$$0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1; \quad 0 \leq t \leq T,$$

и поставим для него первую краевую задачу Коши

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in G;$$

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \gamma;$$

где $G = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$; γ — граница G .

По аналогии с одномерным случаем применим однородную неявную схему

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda [\alpha u^{n+1} + (1 - \alpha) u^n], \quad (2)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2; \quad \Lambda_1 = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2}; \quad \Lambda_2 = a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2}. \quad (3)$$

В этом случае на каждом шаге приходится решать систему уравнений

$$-\alpha r_1(u_{i-1j} + u_{i+1j}) - \alpha r_2(u_{ij-1} + u_{ij+1}) + [1 + 2\alpha(r_1 + r_2)]u_{ij} = f_{ij}, \quad (4)$$

где

$$f_{ij} = [E + (1 - \alpha)\tau\Lambda]u_{ij}^n; \quad u_{ij} = u_{ij}^{n+1}.$$

Для решения (4) применяется метод *матричной факторизации*.

Метод матричной факторизации был разработан, обоснован и успешно применен для задач математической физики группой советских математиков (М.В. Келдыш, И.М. Гельфанд, К.И. Бабенко, О.Н. Локуцкий, Н.Н. Ченцов и др.) [8].

Г.И. Марчук [9] с успехом применил метод векторной и матричной факторизации для решения задач нейтронной физики.

Вкратце опишем этот метод на примере двумерного уравнения теплопроводности (1). Уравнения (4) можно записать в матричной форме

$$A_i \vec{u}_{i-1} + B_i \vec{u}_i + C_i \vec{u}_{i+1} = \vec{f}_i, \quad (5)$$

где \vec{u}_i , \vec{f}_i суть векторы $\{u_{ij}\}, \{f_{ij}\}$; матрицы A_i, B_i, C_i действуют в N_2 -мерном пространстве векторов \vec{u}_i

$$A_i = C_i = \left\| \begin{array}{cccc} -\alpha r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha r_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha r_1 \end{array} \right\| = -\alpha r_1 I, \quad (6)$$

$$B_i = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) & -\alpha r_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha r_2 & 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) & -\alpha r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + 2\alpha(r_1 + r_2) \end{array} \right\| \quad (7)$$

Вид матриц A_i, B_i соответствует первой краевой задаче для прямоугольника

$$x_i = ih_1, \quad i = 0, 1, \dots, N_1 + 1;$$

$$y_j = jh_2, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 + 1;$$

индексы 0, $N_1 + 1$, $N_2 + 1$ отвечают границе прямоугольника. По аналогии с методом прогонки положим

$$\vec{u}_i = X_i \vec{u}_{i+1} + \vec{Y}_i, \quad (8)$$

где X_i — матрицы, \vec{u}_i, \vec{Y}_i — векторы.

Подставляя (8) в (5), получим

$$(B_i + A_i X_{i-1}) \vec{u}_i + C_i \vec{u}_{i+1} = \vec{f}_i - A_i \vec{Y}_{i-1}. \quad (9)$$

Умножая (9) слева на матрицу $(B_i + A_i X_{i-1})^{-1}$, находим

$$\vec{u}_i = -(A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} C_i \vec{u}_{i+1} + (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} (\vec{f}_i - A_i \vec{Y}_{i-1}). \quad (10)$$

Сравнивая (10) с (8), получаем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} X_i &= -(A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} C_i, \\ \vec{Y}_i &= (A_i X_{i-1} + B_i)^{-1} (\vec{f}_i - A_i \vec{Y}_{i-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Из краевых условий находим

$$\begin{aligned} X_0 &= 0, \quad \vec{Y}_0 = \vec{u}_0, \quad \vec{u}_0 = \{g(0, y_j, t)\}, \\ 0 &\leq y_i \leq 1, \quad y_i = j h_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Условия (12) представляют собой начальные данные для рекуррентных соотношений (11), которые позволяют последовательно определить X_i, \vec{Y}_i до $i = N_1$. Соотношение

$$\vec{u}_{N_1} = X_{N_1} \vec{u}_{N_1+1} \vec{Y}_{N_1} \vec{u}_{N_1+1} = \{g(1, y_j, t)\}, \quad 0 \leq y_j \leq 1, \quad (13)$$

позволяет определить вектор \vec{u}_{N_1} по известному из правого условия вектору \vec{u}_{N_1+1} , после чего \vec{u}_i последовательно определяются с помощью соотношений (8). Таким образом, схема матричной прогонки вполне аналогична обычной прогонке, с той только разницей, что вместо скалярных величин X_i, Y_i, u_i мы «прогоняем» векторы \vec{Y}_i, \vec{u}_i и матрицы X_i , коэффициенты A_i, B_i, C_i становятся матрицами, и все операции следует понимать как операции над матрицами и векторами.

Если коэффициенты уравнения теплопроводности переменные, то для каждого i приходится обращать матрицу порядка N_2 , что является трудоемкой операцией. Поэтому применение матричной факторизации для уравнения теплопроводности в прямоугольной области может быть рекомендовано, когда N_2 не особенно велико. Еще более сложный алгоритм возникает при решении трехмерной задачи. Причиной резкого увеличения числа операций является увеличение размерности разностного оператора на верхнем шаге по сравнению с одномерным случаем.

Можно сделать попытку уменьшить размерность разностного оператора на верхнем шаге. Например, вместо разностной схемы (2) можно было применить следующую аппроксимацию:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n, \quad (14)$$

и тогда решение неявной схемы (14) свелось бы к обычным прогонкам по x_1 . Нетрудно убедиться, однако, что схема (14) является условно устойчивой.

Действительно, коэффициент $\rho(k) = e^{\omega\tau}$ роста гармоники выражается дробью

$$\rho(k_1, k_2) = \frac{1 - a_2}{1 + a_1}; \quad a_s = 4r_s \sin^2 \frac{k_s h_s}{2}; \quad r_s = \frac{a^2 \tau}{h_s^2}; \quad s = 1, 2. \quad (15)$$

Условие устойчивости имеет вид

$$r_2 \leq \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Мы видим, что неустойчивость может возникать вследствие явной аппроксимации производных по x_2 : в то время как гармоническое решение $A(t)e^{ik_1 x_1}$ будет всегда убывать по амплитуде, гармоническое решение $A(t)e^{ik_2 x_2}$ при нарушении условия (16) будет возрастать по амплитуде.

Возникающие в многомерном случае трудности построения простых абсолютно устойчивых схем не могут быть решены на основе однородных схем и простейших аппроксимаций, когда интегрирование происходит единообразно от шага к шагу. Следует изменить структуру разностной схемы и усложнить аппроксимацию.

Остановимся подробнее на этом обстоятельстве. До сих пор при составлении разностных схем мы пользовались простейшими аппроксимациями. Например, оператор $D = \frac{\partial}{\partial x}$ аппроксимировался оператором $\alpha \frac{\Delta_1}{h} + (1 - \alpha) \frac{\Delta_{-1}}{h}$ оператор $D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ оператором $\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2}$ и т. д. Отличительной чертой простейшей аппроксимации является минимальное — при заданной точности — число точек сетки, входящих в область определения разностного оператора.

Пусть $\Lambda \prec \Omega$ есть простейшая аппроксимация порядка $O(h^\alpha)$. Тогда, положив

$$\bar{\Lambda} = \Lambda + h^\alpha \Phi,$$

где Φ — произвольный финитный не сингулярный оператор, получим аппроксимацию $\bar{\Lambda} \prec \Omega$ вновь порядка $O(h^\alpha)$. При этом мы получаем в свое распоряжение целый набор произвольных параметров или функций, связанных с произвольным оператором Φ , которые можно использовать

в тех или других целях. Использование схем с более сложной аппроксимацией делает более гибкими получающиеся схемы и дает возможность получить схему с хорошей реализацией.

— \triangle —

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ СХЕМЫ В ДРОБНЫХ ШАГАХ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

П. 1. СХЕМА ПРОДОЛЬНО–ПОПЕРЕЧНОЙ ПРОГОНКИ

Условно устойчивая схема (1.5.14) является несимметричной: аппроксимация второй производной по x является неявной, по y – явной. Рассмотрим симметризованную схему, в которой x и y меняются ролями от шага к шагу:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n, \quad \frac{u^{n+2} - u^{n+1}}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^{n+2}. \quad (1)$$

На первом шаге, как и в схеме (1.5.14), оператор $L_1 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ аппроксимируется неявно, $L_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – явно; на втором шаге, наоборот, оператор L_1 аппроксимируется явно, оператор L_2 – неявно. После этого счет повторяется.

Схема (1), которую будем называть в дальнейшем *схемой продольно-поперечной прогонки*¹ (схема п. п. п.), была предложена в 1955 г. одновременно Писмэном, Рэкфордом и Дугласом [10, 11]. Покажем, что схема (1) абсолютно устойчива и абсолютно аппроксимирует уравнение теплопроводности (1.5.1).

Так как в схеме (1) счет повторяется только при переходе с n -го шага на $(n + 2)$ -и, то будем считать $(n + 1)$ -й шаг вспомогательным. Поэтому

¹В оригинале употребляется термин *alternating direction (implicit) method*. Иногда в советской литературе применяется также термин «метод переменных направлений» для обозначения схем подобного типа.

будем рассматривать схему (1) как переход с n -го шага на $(n + 1)$ -й с вспомогательным шагом $n + \frac{1}{2}$.

При таких обозначениях схема (1) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n), \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{n+1})\end{aligned}\tag{2}$$

Покажем, что схема (2) эквивалентна некоторой однородной схеме, безусловно устойчивой и безусловно аппроксимирующей уравнение (1.5.1). Следуя [12], запишем (2) в виде

$$A_1 u^{n+\frac{1}{2}} - B_1 u^n = 0,\tag{3а}$$

$$A_2 u^{n+1} - B_2 u^{n+\frac{1}{2}} = 0,\tag{3б}$$

$$A_1 = E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1, \quad A_2 = E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2;\tag{4}$$

$$B_1 = E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2, \quad B_2 = E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1$$

Умножим уравнение (3а) слева на оператор B_2 , уравнение (3б) на A_1 и сложим. В результате получим

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_2 B_1 u^n + (B_2 A_1 - A_1 B_2) u^{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Предполагая коммутативность² операторов Λ_1, Λ_2 , приходим к схеме

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_1 B_2 u^n = 0.\tag{5}$$

Подставляя (4) в (5), после несложных преобразований получаем следующую однородную схему, эквивалентную (2):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2}(u^n + u^{n+1}) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_1\Lambda_2(u^{n+1} - u^n).\tag{6}$$

²В случае разностных уравнений с постоянными коэффициентами, задачи Коши, определенной в $L_2[-\pi, \pi]$ и скалярной функции u^n свойство коммутативности имеет место.

Отсюда следует, что схема (6) и эквивалентная ей схема (2) аппроксимируют уравнение теплопроводности с той же точностью, что и схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

Докажем безусловную устойчивость схемы (6) или, что то же, (2). Положим

$$u^n = \eta_n e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}; \quad u^{n+\frac{1}{2}} = \eta_{n+\frac{1}{2}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (2), получим

$$\rho_1 = \frac{\eta_{n+1/2}}{\eta_n} = \frac{1 - \frac{1}{2}a_2}{1 + \frac{1}{2}a_1}, \quad (8a)$$

$$\rho_2 = \frac{\eta_{n+1}}{\eta_{n+1/2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}a_1}{1 + \frac{1}{2}a_2}, \quad (8б)$$

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{2}a_1}{1 + \frac{1}{2}a_2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}a_2}{1 + \frac{1}{2}a_1} = \rho_1 \rho_2, \quad (8в)$$

где

$$a_s = 4r_s \sin^2 \frac{k_s h_s}{2}, \quad r_s = \frac{a^2 \tau}{h_s^2}, \quad s = 1; 2. \quad (9)$$

Отсюда следует, что

$$|\rho| \leq 1 \quad (10)$$

при любом τ . Устойчивость схемы (2) доказана. Нетрудно установить, что из (6) получается то же выражение для ρ . Таким образом, благодаря введению вспомогательных дробных шагов мы получили абсолютно устойчивую схему. При этом вместо одной матричной прогонки нужно применять две обычные прогонки, что значительно уменьшает объем вычислений.

Проанализируем формулы (8). Равенство (8) означает, что на первом полушаге ошибка в направлении x_1 уменьшается в $1 + \frac{1}{2}a_1$ раз, ошибка в направлении x_2 увеличивается в $1 - \frac{1}{2}a_2$ раз; на втором полушаге, наоборот, ошибка в направлении x_1 возрастает в $1 - \frac{1}{2}a_1$ раз, в направлении x_2 убывает в $1 + \frac{1}{2}a_2$ раз. Следовательно, как бы сильно ни выросла ошибка в каком-либо направлении на данном полушаге, на следующем полушаге

она обязательно уменьшится, так что на двух полушагах она не возрастает по модулю. Отсюда сразу видно преимущество схемы продольно-поперечной прогонки по сравнению со схемой (1.5.14)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n$$

или аналогичной схемой

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^n + \Lambda_2 u^{n+1}.$$

В первой схеме ошибка в направлении x_1 всегда будет убывать в $1 + a_1$ раз, зато ошибка в направлении x_2 будет всегда возрастать в $1 - a_2$ раз. Во второй схеме, наоборот, на каждом шаге ошибка в направлении x_1 возрастает в $1 - a_1$ раз, хотя в направлении x_2 убывает в $1 + a_2$ раз.

Следовательно, необходимо менять направления x_1 , x_2 ролями, что и делается в схеме п. п. п. В методе попеременного неявного счета интегрирование в каждом направлении идет попеременно то с помощью явной, то с помощью неявной схемы и возрастание ошибки в явной схеме компенсируется убыванием ошибки в неявной схеме³.

Из этих наглядных соображений следует, что метод попеременного неявного счета непригоден в трехмерном случае. Рассмотрим для трехмерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad (11)$$

схему, аналогичную схеме п. п. п. В этом случае интегрирование в каждом направлении x_1 , x_2 , x_3 происходит один раз неявным образом и дважды явным. Значит, возрастание ошибки в явной схеме не компенсируется убыванием ее в неявной схеме.

³Компенсация устойчивости на дробных шагах аналогична компенсации прочности на изгиб в фанерном листе, который состоит из ряда склеенных листов с попеременно меняющимся направлением волокон. Если склеивать листы с одним направлением волокон, то компенсации прочности не получится.

Подтвердим это точным анализом устойчивости схемы п. п. п. в трехмерном случае

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{3}(\Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n), \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \frac{1}{3}(\Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1/3}), \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \frac{1}{3}(\Lambda_1 u^{n+2/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1}).\end{aligned}\quad (12)$$

Для коэффициентов умножения получаем формулы

$$\rho_1 = \frac{1 - \frac{1}{3}(a_2 + a_3)}{1 + \frac{1}{3}a_1}, \quad \rho_2 = \frac{1 - \frac{1}{3}(a_1 + a_3)}{1 + \frac{1}{3}a_2}, \quad \rho_3 = \frac{1 - \frac{1}{3}(a_1 + a_2)}{1 + \frac{1}{3}a_3};\quad (13)$$

$$\rho = \rho_1 \rho_2 \rho_3 = \frac{[1 - \frac{1}{3}(a_2 + a_3)][1 - \frac{1}{3}(a_1 + a_3)][1 - \frac{1}{3}(a_1 + a_2)]}{(1 + \frac{1}{3}a_1)(1 + \frac{1}{3}a_2)(1 + \frac{1}{3}a_3)}$$

Отсюда следует, что схема не является абсолютно устойчивой. При достаточно больших $\frac{\tau}{h_i^2}$, $i = 1, 2, 3$, получаем для ρ оценку

$$\rho \approx -8.\quad (14)$$

Заметим, также, что метод попеременного неявного счета непригоден для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\quad (15)$$

даже при $m = 2$.

П. 2. СХЕМА СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ ПОПРАВКИ

Для решения трехмерного уравнения теплопроводности в работе Дугласа, Рэкфорда [12] была предложена следующая схема:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n;$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2(u^{n+2/3} - u^n); \quad (1)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3(u^{n+1} - u^n).$$

Схему (1) можно переписать в виде

$$A_s u^{n+\frac{s}{3}} - B_s u^{n+\frac{s-1}{3}} = C_s u^n, \quad (2)$$

где

$$A_s = E - \tau \Lambda_s; \quad B_s = E; \quad s = 1, 2, 3; \quad (2')$$

$$C_1 = \tau(\Lambda_2 + \Lambda_3); \quad C_2 = -\tau \Lambda_2; \quad C_3 = -\tau \Lambda_3.$$

Последовательно исключая $u^{n+1/3}$, $u^{n+2/3}$, получаем эквивалентную однородную схему

$$A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - B_1 B_2 B_3 u^n = [C_1 + A_1 C_2 + A_1 A_2 C_3] u^n. \quad (3)$$

После подстановки (2) в (3) и разложения по τ , преобразуем схему (3) к виду

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} - \tau(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3)(u^{n+1} - u^n) + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n), \quad (4)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3.$$

Для коэффициента возрастания ошибки получаем выражение

$$\rho = \frac{1 + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + a_1 a_2 a_3}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)}. \quad (5)$$

Из (4) следует аппроксимация, из (5) устойчивость.

Заметим, что структура схемы такова: первый дробный шаг дает полную аппроксимацию уравнения теплопроводности, следующие дробные шаги являются поправочными и служат цели, улучшения устойчивости. Поэтому схемы такого рода мы будем называть *схемами стабилизирующей поправки* (с.п.) или схемами *с поправкой на устойчивость*. Позднее Дугласом [26] была предложена схема с.п. 2-го порядка точности (см.п.7).

П. 3. СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ БЕЗ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ (ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ)

Анализ устойчивости схем попеременного неявного счета показывает, что аппроксимация явными операторами ухудшает устойчивость схемы. Это приводит к идее на каждом дробном шаге пользоваться только неявными операторами. При этом на каждом дробном шаге в правой части аппроксимируется оператор

$$L_s = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}, \quad (1)$$

полная аппроксимация достигается только на полном шаге. Схема такого рода была впервые предложена в работе автора [13]. Мы будем называть такие схемы *схемами расщепления*. Простейшая схема расщепления для трехмерного уравнения теплопроводности имеет вид

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/3}, \quad (2a)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2 u^{n+2/3}, \quad (2б)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3 u^{n+1}. \quad (2в)$$

Перепишем (2) в виде

$$A_s u^{n+\frac{s}{3}} - B_s u^{n+\frac{s-1}{3}} = 0, \quad A_s = E - \tau \Lambda_s, \quad B_s = E, \quad s = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Исключая $u^{n+1/3}$, $u^{n+2/3}$, приходим к эквивалентной схеме

$$A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - B_1 B_2 B_3 u^n = A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - E u^n = 0. \quad (4)$$

Разлагая (4) по степеням τ , получаем

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} - \tau(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) u^{n+1} + \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 u^{n+1}. \quad (5)$$

Для ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 находим выражения

$$\rho_1 = \frac{1}{1 + a_1}; \quad \rho_2 = \frac{1}{1 + a_2}; \quad \rho_3 = \frac{1}{1 + a_3}; \quad (6)$$

$$\rho = \frac{1}{(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)}.$$

Из (5) следует аппроксимация, из (6) - устойчивость схемы (2). Нетрудно установить, что схема (2) удовлетворяет свойству экстремума. Это следует из того, что каждая из двухслойных схем (2а), (2б), (2в) удовлетворяет свойству экстремума. Рассмотрим, например, схему (2а), записав ее предварительно в индексном виде и отбросив, для простоты, индексы по x_2, x_3

$$\frac{u_i^{n+1/3} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1}^{n+1/3} - 2u_i^{n+1/3} + u_{i+1}^{n+1/3}}{h^2}.$$

Разрешая относительно $u_i^{n+1/3}$, находим

$$u_i^{n+1/3} = \frac{r}{1+2r} u_{i-1}^{n+1/3} + \frac{1}{1+2r} u_i^n + \frac{r}{1+2r} u_{i+1}^{n+1/3}$$

Отсюда следует свойство экстремума

$$\min\{u_{i-1}^{n+1/3}, u_i^n, u_{i+1}^{n+1/3}\} \leq u_i^{n+1/3} \leq \max\{u_{i-1}^{n+1/3}, u_i^n, u_{i+1}^{n+1/3}\}.$$

Из него, в частности, следует сходимость в C разностного решения к решению дифференциального уравнения (равномерная сходимость). Для повышения точности схемы (2) можно применить схему с весами

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1[\alpha u^{n+1/3} + (1-\alpha)u^n]; \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2[\alpha u^{n+2/3} + (1-\alpha)u^{n+1/3}]; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3[\alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^{n+2/3}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Эквивалентная однородная схема имеет вид

$$A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - B_1 B_2 B_3 u^n = 0, \quad (8)$$

$$A_s = E - \alpha \tau \Lambda_s, \quad B_s = E + (1-\alpha) \tau \Lambda_s, \quad s = 1, 2, 3.$$

Разлагая равенство (8) по τ , получаем

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda[\alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^n] + \tau[\Phi_1 u^{n+1} + \Phi_0 u^n], \quad (9)$$

где

$$\Phi_1 = -\alpha^2(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) + \tau \alpha^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3; \quad (10)$$

$$\Phi_0 = (1-\alpha)^2(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) + \tau(1-\alpha)^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем схему

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \\ + \frac{\tau^2}{8} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 (u^{n+1} + u^n). \end{aligned} \quad (11)$$

Схема (11) имеет точность порядка $O(\tau^2 + h^2)$.

II. 4. СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ (ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ)

Рассмотрим уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu; \quad L = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}; \quad a_{ij} = \text{const}, \quad (1)$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0. \quad (2)$$

В этом случае однородная разностная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda [\alpha u^{n+1} + (1 - \alpha)u^n], \quad \Lambda \prec L, \quad (3)$$

является девятиточечной, и решение получающейся системы уравнений методом матричной прогонки становится очень громоздким. Применение метода попеременного неявного счета также не приведет к простым трехточечным неявным схемам.

В работе В.А. Сучкова, Ю.Я. Погодина и автора [14] была предложена схема

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11} u^{n+1/2} + \Lambda_{12} u^n; \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{21} u^{n+1/2} + \Lambda_{22} u^{n+1}. \quad (4)$$

Здесь

$$\Lambda_{11} = a_{11} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \prec L_{11} = a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2};$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = a_{12} \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4h_1 h_2} \prec L_{12} = a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad (5)$$

$$\Lambda_{22} = a_{22} \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \prec L_{22} = a_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Нетрудно установить, что схема (4) основана на методе расщепления. Действительно, на первом полушаге аппроксимируется «половина» оператора L : $L_{11} + L_{12}$, причем L_{11} аппроксимируется на верхнем слое $n + 1/2$, L_{12} – на нижнем; на втором полушаге аппроксимируется вторая «половина» оператора L : $L_{21} + L_{22}$, причем $L_{21} = L_{12}$ аппроксимируется вновь на нижнем слое $n + 1/2$, L_{22} – на верхнем $n + 1$.

Эквивалентная однородная схема имеет вид

$$A_{11}A_{22}u^{n+1} - A_{12}^2u^n = 0;$$

$$A_{ij} = E + (-1)^{i+j+1}\tau\Lambda_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

Разложением по степеням τ получаем

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})u^{n+1} + 2\Lambda_{12}u^n - \tau(\Lambda_{11}\Lambda_{12}u^{n+1} - \Lambda_{12}^2u^n). \quad (7)$$

Отсюда следует аппроксимация уравнения (1) схемой (4). Нетрудно показать устойчивость схемы. Действительно,

$$\rho_1 = \frac{1 - l_{12}}{1 + l_{11}}; \quad \rho_2 = \frac{1 - l_{12}}{1 + l_{22}}; \quad \rho = \rho_1\rho_2 = \frac{(1 - l_{12})^2}{(1 + l_{11})(1 + l_{22})}, \quad (8)$$

где

$$l_{ii} = 4\tau \frac{a_{ii}}{h_i^2} \sin^2 \frac{k_i h_i}{2};$$

$$l_{12} = 4\tau \frac{a_{12}}{h_1 h_2} \cos \frac{k_1 h_1}{2} \cos \frac{k_2 h_2}{2} \sin \frac{k_1 h_1}{2} \sin \frac{k_2 h_2}{2}. \quad (9)$$

Отсюда, принимая во внимание (2), следует

$$|\rho| \leq 1. \quad (10)$$

Устойчивость, а вместе с ней и сходимость схемы доказаны. При несколько более жестких условиях, чем условие эллиптичности (2), можно применить метод расщепления и для трехмерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (11)$$

В этом случае можно применить следующую схему, предложенную автором [15, 18]:

$$\begin{aligned}
 \frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2}\Lambda_{11}u^{n+1/6} + \Lambda_{12}u^n; \\
 \frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau} &= \Lambda_{21}u^{n+1/6} + \frac{1}{2}\Lambda_{22}u^{n+2/6}; \\
 \frac{u^{n+3/6} - u^{n+2/6}}{\tau} &= \frac{1}{2}\Lambda_{11}u^{n+3/6} + \Lambda_{13}u^{n+2/6}; \\
 \frac{u^{n+4/6} - u^{n+3/6}}{\tau} &= \Lambda_{31}u^{n+3/6} + \frac{1}{2}\Lambda_{33}u^{n+4/6}; \\
 \frac{u^{n+5/6} - u^{n+4/6}}{\tau} &= \frac{1}{2}\Lambda_{22}u^{n+5/6} + \Lambda_{23}u^{n+4/6}; \\
 \frac{u^{n+1} - u^{n+5/6}}{\tau} &= \Lambda_{32}u^{n+5/6} + \frac{1}{2}\Lambda_{33}u^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Схема (12) аппроксимирует (11) и устойчива, если положительно определена матрица $\|b_{ij}\|$, где

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad b_{ij} = \frac{a_{ii}}{2}. \tag{13}$$

И. Д. Софронов [65, 66] предложил ряд схем интегрирования уравнения (1), основанных на приеме предиктор - корректор (см. п. 7).

П. 5. СХЕМА ФАКТОРИЗАЦИИ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

В работе Бэйкера, Олифанта [16] был предложен следующий способ интегрирования уравнения теплопроводности (1.5.1). Пусть

$$\Omega u^{n+1} = f^n \tag{1}$$

есть некоторая неявная схема интегрирования (1.5.1), Ω – разностный оператор на верхнем шаге, f^n – результат применения разностных опе-

раторов на нижних шагах. Записанная индексно, схема (1) имеет вид

$$\sum_{k,l} C_{ij}^{kl} u_{kl}^{n+1} = f_{ij}^n. \quad (2)$$

В работе [16] доказывается, что если ограничиться рассмотрением девятиточечных операторов, т. е. операторов, для которых справедливо соотношение

$$C_{ij}^{kl} = 0 \text{ при } |i - k| > 1, |j - l| > 1, \quad (3)$$

то можно выбрать оператор Ω таким образом, чтобы он представлялся в виде произведения двух трехточечных операторов A, B . Это означает

$$C_{ij}^{kl} = A_i^k B_j^l, \quad (4)$$

где

$$A_i^k = 0, \quad |i - k| > 1; \quad B_j^l = 0, \quad |j - l| > 1. \quad (5)$$

В работе [16] схема (1) возникла из трехслойной аппроксимации уравнения теплопроводности (1.5.1)

$$\frac{1,5u^{n+1} - 2u^n + 0,5u^{n-1}}{\tau} = \Lambda u^{n+1}, \quad (6)$$

где Λ – некоторый девятиточечный оператор. Тогда

$$\Omega = 1,5E - \tau\Lambda; \quad f^n = 2u^n - 0,5u^{n-1}. \quad (7)$$

Оператор Λ подбирается так, чтобы аппроксимация

$$\Lambda \prec L = L_1 + L_2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

имела второй порядок точности и чтобы оператор Ω из (7) представлялся в виде произведения двух трехточечных операторов в смысле (4). Оказывается, что этими требованиями Λ определяется однозначно. После этого задача решения системы уравнений (2) сводится к двум прогонкам. Действительно, положим

$$A = \{A_i^k\}; \quad B = \{B_i^k\}; \quad v^{n+1} = \{v_{ij}^{n+1}\}; \quad (8)$$

$$v_{jl}^{n+1} = B_j^k u_{kl}^{n+1}; \quad (v^{n+1} = B u^{n+1}).$$

Тогда уравнение (1) распадается на два уравнения

$$A v^{n+1} = f^n, \quad B u^{n+1} = v^{n+1}, \quad (9)$$

каждое из которых решается трехточечной прогонкой.

В работе Бэйкера [17] дано обобщение схемы факторизации верхнего оператора на случай многомерного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами. Как было любезно указано автору В.А. Сучковым, схема факторизации оператора, предложенная Бэйкером, Олифантом в работе [16], аналогична схеме расщепления и переходит в нее полностью при замене трехслойной аппроксимации (6) обычной двухслойной.

П. 6. СХЕМА ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРА

В работе автора [18] был описан прием приближенной факторизации оператора на примере уравнения теплопроводности. Пусть

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1}; \quad \Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_i; \quad \Lambda_i = a^2 \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} \quad (1)$$

есть простейшая неявная аппроксимация уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Перепишем уравнение (1) в виде

$$(E - \tau\Lambda)u^{n+1} = Eu^n. \quad (2)$$

Факторизуем оператор $E - \tau\Lambda$ с точностью до членов порядка τ^2 . Для этого заменим оператор $E - \tau\Lambda$ на факторизованный

$$(E - \tau\Lambda_1)(E - \tau\Lambda_2) \dots (E - \tau\Lambda_m) = E - \tau\Lambda + \tau^2\Phi,$$

$$\Phi = \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j - \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + (-1)^m \tau^{m-2} \Lambda_1 \dots \Lambda_m.$$

Заменим разностную схему (2) на факторизованную

$$\Omega u^{n+1} = (E - \tau\Lambda_1)(E - \tau\Lambda_2) \dots (E - \tau\Lambda_m)u^{n+1} = Eu^n. \quad (3)$$

Введем вспомогательные величины $u^{n+\frac{1}{m}}, \dots, u^{n+\frac{m-1}{m}}$ с помощью равенств

$$(E - \tau\Lambda_1)u^{n+1/m} = Eu^n;$$

$$(E - \tau\Lambda_2)u^{n+2/m} = Eu^{n+1/m};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(E - \tau\Lambda_m)u^{n+1} = Eu^{n+\frac{m-1}{m}};$$

Схема расщепления (4) эквивалентна схеме приближенной факторизации верхнего оператора (3).

Совершенно аналогично производится факторизация верхнего оператора в схеме Бэйкера, Олифанта.

Рассмотрим трехслойную аппроксимацию двумерного уравнения теплопроводности

$$\frac{1,5u^{n+1} - 2u^n + 0,5u^{n-1}}{\tau} = \Lambda u^{n+1}, \quad (5)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_i \prec L_i = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (6)$$

Запишем схему (5) в виде

$$(1,5E - \tau\Lambda)u^{n+1} = f^n, \quad f^n = 2u^n - 0,5u^{n-1}. \quad (7)$$

Заменяя оператор $1,5E - \tau\Lambda$ факторизованным, получаем схему

$$\Omega u^{n+1} = 1,5(E - \frac{\tau}{1,5}\Lambda_1)(E - \frac{\tau}{1,5}\Lambda_2)u^{n+1} = f^n \quad (8)$$

с девятиточечным факторизованным оператором Ω , которая совпадает со схемой Бэйкера и Олифанта.

Заметим, что точная факторизация верхнего оператора Ω с помощью формул (5.2) - (5.4) невозможна в случае уравнения диффузии с переменными коэффициентами, так как в этом случае необходимы дополнительные итерации (см. [19]), напоминающие схему Н.Е. Булеева [20]. В то же время метод приближенной факторизации остается в силе и для уравнений с переменными коэффициентами.

Метод построения схем с факторизованным верхним оператором для широкого класса уравнений с переменными коэффициентами был разработан Е.Г. Дьяконовым [21-24], который с помощью априорных оценок доказал его сходимость, а также дал алгоритм решения краевых условий⁴. Подробнее о методе приближенной факторизации см. §9, п. 3.

⁴Е.Г. Дьяконов употребляет термин «метод расщепляющегося оператора».

П. 7. СХЕМА ПРЕДИКТОР - КОРРЕКТОР

Как было показано в пп. 1, 2, схема п. п. п., имея точность 2-го порядка, но будучи условно устойчивой, неприменима в трехмерном случае, схема с. п. будет абсолютно устойчивой, но имеет первый порядок точности по t .

В работе Брайна [25] была предложена абсолютно устойчивая реализуемая в трехточечных прогонках схема 2-го порядка точности по t и пространственным переменным. Схема получается из схемы стабилизирующей поправки применением приема *предиктора - корректора (пересчет)*.

Поясним прием предиктора - корректора на простом примере схемы интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t). \quad (1)$$

Обычная схема трапеции

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = \frac{f(x^n, t^n) + f(x^{n+1}, t^{n+1})}{2} \quad (2a)$$

или

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f\left(\frac{x^{n+1} + x^n}{2}, t^{n+1/2}\right) \quad (2б)$$

требует итераций в силу нелинейности правой части. Схема предиктор - корректор

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau/2} = f(x^n, t^n), \quad (3a)$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = f(x^{n+1/2}, t^{n+1/2}) \quad (3б)$$

имеет второй порядок точности и не требует итераций.

Аналогичный прием может быть применен и для уравнений с частными производными. В работе [25] была предложена схема интегрирования уравнения (1.11), основанная на приеме предиктора - корректора. Эта схема имеет вид

$$\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_1 u^{n+1/6} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n, \quad (4a)$$

$$\frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau/2} = \Lambda_2 (u^{n+2/6} - u^n), \quad (4б)$$

$$\frac{u^{n+3/6} - u^{n+2/6}}{\tau/2} = \Lambda_3(u^{n+3/6} - u^n), \quad (4\text{в})$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/6} + \Lambda_2 u^{n+2/6} + \Lambda_3 u^{n+3/6}. \quad (4\text{г})$$

Уравнения (4а - в) представляют собой предиктор (схема стабилизирующей поправки), выводящий u на $t = (n + 1/2)\tau$, уравнение (4г) есть корректор.

Покажем, что схема (4) абсолютно устойчива, имеет второй порядок точности по t и x_1, x_2, x_3 . Исключая дробные шаги $u^{n+1/6}, u^{n+2/6}, u^{n+3/6}$ из (4а - г), имеем

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{\tau^2}{4} (\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \\ + \frac{\tau^3}{8} \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда следует абсолютная устойчивость и второй порядок точности схемы (4).

В работе Дугласа [26] была предложена схема в дробных шагах, также имеющая абсолютную устойчивость и точность 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Lambda_1(u^{n+1/3} + u^n) + \Lambda_2u^n + \Lambda_3u^n &= \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau}; \\ \frac{1}{2}\Lambda_1(u^{n+1/3} + u^n) + \frac{1}{2}\Lambda_2(u^{n+2/3} + u^n) + \Lambda_3u^n &= \frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau}; \\ \frac{1}{2}\Lambda_1(u^{n+1/3} + u^n) + \frac{1}{2}\Lambda_2(u^{n+2/3} + u^n) + \frac{1}{2}\Lambda_3(u^{n+1} + u^n) &= \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}. \end{aligned} \quad (6)$$

Схему (6) можно переписать также в виде

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2}\Lambda_1(u^{n+1/3} + u^n) + \Lambda_2u^n + \Lambda_3u^n; \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \frac{1}{2}\Lambda_2(u^{n+2/3} - u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \frac{1}{2}\Lambda_3(u^{n+1} - u^n). \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда следует, что она имеет характер схемы стабилизирующей поправки. Исключенная схема совпадает с (5), т. е. схемы (4), (6) эквивалентны.

Укажем еще на одну схему типа предиктор - корректор:

$$\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_1u^{n+1/6}, \quad (8a)$$

$$\frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau/2} = \Lambda_2u^{n+2/6}, \quad (8б)$$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n+2/6}}{\tau/2} = \Lambda_3u^{n+1/2}, \quad (8в)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1/2}. \quad (8г)$$

Формулы (8a - в) составляют предиктор на основе схемы расщепления, формула (8г) есть корректор; схема в целых шагах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 (\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \\ &+ \left(\frac{\tau}{2}\right)^3 \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}. \end{aligned} \quad (9)$$

Схема в целых шагах совпадает с (5), т. е. схема (8) эквивалентна предыдущим схемам.

Схемы, основанные на приеме предиктора - корректора, мы будем называть также *схемами аппроксимационной поправки*.

II. 8. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ СХЕМ С ДРОБНЫМИ ШАГАМИ

Сделаем ряд замечаний по поводу рассмотренных схем.

1. Схемы с дробными шагами могут применяться и в одномерных задачах. Рассмотрим, например, схемы В.К. Саульева [27] локально-неявного счета одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda u^{n+1/2}, \quad (1)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \frac{1}{2}\Lambda u^{n+1/2}, \quad \Lambda = a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2},$$

которая воспроизводит схему продольно-поперечной прогонки для одного из направлений, например x_1 . Покажем, что схема (1) эквивалентна двухслойной схеме с весами при $\alpha = 1/2$ (схема Кранка-Николсона). Записывая (1) в виде

$$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda)u^{n+1/2} = u^n, \quad u^{n+1} = (E + \frac{\tau}{2}\Lambda)u^{n+1/2}, \quad (2)$$

и исключая $u^{n+1/2}$, получаем

$$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda)u^{n+1} = (E + \frac{\tau}{2}\Lambda)u^n. \quad (3)$$

Откуда следует

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, \quad (4)$$

ч.т.д.

2. Перепишем схему (1) в целых индексах:

$$\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} = \Lambda u^n, \quad (5a)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n. \quad (5б)$$

Складывая уравнения (5), получаем

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = 2\Lambda u^n. \quad (6)$$

Схема (6) внешне напоминает схему «крест», однако формулы (5) показывают, что схема (6) является неоднородной и ее нельзя трактовать как однородную схему «крест». Для получения однородной схемы следует произвести исключение u^n из (5а), (5б), и аналогично (4) получаем

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{\tau} = \Lambda(u^{n-1} + u^{n+1}). \quad (7)$$

Таким образом, одна и та же формула (6) может быть по-разному истолкована, в зависимости от закона определения u^n .

Укажем еще аналогичный пример. Схема стабилизирующей поправки

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n; \quad (8)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(u^{n+1} - u^n)$$

при сложении уравнений (8) дает

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^{n+1}. \quad (9)$$

Мажорантная схема расщепления

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2}; \quad (10)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 u^{n+1}$$

также после сложения формально дает уравнение (9), однако схемы (8), (10) различны, и формально одно и то же уравнение (9) в обеих схемах имеет различный смысл, так как величина $u^{n+1/2}$ определяется в каждой схеме по-своему. Соответствующие схемы в целых шагах, получаемые исключением $u^{n+1/2}$, не совпадают.

3. Одной и той же схеме в целых шагах могут отвечать различные схемы в дробных шагах. Например, схема в целых шагах

$$(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)u^n \quad (11)$$

может быть реализована следующими схемами в дробных шагах:

а) схема п. п. п.

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^{n+1}); \end{aligned} \quad (12)$$

б) схема расщепления

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}), \quad \beta = 1 - \alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

при $\alpha = 1/2$;

в) схема приближенной факторизации оператора

$$\begin{aligned} (E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)u^{n+1/2} = f^n &= (E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)u^n; \\ (E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)u^{n+1} &= u^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, схемы (12-14) могут рассматриваться как реализации одной и той же схемы (11). Тем самым схемы (12-14), без учета краевых условий, эквивалентны.

В случае уравнения с переменными коэффициентами соответствующие схемы с целыми шагами не совпадают и схемы (12-14) становятся неэквивалентными. Кроме того, одна и та же схема с дробными шагами может иметь различные реализации краевых условий.

4. Метод расщепления с весами при $m \geq 3$, $\alpha = \frac{1}{2}$ обладает наибольшей простотой, сохраняя в то же время свойства сильной устойчивости и точности 2-го порядка. Тем не менее применение схем предиктор - корректор (см. п. 7) целесообразно в тех случаях, когда нужно интегрировать уравнение теплопроводности в промежутке времени, включающем

выход на асимптотический режим ($t \rightarrow \infty$). В этом случае схемы предиктор - корректор, в отличие от схемы расщепления, допускают укрупнение шага, так как обладают свойством полной аппроксимации (см. § 4).

П. 9. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В МЕТОДЕ ДРОБНЫХ ШАГОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

До сих пор мы вели рассмотрение задачи Коши в полосе $|x| < \infty$, $0 \leq t \leq T$, считая, что начальные данные представляются рядом или интегралом Фурье. При этом не было граничных точек сетки, и разностные уравнения были одинаковы во всех точках сетки. На практике приходится решать смешанную задачу Коши, когда разностные уравнения на границе иные, чем во внутренних точках области. В результате остаточные члены схемы на границе могут менять порядок малости по сравнению с внутренними точками. Таким образом, краевые условия сказываются на точности схемы.

Первый анализ краевых условий в схемах с дробными шагами для уравнения теплопроводности был дан в статье Е.Г. Дьяконова [22]¹. Следуя этой работе, рассмотрим для схемы расщепления три реализации краевых условий. Для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \quad (1)$$

поставим смешанную задачу Коши

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, 0) &= u_0(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in G; \\ u(x_1, x_2, t) &= f(x_1, x_2, t), & (x_1, x_2, t) \in \Gamma \end{aligned} \quad (1a)$$

в цилиндрической области $\Pi = G \times \Gamma$, где G – квадрат, $0 < x_1, x_2 < 1$; γ – его граница; $H = [0, t_0]$, $\Gamma = \gamma \times H$ (см. рис. 1). Для задачи (1) будем

¹К сожалению, работа содержала арифметическую ошибку, которая привела автора к неправильной оценке метода расщепления. Тем не менее метод исследования краевых условий, предложенный Е.Г. Дьяконовым, в своей основе является правильным.

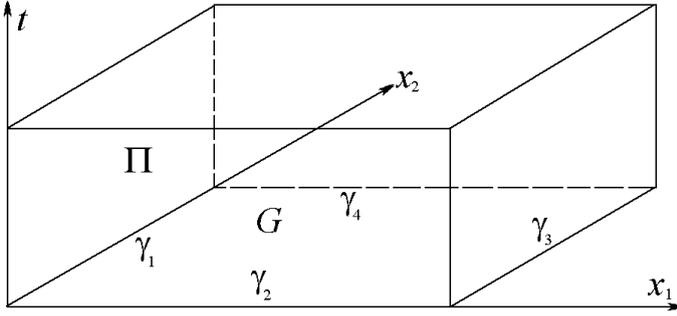


Рис. 1. Область смешанной задачи Коши.

использовать схему расщепления

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n), \quad (2a)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}), \quad (2б)$$

и схему приближенной факторизации оператора

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \beta\tau\Lambda_1)(E + \beta\tau\Lambda_2)u^n \quad (3)$$

в следующей ее реализации²:

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)u^{n+1/2} = (E + \beta\tau\Lambda_1)(E + \beta\tau\Lambda_2)u^n, \quad (4a)$$

$$(E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+1} = u^{n+1/2}. \quad (4б)$$

Рассмотрим для схемы (2) следующую реализацию краевых условий:

$$u^{n+1/2}(x_1, x_2) = f[x_1, x_2, (n + 1/2)\tau], \quad (x_1, x_2) \in \gamma; \quad (A)$$

$$u^{n+1}(x_1, x_2) = f[x_1, x_2, (n + 1)\tau], \quad (x_1, x_2) \in \gamma.$$

В случае (A) прогонка по границе не делается, на границе значения u всегда равны граничным значениям на соответствующий момент времени.

²Заметим, что схемы (2), (3), (4) эквивалентны для чисто периодической задачи Коши, но не эквивалентны в случае краевой задачи (1a). В случае переменных коэффициентов схема (3) вообще не эквивалентна (2).

Отсюда следует, что на границе соотношения (2) принимают вид

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n) + F_1^n; \quad (5)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}) + F_2^n,$$

где

$$F_1^n = \frac{f^{n+1/2} - f^n}{\tau} - \Lambda_1(\alpha f^{n+1/2} + \beta f^n), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4; \quad (6)$$

$$F_2^n = \frac{f^{n+1} - f^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha f^{n+1} + \beta f^{n+1/2}), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3.$$

Учитывая это, разностную схему (2) можно записать в виде

$$A_1 u^{n+1/2} - B_1 u^n = g_1^n; \quad (7a)$$

$$A_2 u^{n+1} - B_2 u^{n+1/2} = g_2^n, \quad (7b)$$

где

$$A_s = E - \alpha \tau \Lambda_s, \quad B_s = E + \beta \tau \Lambda_s, \quad s = 1, 2; \quad (8)$$

$$g_1^n = 0, \quad g_2^n = 0, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

$$g_1^n = \tau F_1^n, \quad g_2^n = \tau F_2^n, \quad (x_1, x_2) \in \gamma$$

Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_1 B_2 u^n = R_n, \quad R_n = B_2 g_1^n + A_1 g_2^n. \quad (9)$$

Ясно, что $R_n = 0$ всюду внутри G , кроме точек сетки, лежащих на линии ω , отстоящей от γ на один интервал (см. рис. 2), где

$$R_n = B_2 g_1^n, \quad (x_1, x_2) \in \omega_2, \omega_4; \quad R_n = A_1 g_2^n, \quad (x_1, x_2) \in \omega_1, \omega_3. \quad (10)$$

Простые вычисления дают:

$$R_n = B_2 g_1^n = \beta \frac{\tau^2}{h_2^2} F_1^n, \quad (x_1, x_2) \in \omega_2, \omega_4; \quad (11)$$

$$R_n = A_1 g_2^n = -\alpha \frac{\tau^2}{h_1^2} F_2^n, \quad (x_1, x_2) \in \omega_1, \omega_3.$$

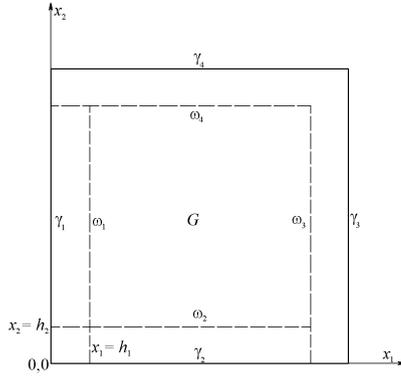


Рис. 2. Граница γ и множество ω . $(N_1 + 1)h_1 = 1$, $(N_2 + 1)h_2 = 1$.

Отсюда следует, что при законе предельного перехода

$$\frac{\tau^2}{h_i^2} = \text{const}$$

ошибка аппроксимации в точках на ω равна $O(1)$, т. е. конечна. Так как во всех остальных внутренних точках G она равна $O(\tau)$, то, оценивая ошибку в L_2 , имеем $\|u\|_{L_2} = O(\tau^{1/4})$. Мы видим, что большая ошибка аппроксимации связана с нарушением соотношений (2) на границе. Реализация (A) была рассмотрена в работе [22].

Рассмотрим теперь другую реализацию краевых условий в схеме расщепления:

$$\text{а) } u^{n+1/2} = f^{n+1/2}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } A_1 u^{n+1/2}(x_1, x_2) - B_1 u^n(x_1, x_2) = A_1 u^{n+1/2} - B_1 f^n = 0, \\ (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4; \end{aligned} \quad (\text{Б})$$

$$\text{в) } u^{n+1} = f^{n+1}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4;$$

$$\begin{aligned} \text{г) } A_2 u^{n+1}(x_1, x_2) - B_2 u^{n+1/2}(x_1, x_2) = A_2 u^{n+1} - B_2 f^{n+1/2} = 0, \\ (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3. \end{aligned}$$

В случае (Б) на первом дробном шаге краевые условия выполняются точно на $\gamma_1 \gamma_3$, на γ_2, γ_4 они заменяются на условия б); на втором дробном шаге, наоборот, краевые условия выполняются точно на γ_2, γ_4 на $\gamma_1 \gamma_3$ заменяются на условия г). Выполнение условий б), г) означает, что прогонки ведутся и по границам. При таком способе мы удовлетворяем краевым условиям на границе через один дробный шаг, но зато уравнения (2) выполняются всюду в \bar{G} , следовательно, исключенная схема в целых шагах имеет вид (3) всюду в G , т. е. порядок аппроксимации равен $O(\tau) + O(h^2)$ при $\alpha \neq \frac{1}{2}$ и $O(\tau^2) + O(h^2)$ при $\alpha = \frac{1}{2}$. Покажем, что при прогонке вдоль границы мы делаем ошибку в краевом условии порядка $O(\tau)$. Покажем это, например, для γ_2, γ_4 .

На n -ом шаге на γ_2, γ_4 имеем $u^n = f^n$; $u^{n+1/2}$ определяется из условия (2а), которое переписывается в виде

$$A_1 u^{n+1/2} = B_1 u^n = B_1 f^n. \quad (12)$$

Прогоночное соотношение (12) замыкается краевыми условиями

$$u^{n+1/2} = f^{n+1/2} \quad (13)$$

при $x_1 = 0; 1$. Вычитая из соотношения (12) тождество

$$A_1 f^{n+1/2} = A_1 f^{n+1/2}$$

и обозначая разность $u^{n+1/2} - f^{n+1/2}$ через $v^{n+1/2}$, имеем

$$A_1 v^{n+1/2} = B_1 f^n - A_1 f^{n+1/2} = F^n. \quad (14)$$

с краевыми условиями

$$v^{n+1/2} = 0 \quad (15)$$

при $x_1 = 0; 1$. Из (14) имеем

$$v^{n+1/2} = A_1^{-1} F^n.$$

Но

$$\|F^n\| = O(\tau), \quad \|A_1^{-1}\| < 1,$$

следовательно,

$$\|v^{n+1/2}\| = O(\tau). \quad (16)$$

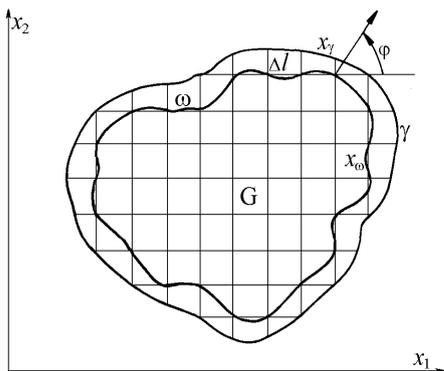


Рис. 3. Метод (Б) для произвольной области G .

необходимо знать $u^{n+1/2}$ на γ_1, γ_3 . Эти значения $u^{n+1/2}$ определяются из соотношения (4б), которое на γ_1, γ_3 переходит в

$$u^{n+1/2} = (E - \beta\tau\Lambda_2)f^{n+1}. \quad (17)$$

Счет проводится в следующем порядке: из соотношения (17) определяется $u^{n+1/2}$ на γ_1, γ_3 , после этого прогонкой решается уравнение (4а), получив, таким образом, $u^{n+1/2}$ в G , решаем прогонкой (4б), полагая на γ_2, γ_4

$$u^{n+1} = f^{n+1}. \quad (18)$$

Следовательно, всюду в G удовлетворяется уравнение (3) в целых шагах, на γ выполняется соотношение

$$u^n = f^n, \quad u^{n+1} = f^{n+1} \quad (B)$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ схема (B) дает порядок аппроксимации $O(\tau^2) + O(h^2)$.

Сравним теперь методы счета границы (A), (B), (B). Метод (A) явно неудовлетворительный. Метод (B) превосходит метод (B) по точности, однако метод (B) имеет преимущество общности.

Действительно, рассмотрим область G , ограниченную произвольным контуром γ , (см. рис. 3). Тогда метод (B) неприменим. Метод (B) остается в силе: для решения уравнений (2а) проводится прогонка по горизонталь-

Таким образом, при прогонке по x_1 мы совершаем прогонку и по γ_2, γ_4 , отклоняясь от истинных краевых условий на величину $O(\tau)$ и сохраняя истинные краевые условия на γ_1, γ_3 ; при прогонке по x_2 , наоборот, сохраняются краевые условия на γ_2, γ_4 , совершается прогонка по γ_1, γ_3 с отклонением от истинных краевых условий на $O(\tau)$. В итоге имеем точность $O(\tau) + O(h^2)$.

Рассмотрим, наконец, третий способ удовлетворения краевых условий, соответствующий реализации (4) схемы (3). Для прогонки $u^{n+1/2}$ по x_1 необ-

ным линиям сетки с краевыми условиями на концах горизонтальных отрезков; для решения уравнений (2б) проводится прогонка по вертикальным линиям сетки с краевыми условиями на концах вертикальных отрезков. При этом концы горизонтальных и вертикальных отрезков сетки не обязаны совпадать, т. е. граница не обязательно содержит только точки сетки (*несогласованная сетка*). Метод (В) становится неэффективным даже в случае области, состоящей из конечного числа прямоугольников.

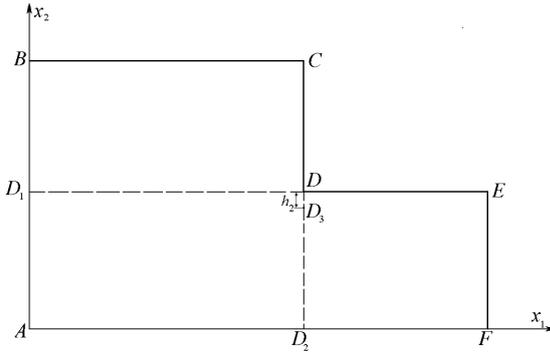


Рис. 4. Реализация метода (В) для области G , состоящей из прямоугольников.

Например, для области, изображенной на рис. 4, в угловых точках A, B, C, D, E, F величина $u^{n+1/2}$ не может быть определена, следовательно, прогонка по DD_1 невозможна.

В этом случае метод (В) реализуется так. С помощью формул (17) определяется $u^{n+1/2}$ на AB, CD, EF . После этого делается прогонка по x_1 по всем внутренним горизонтальным линиям сетки, кроме линии D_1D , и всюду в области G , кроме D_1D , определяется $u^{n+1/2}$. Затем делается прогонка по x_2 в $DEFD_2$ и u^{n+l} определяется всюду в $DEFD_2$, в частности в точке D_3 . С помощью (17) определяем $u^{n+1/2}$ в точке D , делаем прогонку $u^{n+1/2}$ по D_1D , после чего становится возможным определение u^{n+l} в $ABCD_2$ с помощью прогонки по x_2 . Ясно, что с увеличением числа угловых точек алгоритм становится весьма громоздким. В то же время метод (Б) остается в силе.

Н.Н. Анучиной (частное сообщение) предложен более общий метод рассмотрения краевых условий для метода дробных шагов (*метод неопре-*

деленных функций)⁷. Проиллюстрируем этот метод на примере схемы расщепления. Обозначим значения $u^n, u^{n+1/2}$ на границе γ через ψ^n соответственно φ^n . Ясно, что величины ψ^n, φ^n не обязаны совпадать с f^n , соответственно $f^{n+1/2}$.

Соотношения (2) на границе γ принимают вид (5), где

$$F_1^n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\tau} - \Lambda_1(\alpha\varphi^n + \beta\psi^n) = \frac{1}{\tau}(A_1\varphi^n - B_1\psi^n),$$

$$(x_1, x_2) \in \gamma_2\gamma_4; \quad (19)$$

$$F_2^n = \frac{\psi^{n+1} - \varphi^n}{\tau} - \Lambda_2(\alpha\psi^{n+1} + \beta\varphi^n) = \frac{1}{\tau}(A_2\psi^{n+1} - B_2\varphi^n),$$

$$(x_1, x_2) \in \gamma_1\gamma_3.$$

Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид

$$A_1A_2u^{n+1} - B_1B_2u^n = R_n, \quad (20)$$

$R_n = 0$ всюду в G , кроме ω , где

$$R_n = B_2(A_1\varphi^n - B_1\psi^n), \quad (x_1, x_2) \in \omega_2, \omega_4; \quad (21)$$

$$R_n = A_1(A_2\psi^{n+1} - B_2\varphi^n), \quad (x_1, x_2) \in \omega_1, \omega_3.$$

Задача состоит в подборе функций ψ^n, φ^n так, чтобы минимизировать ошибку R_n . Как было уже показано, тривиальный выбор $\psi^n = f^n, \varphi^n = f^{n+1/2}$ приводит к варианту (A), дающему малую точность.

Для того чтобы $R_n = 0$ всюду в G , включая ω , необходимо и достаточно условий

$$A_1\varphi^n - B_1\psi^n = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3; \quad (22a)$$

$$A_2\psi^{n+1} - B_2\varphi^n = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4. \quad (22б)$$

Если положить

$$\psi^n = f^n, \quad \psi^{n+1} = f^{n+1}, \quad (x_1, x_2) \in \gamma, \quad (23)$$

то уравнения (22) позволяют определить φ^n . Однако уравнение (22a) является плохо обусловленным, и решать его методом прогонки нельзя.

⁷Как нам стало известно, аналогичные результаты получены независимо С.А. Кряквиной. По поводу граничных условий см. также работы А.А. Самарского [63,91].

Сохраняя предположение (23), выберем φ^n так, чтобы $R_n = O(\tau^2)$. Для этого достаточно, например, положить

$$\begin{aligned}\varphi^n &= (E + k_1\tau\Lambda_1)\psi^n, & (x_1, x_2) \in \omega_2, \omega_4; \\ \varphi^n &= (E + k_2\tau\Lambda_2)\psi^{n+1}, & (x_1, x_2) \in \omega_1, \omega_3.\end{aligned}\tag{24}$$

Подберем константы k_1, k_2 так, чтобы

$$\begin{aligned}R_n &= B_2(A_1\varphi^n - B_1\psi^n) = O(\tau^2), & (x_1, x_2) \in \omega_2, \omega_4; \\ R_n &= A_1(A_2\psi^{n+1} - B_2\varphi^n) = O(\tau^2), & (x_1, x_2) \in \omega_1, \omega_3.\end{aligned}\tag{25}$$

При $k_1 = 1, k_2 = -1$ имеем

$$\begin{aligned}R_n &= -\frac{\alpha\beta\tau}{h_2^2}\tau^2\Lambda_1^2f^n, & (x_1, x_2) \in \omega_2, \omega_4; \\ R_n &= -\frac{\alpha\beta\tau}{h_1^2}\tau^2\Lambda_2^2f^{n+1}, & (x_1, x_2) \in \omega_1, \omega_3.\end{aligned}\tag{26}$$

При законе предельного перехода $\tau/h_1^2 = \text{const}$, $\tau/h_2^2 = \text{const}$ и достаточной гладкости f имеем требуемую точность. Заметим, однако, что аппроксимация (26) является неабсолютной. Кроме того, если f^n является разрывной функцией, порядок аппроксимации (26) понижается.

Положим теперь (способ Б):

$$\varphi^n = f^{n+1/2}, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3;\tag{27}$$

$$A_1\varphi^n - B_1f^n = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4;$$

$$\psi^{n+1} = f^{n+1}, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4;\tag{28}$$

$$A_2\psi^{n+1} - B_1f^{n+1/2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3.$$

Так же, как и в случае (22), $R_n = 0$, но в отличие от (22) из (27) определяется не φ^n , а ψ^{n+1} .

Формулы (27), (28) дают порядок точности $O(\tau) + O(h^2)$ независимо от закона предельного перехода и от гладкости f^n .

Аналогичным образом исследуются другие схемы дробных шагов. Метод неопределенных функций переносится на случай криволинейных и внутренних границ и уравнений более сложной структуры.

Методу неопределенных функций можно придать более общую формулировку. Рассмотрим в качестве примера схему расщепления. Положим

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n) + q_1^n; \quad (29)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}) + q_2^n$$

с неопределенными пока функциями q_1, q_2 . Исключая из (29) $u^{n+1/2}$, получим

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \beta\tau\Lambda_1)(E + \beta\tau\Lambda_2)u^n + R, \quad (30)$$

$$R = \tau[(E + \beta\tau\Lambda_2)q_1 + (E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2]. \quad (31)$$

Потребуем, чтобы

$$R = 0, \quad q_1 = 0, \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (32)$$

Покажем, что условия (32) вместе с краевыми условиями однозначно определяют q_2 . Выберем, для определенности, реализацию (А). Тогда по формулам (7б)

$$q_1^n = g_1^n = A_1 f^{n+1/2} - B_1 f^n, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_2, \gamma_4; \quad (33)$$

$$q_2^n = g_2^n = A_2 f^{n+1} - B_2 f^n, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1, \gamma_3,$$

q_2 определяется в точках G из уравнений

$$(E + \beta\tau\Lambda_2)q_1^n + (E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2^n = 0, \quad (34)$$

которые разрешимы относительно q_2 в силу обратимости оператора $A_1 = E - \alpha\tau\Lambda_1$. Заметим, что в точках ω_2, ω_4 уравнения (34) имеют вид

$$\frac{\beta\tau}{h_2^2}g_1^n + (E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2^n = 0,$$

в остальных точках G вид

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2^n = 0.$$

Ясно, что аналогичный прием введения неопределенных функций – правых частей q_1, q_2 – может быть применен для любой схемы в дробных шагах.

Рассмотрим теперь краевые условия на криволинейных границах. Как уже говорилось, в случае первой краевой задачи способ (Б) применим и для криволинейной границы. Значительно большие трудности возникают при решении задачи Коши с краевыми условиями 2-го рода. Тогда вместо (1а) имеем (см. рис. 3)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \cos \varphi \frac{\partial u}{\partial x_1} + \sin \varphi \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2, t) \in \Gamma. \quad (35)$$

Укажем алгоритм решения краевых условий (35). Пусть u^n - разностное решение задачи Коши для уравнения (1) с краевыми условиями (35), определенное в области \overline{G} на момент времени $t = n\tau$. Определим u^{n+1} , пользуясь найденными значениями $u^n(\gamma)$. Для этого нужно применить схему расщепления (2) с краевыми условиями

$$u^{n+1}|_\gamma = u^{n+1/2}|_\gamma = u^n(\gamma). \quad (36)$$

После этого, пользуясь (35), исправим краевые условия u^{n+1} . Обозначим через ω совокупность точек сетки, ближайших к γ . Задав на ω значения u^{n+1} , определенные из (2), решим на γ уравнение (35). Это можно осуществить, например, опуская из точек ω нормаль на γ (см. рис. 3) и пользуясь соотношением

$$u^{n+1}(x_\gamma) - u^{n+1}(x_\omega) = \Delta l \cdot f^{n+1}(x_\omega), \quad (37)$$

где $f^{n+1}(x_\omega)$ - аппроксимация $f(x_1, x_2, t)$ из (35). Затем вновь решаются уравнения (2) с краевыми условиями из (36). После итераций переходим к следующему шагу.

По поводу решения краевой задачи второго рода в случае уравнений с неизвестной вектор-функцией см. § 5.

— \triangle —

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ К ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

П. 1. ПРОСТЕЙШИЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнения акустики

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

В (1) u можно толковать как скорость, v – удельный объем, a – массовую скорость звука, x – лагранжеву координату. Записанная в инвариантах Римана

$$r = u - av; \quad s = u + av, \quad (2)$$

система (1) принимает вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a \frac{\partial r}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial s}{\partial t} - a \frac{\partial s}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим основные схемы интегрирования (1) или, что то же, (3). а) Схема бегущего счета. Явная схема бегущего счета имеет вид

$$\frac{\Delta_0 r}{\tau} + a \frac{\Delta_{-1} r}{h} = 0; \quad \frac{\Delta_0 s}{\tau} - a \frac{\Delta_1 s}{h} = 0; \quad (4)$$

$$\Delta_0 = T_0 - E; \quad \Delta_1 = T_1 - E; \quad \Delta_{-1} = E - T_{-1},$$

где операторы сдвига T_1 , T_{-1} определяются в соответствии с (1.22), оператор T_0 сдвига по t определяется аналогично

$$T_0 f(x, t) = f(x, t + \tau.) \quad (5)$$

Переходя к индексной записи, имеем

$$\begin{aligned} \frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} + a \frac{r_i^n - r_{i-1}^n}{h} &= 0; \\ \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} - a \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{h} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В переменных u, v схема (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_0 u}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} v &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} u; \\ \frac{\Delta_0 v}{\tau} - \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u &= \frac{ah}{2} \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h^2} v. \end{aligned} \quad (7)$$

Нетрудно выразить оператор шага схемы (4)

$$\begin{aligned} r^{n+1} &= Cr^n, \quad C = E - \frac{a\tau}{h} \Delta_{-1}; \\ s^{n+1} &= Ds^n, \quad D = E + \frac{a\tau}{h} \Delta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

соответственно (7):

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \frac{C+D}{2} u^n - a \frac{C-D}{2} v^n; \\ v^{n+1} &= -\frac{C-D}{2} u^n + \frac{C+D}{2} v^n. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим неявные схемы. Неявная схема с весами имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{\Delta_0}{\tau} (\alpha_1 T_{-1} + \beta_1 E) + a \frac{\Delta_{-1}}{h} (\alpha_2 T_0 + \beta_2 E) \right] r &= 0; \\ \left[\frac{\Delta_0}{\tau} (\alpha_1 T_1 + \beta_1 E) - a \frac{\Delta_1}{h} (\alpha_2 T_0 + \beta_2 E) \right] s &= 0; \\ \alpha_s \geq 0; \quad \beta_s \geq 0; \quad \alpha_s + \beta_s &= 1, \quad s = 1; 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Переходя к индексной записи, имеем

$$\left(\alpha_1 \frac{r_{i-1}^{n+1} - r_{i-1}^n}{\tau} + \beta_1 \frac{r_i^{n+1} - r_i^n}{\tau} \right) + a \left(\alpha_2 \frac{r_i^{n+1} - r_{i-1}^{n+1}}{h} + \beta_2 \frac{r_i^n - r_{i-1}^n}{h} \right) = 0;$$

$$\left(\alpha_1 \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_{i+1}^n}{\tau} + \beta_1 \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} \right) - a \left(\alpha_2 \frac{s_{i+1}^{n+1} - s_i^{n+1}}{h} + \beta_2 \frac{s_{i+1}^n - s_i^n}{h} \right) = 0. \quad (11)$$

Оператор шага схемы (10) имеет вид

$$r^{n+1} = Cr^n; \quad s^{n+1} = Ds^n, \quad (12)$$

где

$$C = \left(\alpha_1 T_{-1} + \beta_1 E + a\alpha_2 \tau \frac{\Delta_{-1}}{h} \right)^{-1} \left(\alpha_1 T_{-1} + \beta_1 E - a\beta_2 \tau \frac{\Delta_{-1}}{h} \right); \quad (13)$$

$$D = \left(\alpha_1 T_1 + \beta_1 E - a\alpha_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right)^{-1} \left(\alpha_1 T_1 + \beta_1 E + a\beta_2 \tau \frac{\Delta_1}{h} \right).$$

Переходя к переменным u , v , вновь имеем формулу (9), но с C , D из (13).

Схема с весами (10) дает известные нам формулы бегущего счета, в том числе явную мажорантную ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$), неявную мажорантную^{*1} ($\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$), схему второго порядка точности ($\alpha_s = \beta_s = 1/2$, $s = 1, 2$).

б) Схема «крест»:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-1} v^n}{h} = 0; \quad \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1 u^{n+1}}{h} = 0. \quad (14)$$

в) Неявная схема с весами:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h} (\alpha_1 v^{n+1} + \beta_1 v^n) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h} (\alpha_2 u^{n+1} + \beta_2 u^n) = 0.$$

При $\alpha_s = \beta_s = 1/2$, ($s = 1, 2$) (15) имеет второй порядок точности (схема Неймана), при $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$ схема (15) переходит в схему «крест».

Схемы (9), (14), (15) будут нами положены в основу составления простых схем интегрирования многомерных уравнений акустики и волнового уравнения.

^{1*} Мажорантными мы называем схемы с положительными коэффициентами (см. [28]). Как правило, в случае постоянных коэффициентов эти схемы удовлетворяют свойству экстремума и устойчивы в C .

II. 2. ОДНОРОДНЫЕ НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Для параболического уравнения, имеющего бесконечную область зависимости, неявная аппроксимация, как впервые отмечено Лаасоненом [29], является естественной, поскольку в этом случае область зависимости будет бесконечной и для разностного уравнения.

В отличие от параболического, гиперболические уравнения имеют конечную область зависимости, поэтому, казалось бы, их естественной аппроксимацией является явная. Однако это не так.

Как показывает известный критерий Куранта, требования устойчивости определяются значениями величин в данной точке. В то же время требования точности определяются градиентами. В случае течений с малыми градиентами (русловые потоки, атмосферные потоки и т. д.) шаг τ , определяемый требованиями точности, намного превышает шаг, определяемый требованием устойчивости. Поэтому возникает необходимость в неявных схемах и для гиперболических уравнений.

Неявная схема для уравнений гидродинамики, основанная на методе бегущего счета, впервые была предложена Л.Д. Ландау, Н.Н. Мейманом, И.М. Халатниковым [30]. Первое теоретическое обоснование неявных схем для волнового уравнения с переменными коэффициентами было дано О.А. Ладыженской [31]. Неявные схемы для уравнения гидродинамики получили сейчас широкое распространение [32-35].

II. 3. НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Метод расщепления для многомерных гиперболических систем был предложен впервые в статье К.А. Багриновского, С.К. Годунова [36]. Авторы этой статьи рассматривали только явную аппроксимацию, для которой схема расщепления не дает больших преимуществ перед обычными явными схемами.

В работе Н.Н. Анучиной и автора [37] была предложена неявная схема расщепления для гиперболической системы в многомерном случае.

Рассмотрим уравнение акустики в двумерном случае

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (1)$$

Перепишем (1) в матричной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af, \quad (2)$$

где

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & a^2 D_1 \\ 0 & 0 & a^2 D_2 \\ D_1 & D_2 & 0 \end{array} \right\|, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f = \{u_1, u_2, v\}. \quad (3)$$

Построим схему расщепления, основанную на одномерной неявной схеме (1.15). На первом дробном шаге, опуская градиенты по x_2 , получаем схему

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1/2} - u_1^n}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} (\alpha v^{n+1/2} + \beta v^n) &= 0; & \frac{u_2^{n+1/2} - u_2^n}{\tau} &= 0; \\ \frac{v^{n+1/2} - v^n}{\tau} - \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha u_1^{n+1/2} + \beta u_1^n) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

На втором дробном шаге, опуская градиенты по x_1 имеем схему

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{n+1} - u_1^{n+1/2}}{\tau} &= 0; & \frac{u_2^{n+1} - u_2^{n+1/2}}{\tau} - a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} (\alpha v^{n+1} + \beta v^{n+1/2}) &= 0; \\ \frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\tau} - \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+1/2}) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для простоты мы положили

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta.$$

Ясно, что схема расщепления (4), (5) абсолютно устойчива при $\alpha \geq 1/2$. Покажем, что она аппроксимирует систему (1) или, что то же, эквивалентное системе (1) уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \right] = 0, \quad (6)$$

которому удовлетворяет каждая из величин u_1, u_2, v . Аппроксимацию будем доказывать методом исключения. Исключая из (4), (5) величины $u_1^{n+1/2}, u_2^{n+1/2}$, получаем 4 операторных уравнения с 4 неизвестными $u_1^n,$

$u_2^n, v^n, v^{n+1/2}$, которые можно записать в матричном виде

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{T_0 - E}{\tau} & 0 & -\beta a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} & -\alpha a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} \\ -\frac{\Delta_1}{h_1}(\alpha T_0 + \beta E) & 0 & -\frac{1}{\tau} E & \frac{1}{\tau} E \\ 0 & \frac{T_0 - E}{\tau} & -\alpha a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 & -\beta a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} \\ 0 & -\frac{\Delta_2}{h_2}(\alpha T_0 + \beta E) & \frac{1}{\tau} T_0 & -\frac{1}{\tau} E \end{array} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{array}{c} u_1^n \\ u_2^n \\ v^n \\ v^{n+1/2} \end{array} \right\| = 0. \quad (7)$$

Исключая из системы (7) $v^{n+1/2}$, получим систему

$$\left[\frac{T_0 - E}{\tau} - \alpha \tau a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} (\alpha T_0 + \beta E) \right] u_1^n - a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} v^n = 0;$$

$$\left[\frac{T_0 - E}{\tau} + \beta \tau a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha T_0 + \beta E) \right] u_2^n - a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 v^n = 0; \quad (8)$$

$$\frac{T_0 - E}{\tau} v^n - \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha T_0 + \beta E) u_1^n - \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha T_0 + \beta E) u_2^n = 0,$$

которую можно записать также в матричном виде

$$\frac{T_0 - E}{\tau} f^n = B f^n; \quad f^n = \{u_1^n, u_2^n, v^n\}, \quad (9)$$

где

$$B = \left\| \begin{array}{ccc} \alpha \tau a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} (\alpha T_0 + \beta E) & 0 & a^2 \frac{\Delta_{-1}}{h_1} \\ 0 & -\beta \tau a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha T_0 + \beta E) & a^2 \frac{\Delta_{-2}}{h_2} T_0 \\ \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha T_0 + \beta E) & \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha T_0 + \beta E) & 0 \end{array} \right\| \quad (10)$$

Нетрудно установить, что схема (9) аппроксимирует систему (2). Аппроксимацию можно доказать несколько иным образом. Приравнявая нулю определитель операторной системы (7), получаем операторное уравнение третьего порядка для любой из величин $f^n = u_1^n, u_2^n, v^n, v^{n+1/2}$:

$$\left[\left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right)^3 - a^2 \frac{T_0 - E}{\tau} (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -a^2 \frac{T_0 - E}{\tau} (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} + \\
& + a^4 \tau (\alpha^2 T_0 - \beta^2 E) (\alpha T_0 + \beta E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \Big] f^n = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Схема (11) аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial^3 f}{\partial t^3} = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) + \tau Lf, \quad (12)$$

где L – некоторый оператор, т. е. аппроксимирует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right) \right] = 0. \quad (13)$$

Пусть $\alpha = \beta = 1/2$. Тогда (11) перейдет в уравнение

$$\begin{aligned}
(T_0 - E) \Bigg[\left(\frac{T_0 - E}{\tau} \right)^2 - \frac{a^2}{4} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} - \frac{a^2}{4} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} + \\
+ a^4 \tau^2 \frac{1}{16} (T_0 + E)^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \cdot \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \Bigg] f^n = 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

После сокращения на $(T_0 - E)$ получаем уравнение 2-го порядка

$$\begin{aligned}
\frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \left[\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} + \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right] \frac{f^{n-1} + f^n + f^{n+1}}{4} - \\
- \frac{a^4}{16} \tau^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_2 \Delta_{-2}}{h_1^2 h_2^2} (f^{n-1} + 2f^n + f^{n+1}), \quad (15)
\end{aligned}$$

которое имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$.

Покажем, что схема (15) реализуется с помощью простых трехточечных прогонок. Выбирая в качестве f^n величину v^n (удельный объем), из первых двух уравнений (7) имеем после исключения u_1^n

$$\begin{aligned}
\frac{v^{n+3/2} - v^{n+1} - v^{n+1/2} + v^n}{\tau^2} = \\
= a^2 \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} [\alpha^2 v^{n+3/2} + \alpha \beta v^{n+1} + \alpha \beta v^{n+1/2} + \beta^2 v^n]. \quad (16)
\end{aligned}$$

Из последних двух уравнений (7) имеем после исключения u_2^n

$$\begin{aligned}
\frac{v^{n+2} - v^{n+3/2} - v^{n+1} + v^{n+1/2}}{\tau^2} = \\
= a^2 \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} [\alpha^2 v^{n+2} + \alpha \beta v^{n+3/2} + \alpha \beta v^{n+1} + \beta v^{n+1/2}]. \quad (17)
\end{aligned}$$

При $\alpha = \beta = 1/2$ уравнения (16), (17) реализуют уравнение (15).

П. 4. СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ БЕГУЩЕГО СЧЕТА

Применяя к системе (3.1) на каждом дробном шаге схему бегущего счета (1.9), (1.13), получаем

$$\begin{aligned} f^{n+1/2} &= \sigma_1 f^n; \\ f^{n+1} &= \sigma_2 f^{n+1/2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{C_1 + D_1}{2} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2} \\ 0 & E & 0 \\ -\frac{C_1 - D_1}{2a} & 0 & \frac{C_1 + D_1}{2} \end{array} \right\|, \\ \sigma_2 &= \left\| \begin{array}{ccc} E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{2} \\ 0 & -\frac{C_2 - D_2}{2a} & \frac{C_2 + D_2}{2} \end{array} \right\|. \end{aligned} \tag{2}$$

Операторы $C_s D_s$ в соответствии с (1.13) выражаются в виде

$$\begin{aligned} C_s &= \left[\alpha_1 T_{-s} + \beta_1 E + \alpha_2 a \tau \frac{\Delta_{-s}}{h_s} \right]^{-1} \left[\alpha_1 T_{-s} + \beta_1 E - \beta_2 a \tau \frac{\Delta_{-s}}{h_s} \right]; \\ D_s &= \left[\alpha_1 T_s + \beta_1 E - \alpha_2 a \tau \frac{\Delta_s}{h_s} \right]^{-1} \left[\alpha_1 T_s + \beta_1 E + \beta_2 a \tau \frac{\Delta_s}{h_s} \right]; \\ & \quad s = 1, 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда оператор шага σ схемы в целых шагах

$$f^{n+1} = \sigma f^n \tag{4}$$

выражается произведением матриц σ_2, σ_1

$$\sigma = \sigma_2 \cdot \sigma_1 =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{C_1 + D_1}{2} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2} \\ \frac{C_2 - D_2}{2} \cdot \frac{C_1 - D_1}{2} & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{2} \cdot \frac{C_1 + D_1}{2} \\ -\frac{(C_2 + D_2)(C_1 - D_1)}{4a} & -\frac{C_2 - D_2}{2a} & \frac{C_2 + D_2}{2} \cdot \frac{C_1 + D_1}{2} \end{array} \right\| \quad (5)$$

Покажем, что матрица

$$\frac{\sigma - E}{\tau} = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\frac{C_1 + D_1}{2} - E}{\tau} & 0 & -a \frac{C_1 - D_1}{2\tau} \\ \frac{(C_2 - D_2)(C_1 - D_1)}{4\tau} & \frac{\frac{C_2 + D_2}{2} - E}{\tau} & -a \frac{(C_2 - D_2)(C_1 + D_1)}{4\tau} \\ -\frac{(C_2 + D_2)(C_1 - D_1)}{4a\tau} & -\frac{C_2 - D_2}{2a\tau} & \frac{\frac{(C_2 + D_2)(C_1 + D_1)}{4} - E}{\tau} \end{array} \right\| \quad (6)$$

аппроксимирует матрицу A из (3.3). Нетрудно показать, что

$$\frac{C_i + D_i}{2} \prec E; \quad \frac{\frac{C_i + D_i}{2} - E}{\tau} \prec 0; \quad \frac{C_i - D_i}{2a\tau} \prec -\frac{\Delta_i}{h_i}. \quad (7)$$

Отсюда следует

$$\frac{\sigma - E}{\tau} \prec A, \quad (8)$$

что и требовалось доказать.

Так как каждая из схем бегущего счета устойчива

$$\|\sigma_1\| \leq 1; \quad \|\sigma_2\| < 1, \quad (8')$$

то справедливо неравенство

$$\|\sigma\| < 1. \quad (9)$$

Следовательно, схема расщепления бегущего счета сходится к системе (3.2). Сделаем два замечания.

1. Несмотря на то, что одномерные схемы бегущего счета могут иметь второй порядок точности (при $\alpha = \beta = 1/2$), схема расщепления в целых

шагах несимметрична и поэтому недостаточно точна. Для повышения точности следует симметризовать схему (4), положив ^{*2}

$$\Sigma = \frac{\sigma + \sigma^*}{2} = \frac{\sigma_2 \cdot \sigma_1 + \sigma_1 \cdot \sigma_2}{2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \sigma^* = \sigma_1 \sigma_2 = \\ & = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{C_1 + D_1}{2} & \frac{(C_1 - D_1)(C_2 - D_2)}{4} & -a \frac{(C_1 - D_1)(C_2 + D_2)}{4} \\ 0 & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{C_2 - D_2}{2} \\ -\frac{C_1 - D_1}{2a} & -\frac{(C_1 + D_1)(C_2 - D_2)}{4a} & \frac{(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}{4} \end{array} \right\|. \quad (11) \end{aligned}$$

Тогда оператор шага Σ примет симметричный вид

$$\Sigma = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{C_1 + D_1}{2} & \frac{(C_1 - D_1)(C_2 - D_2)}{4 \cdot 2} & -a \frac{(C_1 - D_1)C_4}{4 \cdot 2} \\ \frac{(C_2 - D_2)(C_1 - D_1)}{4 \cdot 2} & \frac{C_2 + D_2}{2} & -a \frac{(C_2 - D_2)C_3}{4 \cdot 2} \\ -\frac{C_4(C_1 - D_1)}{2 \cdot 4a} & -\frac{C_3(C_2 - D_2)}{2 \cdot 4a} & \frac{(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)}{4} \end{array} \right\|. \quad (12)$$

Здесь $C_3 = C_1 + D_1 + 2E$ и $C_4 = C_2 + D_2 + 2E$.

2. При перемножении операторных матриц их элементы (операторы) следует перемножать с учетом возможной некоммутативности.

П. 5. МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В предыдущих пунктах мы рассмотрели схемы в дробных шагах для уравнений акустики (3.1). Как было замечено, величины u_1 , u_2 , v удовлетворяют уравнению (3.6). Величина v удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) = 0. \quad (1)$$

^{2*} Это предложение принадлежит С.К. Годунову, А.В. Забродину [38]. Иной способ симметризации предложен в работе А.А. Самарского [94].

Поэтому указанная нами четырехслойная схема интегрирования (3.11) или эквивалентная схема в дробных шагах (3.16,17) могут быть упрощены в применении к v . Е.Г. Дьяконовым [39] была предложена трехслойная схема интегрирования (1), основанная на методе приближенной факторизации оператора. Пусть

$$\frac{v^{n+1} - 2v^n + v^{n-1}}{\tau^2} = \Lambda \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2}; \quad (2)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_s = a^2 \frac{\Delta_s \Delta_{-s}}{h_s^2}, \quad s = 1, 2,$$

есть однородная аппроксимация 2-го порядка точности уравнения (1). Перепишем (2) в виде

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda \right) \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} = v^n. \quad (3)$$

Факторизуем приближенно оператор в левой части (3)

$$E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda \asymp \left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1 \right) \left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2 \right) \quad (4)$$

и заменим схему (3) факторизованной

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1 \right) \left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2 \right) \frac{v^{n+1} + v^{n-1}}{2} = v^n. \quad (5)$$

Схема (5) реализуется двумя прогонками

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_1 \right) v^{n+1/2} = v^n; \quad (6)$$

$$\left(E - \frac{1}{2}\tau^2\Lambda_2 \right) \frac{v^{n+1} + v^n}{2} = v^{n+1/2}.$$

Нетрудно установить, что схема (5) устойчива и имеет второй порядок точности. Схемы расщепления для уравнения колебаний были построены А.Н. Коноваловым [40], А.А. Самарским [41].

II. 6. МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ И МАЖОРАНТНЫЕ СХЕМЫ

Для одномерных гиперболических систем схемы бегущего счета, основанные на мажорантной аппроксимации уравнений в инвариантах, приводят к схемам с положительными коэффициентами (мажорантные схемы).

При достаточно малом τ/h матрица C_0 будет положительной; матрицы $C_{-\alpha}$ тождественно положительны.

Если A_α – отрицательные матрицы, то в схеме (3) следует заменить $E - T_{-\alpha}$ на $T_\alpha - E$. В результате получаем схему

$$u^{n+1}(x) = C_0 u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^m C_\alpha T_\alpha u^n(x), \quad (6)$$

где

$$C_0 = E + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\tau}{h_\alpha} A_\alpha - \tau B, \quad C_1 = -\frac{\tau}{h_1} A_1;$$

$$C_2 = -\frac{\tau}{h_2} A_2, \dots, C_m = -\frac{\tau}{h_m} A_m;$$

$$T_\alpha f(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_\alpha + h_\alpha, \dots, x_m).$$

C_α – тождественно положительны;

C_0 – положительна при достаточно малом τ/h .

Если A_α – знакопеременные матрицы, то возможно представление

$$A_\alpha = \overset{1}{A}_\alpha + \overset{2}{A}_\alpha, \quad (7)$$

где матрица $\overset{1}{A}_\alpha$ неотрицательна, матрица $\overset{2}{A}_\alpha$ неположительна. Тогда схема

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} + \sum_{\alpha=1}^m \left[\overset{1}{A}_\alpha \frac{E - T_{-\alpha}}{h_\alpha} + \overset{2}{A}_\alpha \frac{T_\alpha - E}{h_\alpha} \right] u^n(x) + B u^n(x) = 0 \quad (8)$$

приводится к виду

$$u^{n+1}(x) = C_0 u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^m C_{-\alpha} T_{-\alpha} u^n(x) + \sum_{\alpha=1}^m C_\alpha T_\alpha u^n(x), \quad (9)$$

где

$$C_0 = E - \sum_{\alpha=1}^m \frac{\tau}{h_\alpha} \overset{1}{A}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^m \frac{\tau}{h_\alpha} \overset{2}{A}_\alpha - \tau B;$$

$$C_{-\alpha} = \frac{\tau}{h_\alpha} \overset{1}{A}_\alpha; \quad (10)$$

$$C_\alpha = -\frac{\tau}{h_\alpha} \overset{2}{A}_\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Матрицы $C_{-\alpha}$, C_α всегда положительны; матрица C_0 положительна при достаточно малом τ/h .

Метод расщепления позволяет строить легко реализуемые положительные схемы. Рассмотрим явную мажорантную схему расщепления

$$\frac{u^{n+\frac{s}{m}} - u^{n+\frac{s-1}{m}}}{\tau} + \left[A_s \frac{E - T_{-s}}{h_s} + A_s \frac{T_s - E}{h_s} + \frac{B}{m} \right] u^{n+\frac{s-1}{m}} = 0, \quad (11)$$

$$s = 1, \dots, m.$$

Схема (11) приводится к виду

$$u^{n+\frac{s}{m}} = C_s u^{n+\frac{s-1}{m}}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} C_s &= C_{0s} + C_{-s}T_{-s} + C_sT_s; \\ C_{0s} &= E - \frac{\tau}{h_s}A_s + \frac{\tau}{h_s}A_s^2 - \frac{\tau B}{m}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$C_{-s} = \frac{\tau}{h_s}A_s; \quad C_s = -\frac{\tau}{h_s}A_s, \quad s = 1, \dots, m.$$

Операторы C_{-s} , C_s положительны всегда, операторы C_{0s} положительны при достаточно малом τ/h . Следовательно, схема

$$u^{n+1}(x) = C_m C_{m-1} \dots C_1 u^n(x) \quad (14)$$

положительна.

Мажорантные схемы играют особую роль в разностных методах. Как правило, обладая малой точностью, они в то же время максимально устойчивы, зачастую обеспечивают сходимость в пространстве C и просты в реализации.

— \triangle —

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДРОБНЫХ ШАГОВ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

П. 1. СВЯЗЬ МЕЖДУ СТАЦИОНАРНЫМИ И НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ЗАДАЧАМИ

Рассмотрим в прямоугольной области G задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (1)$$

$$u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma, \quad (2)$$

где γ – граница G , $G = \{0 < x_i < \pi, i = 1, 2\}$. Наряду с задачей (1) рассмотрим нестационарную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad (3)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2) \quad (4)$$

с теми же стационарными краевыми условиями (2).

Обозначим через $U(x_1, x_2)$ решение задачи (1), (2), через $u(x_1, x_2, t)$ – решение задачи (3), (4), (2). Тогда

$$v(x_1, x_2, t) = u(x_1, x_2, t) - U(x_1, x_2) \quad (5)$$

удовлетворяет уравнению (3) с начальными данными

$$v(x_1, x_2, 0) = v_0(x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) - U(x_1, x_2) \quad (6)$$

и нулевыми краевыми условиями

$$v(x_1, x_2, t) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma. \quad (7)$$

$v(x_1, x_2, t)$ представляется в виде

$$v(x_1, x_2, t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} A_{k_1 k_2}(t) \sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2, \quad (8)$$

где

$$A_{k_1 k_2}(t) = a_{k_1 k_2} e^{-a^2(k_1^2 + k_2^2)t} \quad (9)$$

- коэффициент Фурье функции $v(x_1, x_2, t)$; $a_{k_1 k_2}$ - коэффициент Фурье функции $v_0(x_1, x_2)$.

Формулы (8), (9) можно записать в операторном виде

$$v = S(t) \cdot v_0. \quad (10)$$

Оператор $S(t)$ в пространстве $L_2(G)$ имеет норму

$$\|S(t)\| = e^{-2a^2 t}. \quad (11)$$

Оператор шага $S(\tau)$ имеет норму

$$\|S(\tau)\| = e^{-2a^2 \tau}. \quad (12)$$

Отсюда

$$\|S(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Это означает, что

$$\|v(x_1, x_2, t)\| = \|u(x_1, x_2, t) - U(x_1, x_2)\| \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $t \rightarrow \infty$, т. е. решение нестационарной задачи стремится к решению стационарной при тех же краевых условиях, независимо от выбора начальных данных.

Ясно, что существует множество нестационарных уравнений, решения которых сходятся к решению стационарной задачи. Вместо уравнения (3) можно, например, рассмотреть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right). \quad (15)$$

Нестационарное уравнение приобретает характер уравнения затухающих колебаний. Можно показать, что в случае (15) при любых начальных данных $u(x_1, x_2, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, 0)$ решение (15) сойдется к $U(x_1, x_2)$.

В рассмотренных примерах нестационарные уравнения (3) и (15) описывали вполне определенные физические процессы: диффузию тепла,

распространение колебаний с затуханием. Однако в некоторых случаях соответствующие нестационарные уравнения могут иметь лишь формальный смысл, обеспечивая математические условия затухания (13) и не описывая определенный физический процесс.

Это справедливо для уравнения упругого равновесия

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0. \quad (16)$$

Нестационарное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right] = 0 \quad (17)$$

имеет оператор решения $S(t)$, удовлетворяющий условию затухания (13), хотя трудно найти физическую модель, описываемую уравнением (17). Это не мешает нам воспользоваться уравнением (17) для построения итерационных схем.

II. 2. СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ И ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

Указанное соответствие между нестационарными и стационарными уравнениями полностью переносится на разностные схемы. Возьмем в качестве примера двухслойную разностную схему для уравнения (1.3)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau_n} = \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n, \quad \tau_n = a^2(t_{n+1} - t_n), \quad (1)$$

где Ω_1, Ω_2 – некоторые разностные пространственные операторы, зависящие от τ_n, h_1, h_2 .

Пусть u^n есть решение (1), удовлетворяющее некоторым начальным данным

$$u^0 = u_0 \quad (2)$$

и стационарным краевым условиям

$$u^n = f, \quad (x_1, x_2) \in \gamma. \quad (3)$$

Пусть w есть решение разностной краевой задачи

$$\Lambda w = 0, \quad (x_1, x_2) \in G; \quad w = f, \quad (x_1, x_2) \in \gamma; \quad (4)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_i = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2}, \quad i = 1; 2,$$

где f – функция из (3).

Разность

$$v^n = u^n - w$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau_n} = \Omega_1 v^{n+1} + \Omega_2 v^n + (\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda)w.$$

Напомним, что операторы Ω_1, Ω_2 зависят от τ_n, h_1, h_2 , операторы $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ – только от h_1, h_2 . Введем в рассмотрение величины

$$R_n = (\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda)_{n-1}w, \quad R = \max \|R_n\|, \quad (5)$$

где $\max \|R_n\|$ берется для всех τ_n , ограниченных некоторым значением τ_{\max} .

В силу представления (1.1.24) имеем

$$v^n = C_{n0}v^0 + \sum_{\alpha=1}^n C_{n\alpha}r_\alpha, \quad (6)$$

где

$$C_{n\alpha} = C_n \cdot C_{n-1} \dots C_{\alpha+1}, \quad C_n = (E - \tau_n \Omega_1)^{-1} (E + \tau_n \Omega_2),$$

$$r_\alpha = \tau_{\alpha-1} (E - \tau_{\alpha-1} \Omega_1)^{-1} R_\alpha. \quad (7)$$

Если схема (1) при заданном законе предельного перехода сильно устойчива (см. §1, п. 2), т. е.

$$\|C_n\| \leq 1 - k\tau_n, \quad (8)$$

где константа $k > 0$ не зависит от τ_n , то справедлива оценка

$$\|v^n\| \leq (1 - k\tau_{\min})^n \|v^0\| + \tau_{\max} R \sum_{\alpha=1}^n (1 - k\tau_{\min})^{n-\alpha} =$$

$$= (1 - k\tau_{\min})^n \|v^0\| + \frac{R}{k} \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} [1 - (1 - k\tau_{\min})^n], \quad (9)$$

где τ_{\max}, τ_{\min} – величины, ограничивающие τ_n

$$\tau_{\min} \leq \tau_n \leq \tau_{\max}.$$

При фиксированных τ_{\max}, τ_{\min} и $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\lim \|v^n\| \leq \frac{R}{k} \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}}. \quad (10)$$

Так как для схемы (1) справедливо аппроксимационное соотношение $\Omega_1 + \Omega_2 \prec \Lambda$, то при $\tau_{\max} \rightarrow 0$, $h(\tau_{\max}) \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$, и из (10) следует

$$\lim \|v^n\| = 0$$

при

$$n \rightarrow \infty, \tau_{\max} \rightarrow 0, \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = O(1).$$

Таким образом, при условии аппроксимации $\Omega_1 + \Omega_2 \prec \Lambda$ и сильной устойчивости схемы (1) решение u^n задачи (1) – (3) стремится к решению w задачи (4), если $n \rightarrow \infty$, $\tau_{\max} \rightarrow 0$, $h(\tau_{\max}) \rightarrow 0$, $\frac{\tau_{\max}}{\tau_{\min}} = O(1)$, а u_0 – произвольно. Отсюда следует, что любая сильно устойчивая схема (1) интегрирования уравнения (1.3) может рассматриваться одновременно как итерационная схема решения краевой задачи (4). В этом случае шаг интегрирования τ_n можно рассматривать как *итерационный параметр* или *параметр релаксации*.

Как было показано, сходимость $u^n \rightarrow w$ требует, вообще говоря, измельчения τ и h . Если потребовать аппроксимационное условие в более сильном виде

$$(\Omega_1 + \Omega_2 - \Lambda)w \rightarrow 0, \quad (11)$$

где $\tau \rightarrow 0$, h фиксировано, то сходимость $u^n \rightarrow w$ может иметь место при фиксированном h , но, вообще говоря, при измельчении τ_n . При еще более сильных требованиях аппроксимации сходимость $u^n \rightarrow w$ имеет место для произвольных τ , h . Пусть при любом τ выполняется равенство

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \Lambda. \quad (12)$$

Условие (12) будем называть условием *полной аппроксимации*. При выполнении условия полной аппроксимации (12) сходимость $u^n \rightarrow w$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\|C_{n0}\| \rightarrow 0. \quad (13)$$

Условие (13) есть условие асимптотической устойчивости, которая, как известно, следует из сильной устойчивости (см. §1, п. 2). Условию (12) полной аппроксимации можно придать более общий вид. Будем рассматривать двухслойные итерационные схемы вида

$$B \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) = \Lambda u^n, \quad (14)$$

где B – некоторый линейный оператор. Представление (14) есть каноническое выражение двухслойной итерационной схемы, называемое схемой *универсального алгоритма* [87].

Пусть w есть решение стационарной задачи (4). Тогда $v^n = w - u^n$ удовлетворяет уравнению (14)

$$B \left(\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} \right) = \Lambda v^n$$

Оператор шага C для схемы (14) имеет вид

$$C = E + \tau B^{-1} \Lambda. \quad (15)$$

Если оператор C из (15) удовлетворяет условию сильной устойчивости, то, аналогично предыдущему, будем иметь сходимость $v^n \rightarrow 0$, $u^n \rightarrow w$ при любых τ, h , лежащих в области сильной устойчивости. Таким образом, можно рассматривать возможность приведения итерационной схемы к виду (14) как условие полной аппроксимации.

В том случае, когда оператор B является полиномом относительно τ и совокупности некоторых финитных пространственных операторов, от представления (14) легко приходим к уравнению (1) с условием полной аппроксимации (12). В случае более сложной структуры оператора B такой переход не всегда возможен.

В дальнейшем возможность представления (14) мы будем рассматривать как определение полной аппроксимации.

Для двухслойных схем, не обладающих свойством полной аппроксимации, будет справедливо более общее представление

$$B \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) = \Omega u^n, \quad (16)$$

где оператор Ω аппроксимирует оператор Λ при каком-либо указании закона предельного перехода $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$.

Определим *скорость сходимости* итерационной схемы с полной аппроксимацией и сильной устойчивостью при фиксированных параметрах τ, h_1, h_2 . Фиксируя h_1, h_2 , подберем τ оптимальным образом, так что норма оператора шага C становится минимальной. Пусть

$$\min_{\tau} \|C(\tau, h_1, h_2)\| = 1 - \varepsilon(h_1, h_2). \quad (17)$$

Можно дать асимптотическую оценку скорости сходимости, устремив h_1, h_2 к нулю и разложив $\varepsilon(h_1, h_2)$ в ряд по h_1, h_2 . Положим, для простоты, $h_1 = h_2 = h$ и пусть справедлива асимптотическая оценка

$$\min_{\tau} \|C(\tau, h_1, h_2)\| = 1 - Rh^\alpha, \quad R > 0, \quad \alpha > 0. \quad (18)$$

Нетрудно установить, что для уменьшения нормы отклонения v^n в $q = 1/\varepsilon$ раз необходимо m итераций, где

$$m \sim \frac{|\ln \varepsilon|}{Rh^\alpha} \sim \frac{\ln q}{R} N^\alpha, \quad n \sim \frac{1}{h}. \quad (19)$$

Особенно удобно исследование устойчивости и скорости сходимости схем с полной аппроксимацией в случае, когда оператор C имеет своими собственными функциями функции (гармоники) $\sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2$. Тогда справедливы представления

$$v^n = \sum_{k_1, k_2=1}^{N_1, N_2} a^n(\tau, h_1, h_2, k_1, k_2) \sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2;$$

$$a^n = \rho(\tau_n, h_1, h_2, k_1, k_2) a^{n-1} = \rho^n \cdot a^0; \quad (20)$$

$$\rho^n = \rho(\tau_1, h_1, h_2, k_1, k_2) \dots \rho(\tau_n, h_1, h_2, k_1, k_2);$$

$$\|C_n\| = \max_{k_1, k_2} |\rho(\tau_n, h_1, h_2, k_1, k_2)|,$$

где C_n – оператор перехода с $(n - 1)$ -ой на n -ю итерацию. Таким образом, норма оператора итерационного шага определяется как максимум модуля коэффициента ρ возрастания гармоники $\sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2$.

Для операторов, собственные функции которых не являются гармониками, гармонический анализ носит только наводящий характер.

П. 3. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Дадим сравнительный анализ итерационных схем для уравнения Лапласа.

Введем ряд обозначений: $\rho = \rho(\tau, h_1, h_2, k_1, k_2)$ – коэффициент возрастания гармоник $\sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2$; на одной итерации с шагом τ :

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \|C(\tau, h_1, h_2)\| = \max_{k_1, k_2} |\rho|; \\ \rho_1 &= \min_{\tau} \|C(\tau, h_1, h_2)\| = \min_{\tau} \rho_0; \\ \rho^n &= \rho(\tau_1, h_1, h_2, k_1, k_2) \cdot \rho(\tau_2, h_1, h_2, k_1, k_2) \dots \\ &\dots \rho(\tau_n, h_1, h_2, k_1, k_2)\end{aligned}\tag{1}$$

коэффициент возрастания гармоник $\sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2$ после n итераций с шагами τ_1, \dots, τ_n ,

$$a_i = \frac{4a^2\tau}{h_i^2} \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}, \quad r_i = \frac{a^2\tau}{h_i^2}, \quad i = 1, 2,$$

m – число итераций, необходимых для достижения данной точности ε , $k_i = 1, 2, \dots, N_i$, $(N_i + 1)h_i = \pi$, $i = 1, 2$. В дальнейшем всюду делаются асимптотические оценки, так что приближенно полагается

$$\sin \frac{h_i}{2} \simeq \frac{h_i}{2}, \quad \cos \frac{h_i}{2} \simeq 1 - \frac{h_i^2}{8}.$$

Кроме того, для простоты положено $h_1 = h_2 = h$, $a^2 = 1$.

1. Явная схема.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_i = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2},\tag{2}$$

$$\rho = 1 - (a_1 + a_2),\tag{3}$$

$$\rho_0 = \max \left\{ |1 - 2\tau|, \left| 1 - 8r \left(1 - \frac{h^2}{4} \right) \right| \right\}.$$

Полная аппроксимация имеет место всегда, сильная устойчивость при условии $r \leq 1/4$. Отсюда следует

$$\rho_1 = 1 - \frac{1}{2}h^2, \quad (4)$$

$$m \simeq 2|\ln \varepsilon|N^2. \quad (5)$$

2. Схема релаксации по линии.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n. \quad (6)$$

Схема (6) удовлетворяет условию полной аппроксимации.

$$\rho = \frac{1 - a_2}{1 + a_1}. \quad (7)$$

Отсюда следует сильная устойчивость схемы (6) при $r \leq 1/2$.

$$\rho_0 = \max \left\{ \left| \frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right|, \left| \frac{1 - 4r + \tau}{1 + \tau} \right| \right\}, \quad (8)$$

$$\rho = 1 - h^2, \quad (9)$$

$$m \simeq |\ln \varepsilon| \cdot N^2. \quad (10)$$

Таким образом, в схеме (6) скорость сходимости вдвое больше по сравнению с явной схемой. Вполне аналогична схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^n + \Lambda_2 u^{n+1}.$$

3. Схема верхней релаксации (в. р.), Янга Франкеля [44, 45].

$$(E - \alpha\tau\Omega_1) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n, \quad (11)$$

$$\Omega_1 = \frac{T_{-1} + T_{-2} - 4E}{h^2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

Схема в. р. имеет полную аппроксимацию.

$$\rho = \frac{1 + 2\alpha r + (2\alpha - 4)r \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} \right) + \alpha r (\sin k_1 h + \sin k_2 h) i}{1 + 2\alpha r + 2\alpha r \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} \right) + \alpha r (\sin k_1 h + \sin k_2 h) i}. \quad (12)$$

При условии $\alpha > 1$ схема (11) сильно устойчива. Выражение для ρ является комплексным, так как функции $\sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2$ не являются собственными функциями оператора Ω_1 и гармонический анализ устойчивости перестает быть строгим. Можно показать, что при соответствующем выборе τ , $\alpha \rho = 1 - \text{const} \cdot h$ (см. [53, 27]). Как видим, схема в. р. увеличивает на порядок скорость сходимости по сравнению с предыдущими схемами. Схема в. р. реализуется рекуррентным счетом слева направо, снизу вверх.

4. Схема продольно-поперечной прогонки.

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^{n+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n, \\ \Omega_1 &= \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} - \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2, \\ \Omega_2 &= \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} + \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует полная аппроксимация.

$$\rho = \frac{(1 - \frac{1}{2}a_1)(1 - \frac{1}{2}a_2)}{(1 + \frac{1}{2}a_1)(1 + \frac{1}{2}a_2)}. \quad (15)$$

Схема п. п. п. сильно устойчива при любом τ .

$$\rho_0 = \max \left\{ \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\tau}{1 + \frac{1}{2}\tau} \right)^2, \left(\frac{1 - 2r(1 - \frac{h^2}{4})}{1 + 2r(1 - \frac{h^2}{4})} \right)^2 \right\}, \quad (16)$$

$$\rho_1 = 1 - 2h, \quad (17)$$

$$m \simeq \frac{1}{2} |\ln \varepsilon| N. \quad (18)$$

Схема п. п. п., как и схема в. р., увеличивает скорость сходимости на один порядок сравнительно со схемами 1-2. Это связано с тем, что схема п. п. п. сильно устойчива при любом τ , в то время как схемы 1-2 сильно устойчивы при достаточно малом τ (порядка h^2).

5. Схема стабилизирующей поправки.

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n).\end{aligned}\tag{19}$$

Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n, \\ \Omega_1 &= \Lambda_1 + \Lambda_2 - \tau \Lambda_1 \Lambda_2, \quad \Omega_2 = \tau \Lambda_1 \Lambda_2,\end{aligned}\tag{20}$$

$$\rho = \frac{1 + a_1 a_2}{1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2} = \frac{1 + a_1 a_2}{(1 + a_1)(1 + a_2)},\tag{21}$$

$$\rho_0 = \max \left\{ \frac{1 + \tau^2}{1 + 2\tau + \tau^2}, \frac{1 + 16r^2(1 - \frac{h^2}{2})}{1 + 8r(1 - \frac{h^2}{4}) + 16r^2(1 - \frac{h^2}{2})} \right\},\tag{22}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{1 + h} \simeq 1 - h,\tag{23}$$

$$m \simeq |\ln \varepsilon| N.\tag{24}$$

6. Схема расщепления.

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 (\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 (\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}).\end{aligned}\tag{25}$$

Эквивалентная схема в целых шагах имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n, \\ \Omega_1 &= \alpha(\Lambda_1 + \Lambda_2) - \alpha^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2, \quad \Omega_2 = \beta(\Lambda_1 + \Lambda_2) + \beta^2 \tau \Lambda_1 \Lambda_2.\end{aligned}\tag{26}$$

Схема (25) удовлетворяет условию полной аппроксимации при $\alpha = \beta = 1/2$. При этом она становится эквивалентной схеме п. п. п.

7. Схема предиктор - корректор (схема аппроксимационной поправки).

$$\frac{u^{n+1/4} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_1 u^{n+1/4}, \quad \frac{u^{n+1/2} - u^{n+1/4}}{\tau/2} = \Lambda_2 u^{n+1/2},$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2) u^{n+1/2} = \Lambda u^{n+1/2}.$$
(27)

Из первых двух уравнений имеем

$$Au^{n+1/2} = (E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^{n+1/2} = Eu^n.$$
(28)

Исключая из последнего уравнения (27) и уравнения (28) $u^{n+1/2}$, находим

$$A(u^{n+1} - u^n) = \tau \Lambda u^n.$$
(29)

Нетрудно установить, что схема аппроксимационной поправки эквивалентна схеме п. п. п.

8. Схемы с сингулярными операторами. В.К. Саульевым [27] и Н.И. Булеевым [20], А.А. Самарским [50], В.П. Ильиным [48, 100] применялись схемы интегрирования и итерационные схемы, которые могут рассматриваться как разновидность схем с дробными шагами (1.3). В применении к уравнению теплопроводности и Лапласа в этих схемах вместо обычного представления

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_i = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} = \frac{T_i - E}{h_i^2} - \frac{E - T_i^{-1}}{h_i^2}$$

используется представление

$$\Lambda = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$\Omega_1 = \frac{T_1^{-1} - E}{h_1^2} + \frac{T_2^{-1} - E}{h_2^2}; \quad \Omega_2 = \frac{T_1 - E}{h_1^2} + \frac{T_2 - E}{h_2^2}.$$
(30)

Так как для любой достаточно гладкой функции f имеем

$$\|\Omega_i f\| = O\left(\frac{1}{h}\right); \quad \|\Omega_1 \Omega_2 f\| = O\left(\frac{1}{h_1 h_2}\right), \quad i = 1, 2,$$
(31)

то операторы $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1\Omega_2$ являются сингулярными (см. §1, п. 2). Схема интегрирования уравнения (1.3), основанная на представлении (30), имеет вид в дробных шагах

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Omega_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Omega_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}), \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta &= 1.\end{aligned}\tag{32}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \alpha\Omega_1 u^{n+1/2} + \beta\Omega_2 u^n; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \beta\Omega_1 u^{n+1/2} + \alpha\Omega_2 u^{n+1}.\end{aligned}\tag{33}$$

Уравнения (32) имеют структуру схемы расщепления, уравнения (33) – схемы п. п. п. Схемы (32), (33) эквивалентны, так как имеют одну и ту же схему в целых шагах

$$(E - \alpha\tau\Omega_1)(E - \alpha\tau\Omega_2)u^{n+1} = (E + \beta\tau\Omega_1)(E + \beta\tau\Omega_2)u^n.\tag{34}$$

После приведения схемы (34) к виду

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \alpha(\Omega_1 + \Omega_2)u^{n+1} + \beta(\Omega_1 + \Omega_2)u^n + \\ &+ \tau\Omega_1\Omega_2(\beta^2 u^n - \alpha^2 u^{n+1}) = \Lambda(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) + \\ &+ \tau\Omega_1\Omega_2(\beta^2 u^n - \alpha^2 u^{n+1})\end{aligned}\tag{35}$$

нетрудно оценить порядок аппроксимации схемы (34). Из равенств (31) следует, что при $\beta \neq \alpha$ и законе предельного перехода $\tau/h = \text{const}$ схема (35) не аппроксимирует уравнения (1.3), при $\beta = \alpha = 1/2$ аппроксимация имеет место, но будет не второго, а первого порядка.

Рассматривая схему (35) как итерационную, видим, что она удовлетворяет свойству полной аппроксимации при $\alpha = \beta = 1/2$. Из выражения для ρ

$$\rho = \frac{1 - \beta(a_1 + a_2) + 4r^2\beta^2 \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} + 2 \sin \frac{k_1 h}{2} \sin \frac{k_2 h}{2} \cos \frac{k_2 - k_1}{2} h \right)}{1 + \alpha(a_1 + a_2) + 4r^2\alpha^2 \left(\sin^2 \frac{k_1 h}{2} + \sin^2 \frac{k_2 h}{2} + 2 \sin \frac{k_1 h}{2} \sin \frac{k_2 h}{2} \cos \frac{k_2 - k_1}{2} h \right)}\tag{36}$$

следует сильная устойчивость при $\alpha \geq 1/2$.

Реализация схем (32), (33) очень проста: на первом дробном шаге применяется рекуррентный счет снизу вверх, слева направо, на втором дробном шаге – в обратном направлении.

Схемы с сингулярными операторами аналогичны по реализации симметричным схемам в. р. (см., например, [39]).

9. Схемы с дополнительными параметрами. Нетрудно установить, что в схему с. п. Дугласа – Рэкфорда можно ввести дополнительный параметр. Это было сделано Дугласом в работе [26]. Схема с. п. с произвольным параметром имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \alpha\Lambda_1 u^{n+1/2} + (\Lambda - \alpha\Lambda_1)u^n; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \alpha\Lambda_2(u^{n+1} - u^n).\end{aligned}\tag{37}$$

После исключения $u^{n+1/2}$ имеем

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+1} = [E + \tau(1 - \alpha)\Lambda + \alpha^2\tau^2\Lambda_1\Lambda_2]u^n.\tag{38}$$

Для ρ получаем выражение

$$\rho = \frac{1 - (1 - \alpha)(a_1 + a_2) + \alpha^2 a_1 a_2}{1 + \alpha(a_1 + a_2) + \alpha^2 a_1 a_2}.\tag{39}$$

Схема (37) имеет полную аппроксимацию и сильно устойчива при $\alpha \geq 1/2$. При $\alpha = 1$ схема (37) есть схема с. п. Дугласа – Рэкфорда, при $\alpha = 1/2$ – схема с. п. Дугласа, эквивалентная схеме п. п. п.

В. П. Ильин [46] предложил другое однопараметрическое семейство схем, включающее в себя схемы п. п. п. и схему с. п. Дугласа – Рэкфорда

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= k \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} + \frac{1}{2}\Lambda_2(u^{n+1} - u^n).\end{aligned}\tag{40}$$

Схема в целых шагах имеет вид

$$(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{1+k}{2}\Lambda u^n.\tag{41}$$

Схема (41) удовлетворяет свойству полной аппроксимации. Из выражения

$$\rho = \frac{1 - \frac{k}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{4}a_1a_2}{1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{4}a_1a_2} \quad (42)$$

следует сильная устойчивость схемы (40) при $-1 < k \leq 1$. При $k = 0$ схема (40) есть схема с. п. Дугласа - Рэкфорда, при $k = 1$ - схема п. п. п.

В работе В. А. Енальского [47] было рассмотрено однопараметрическое семейство схем, содержащее при частных значениях параметров схемы расщепления и п. п. п. Это семейство схем имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \alpha\Lambda_1 u^{n+1/2} + \beta\Lambda_1 u^n + \gamma\Lambda_2 u^n; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \alpha\Lambda_2 u^{n+1} + \gamma\Lambda_1 u^{n+1/2} + \beta\Lambda_2 u^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (43)$$

где α, β, γ - не определенные пока параметры.

После исключения $u^{n+1/2}$ приходим к схеме

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n, \\ \Omega_1 &= \alpha\Lambda - \alpha^2\tau\Lambda_1\Lambda_2, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\Omega_2 = (\beta + \gamma)\Lambda + \tau[\beta\gamma\Lambda^2 + (\beta - \gamma)^2\Lambda_1\Lambda_2].$$

При условии

$$\alpha + \beta = \gamma = 1; \quad (\beta - \gamma)^2 - \alpha^2 = 0 \quad (45)$$

уравнение (44) принимает вид

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + \alpha\Lambda(u^{n+1} - u^n) + \beta\gamma\tau\Lambda^2 u^n - \alpha^2\tau\Lambda_1\Lambda_2(u^{n+1} - u^n).$$

Таким образом, схема (43) приводится к каноническому виду

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n, \quad (46)$$

$$B = (E + \beta\gamma\tau\Lambda)^{-1}(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)$$

и удовлетворяет условию полной аппроксимации.

Из второго равенства (45) следует альтернатива

$$\alpha = \beta - \gamma; \quad \alpha = \gamma - \beta.$$

Так как параметры α , β , γ связаны двумя соотношениями (45), то схема (43) допускает два произвольных параметра τ и α . Полагая $\gamma = 0$, находим $\alpha = \beta = 1/2$, т. е. получаем схему расщепления с равными весами; полагая $\beta = 0$, находим $\alpha = \gamma = 1/2$, т.е. получаем схему п. п. п.

Нетрудно установить, что все рассмотренные схемы представляются в виде

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n, \quad (47)$$

где

$$B = (E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2) \quad (48)$$

для схем п. п. п., с. п., а. п.;

$$B = (E - \alpha\tau\Omega_1)(E - \alpha\tau\Omega_2) \quad (49)$$

для схемы сингулярного оператора;

$$B = (E + \beta\gamma\tau\Lambda)^{-1}(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2) \quad (50)$$

для схемы В.А. Енальского. Канонический вид (48) указан в работах Е.Г. Дьяконова [95, 90], А.А. Самарского [91].

П. 4. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Дадим краткий обзор итерационных схем для трехмерного уравнения Лапласа. Заметим, что при переходе от двумерного к трехмерному уравнению многие свойства и классификация схем видоизменяются.

1. Схема п. п. п.

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \frac{1}{3}(\Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n); \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \frac{1}{3}(\Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1/3}); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \frac{1}{3}(\Lambda_1 u^{n+2/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1}),$$

как было показано (см. п. 1, §2), условно устойчива. Схема по-прежнему удовлетворяет свойству полной аппроксимации, однако не в смысле равенства (2.12), а в смысле равенства (2.14). Действительно, после исключения дробных шагов $u^{n+1/3}$, $u^{n+2/3}$ имеем

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n,$$

$$B = [E + \frac{1}{9}\tau\Lambda + \frac{1}{27}\tau^2(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3)]^{-1} \times \\ \times \left(E - \frac{1}{3}\tau\Lambda_1\right) \left(E - \frac{1}{3}\tau\Lambda_2\right) \left(E - \frac{1}{3}\tau\Lambda_3\right). \quad (2)$$

2. Схема расщепления

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha u^{n+1/3} + \beta u^n); \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha u^{n+2/3} + \beta u^{n+1/3}); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+2/3})$$

в целых шагах имеет вид

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)(\alpha u^{n+1} + \beta u^n) - \\ - \tau(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3)(\alpha^2 u^{n+1} - \beta^2 u^n) + \\ + \tau^2 \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3(\alpha^3 u^{n+1} + \beta^3 u^n). \quad (4)$$

Отсюда следует, что ни при каком α схема расщепления не удовлетворяет свойству полной аппроксимации. Из выражения для ρ

$$\rho = \frac{1 - \beta(a_1 + a_2 + a_3) + \beta^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) - \beta^3 a_1a_2a_3}{1 + \alpha(a_1 + a_2 + a_3) + \alpha^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) + \alpha^3 a_1a_2a_3} \quad (5)$$

следует сильная устойчивость при $\alpha \geq 1/2$.

Итак, если схема п. п. п. остается схемой полной аппроксимации, но теряет свойство абсолютной сильной устойчивости, то схема расщепления, сохраняя свойство абсолютной сильной устойчивости, теряет свойство полной аппроксимации. Схемы перестают быть эквивалентными.

3. Схема аппроксимационной поправки Брайана [25] (см. §2, п. 7)

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau/2} &= \Lambda_1 u^{n+1/6} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n; \\ \frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau/2} &= \Lambda_2 (u^{n+2/6} - u^n); \\ \frac{u^{n+3/6} - u^{n+2/6}}{\tau/2} &= \Lambda_3 (u^{n+3/6} - u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1/6} + \Lambda_2 u^{n+2/6} + \Lambda_3 u^{n+3/6}\end{aligned}\tag{6}$$

после исключения дробных шагов имеет вид

$$(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1)(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2)(E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_3)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n.\tag{7}$$

Схема обладает полной аппроксимацией. Абсолютная устойчивость следует из выражения для ρ

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) + \frac{1}{4}(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \frac{1}{8}a_1 a_2 a_3}{1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) + \frac{1}{4}(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) + \frac{1}{8}a_1 a_2 a_3}.\tag{8}$$

Более простую структуру имеет схема а. п. расщепления (см. §2, п. 7)

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\alpha\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1/6}; & \frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\alpha\tau} &= \Lambda_2 u^{n+2/6}; \\ \frac{u^{n+1/2} - u^{n+2/6}}{\alpha\tau} &= \Lambda_3 u^{n+1/2}; & \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^{n+1/2}.\end{aligned}\tag{9}$$

Схема в целых шагах имеет вид

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)(E - \alpha\tau\Lambda_3)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n.\tag{10}$$

Схема имеет полную аппроксимацию и сильную устойчивость при $1/2 \leq \alpha \leq 1$. При $\alpha = 1/2$ схема переходит в схему Брайана.

4. Схемы с. п.

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \alpha\Lambda_1 u^{n+1/3} + (1 - \alpha)\Lambda_1 u^n + (\Lambda_2 + \Lambda_3)u^n; \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \alpha\Lambda_2 (u^{n+2/3} - u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \alpha\Lambda_3 (u^{n+1} - u^n).\end{aligned}\tag{11}$$

При $\alpha = 1$ имеем схему с. п. Дугласа-Рэкфорда [12]; при $\alpha = 1/2$ — схему с. п. Дугласа [26]. Схема в целых шагах имеет вид

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)(E - \alpha\tau\Lambda_3)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n, \quad (12)$$

откуда следует полная аппроксимация. Из выражения для ρ

$$\rho = \frac{1 - (1 - \alpha)(a_1 + a_2 + a_3) + \alpha^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) + \alpha^3a_1a_2a_3}{1 + \alpha(a_1 + a_2 + a_3) + \alpha^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3) + \alpha^3a_1a_2a_3}. \quad (13)$$

следует сильная устойчивость схемы с. п. при $\alpha \geq 1/2$. Схема с. п. эквивалентна схеме а. п. расщепления.

5. Схема универсального алгоритма. Можно прямо исходить из канонического представления

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)(E - \alpha\tau\Lambda_3)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n \quad (14)$$

рассмотренных схем с дробными шагами, соответствующего схеме универсального алгоритма (см. [87])^{*1}. Из представления (14) следует, что схема универсального алгоритма эквивалентна схемам с. п. и а. п. Схема может иметь также следующую реализацию:

$$\begin{aligned} (E - \alpha\tau\Lambda_1)u^{n+1/3} &= [(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)(E - \alpha\tau\Lambda_3) + \tau\Lambda]u^n; \\ (E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+2/3} &= u^{n+1/3}; \\ (E - \alpha\tau\Lambda_3)u^{n+1} &= u^{n+2/3}, \end{aligned} \quad (15)$$

соответствующую схеме приближенной факторизации с соответствующим алгоритмом решения краевых условий (см. §2, пп. 5, 6).

6. Итерационная схема с дополнительными параметрами, предложенная В.П. Ильиным, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^n + \Lambda_3 u^n; \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= k_1 \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} + \Lambda_2 (u^{n+2/3} - u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= k_2 \frac{u^{n+2/3} - u^n}{\tau} + \Lambda_3 (u^{n+1} - u^n). \end{aligned} \quad (16)$$

^{1*} Вид (14) указан впервые в работах Е.Г. Дьяконова [95, 90], А.А. Самарского [91].

После исключения дробных шагов имеем

$$(E - \tau\Lambda_1)(E - \tau\Lambda_2)(E - \tau\Lambda_3)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (1 + k_1)(1 + k_2)\Lambda u^n. \quad (17)$$

Положив

$$(1 + k_1)(1 + k_2) = \frac{1}{\alpha},$$

убедимся в эквивалентности схемы (16) схемам а. п., с. п. и стабилизирующего оператора.

7. Схема с сингулярными операторами. В отличие от предыдущих схем, схема с сингулярными операторами по-прежнему требует только двух дробных шагов.

В трехмерном случае имеет место представление

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^3 \Lambda_i = \Omega_1 + \Omega_2; \\ \Omega_1 &= \frac{T_{-1} - E}{h_1^2} + \frac{T_{-2} - E}{h_2^2} + \frac{T_{-3} - E}{h_3^2}; \\ \Omega_2 &= \frac{T_1 - E}{h_1^2} + \frac{T_2 - E}{h_2^2} + \frac{T_3 - E}{h_3^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Представлению (18) соответствуют эквивалентные схемы

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Omega_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n), \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Omega_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}), \\ \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \alpha\Omega_1 u^{n+1/2} + \beta\Omega_2 u^n, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \beta\Omega_1 u^{n+1/2} + \alpha\Omega_2 u^{n+1}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$(20)$$

П. 5. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Для эллиптического уравнения

$$Lu + f = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f = 0 \quad (1)$$

также справедлива параллель между итерационными схемами и схемами интегрирования соответствующего параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f. \quad (2)$$

При этом ряд схем, обладающих свойствами полной аппроксимации и сильной устойчивости для уравнения Лапласа, теряет эти свойства в случае уравнения (1). Дадим краткий анализ итерационных схем для уравнения (1) при $f = 0$.

1. Схема п. п. п. становится неприменимой, так как теряет свойство сильной устойчивости при $m \geq 2$ (см. §2, п. 4).

2. Схема расщепления (см. §2, п. 4) при $m = 2$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11} u^{n+1/2} + \Lambda_{12} u^n;$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{21} u^{n+1/2} + \Lambda_{22} u^{n+1},$$

эквивалентная схеме в целых шагах

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) u^{n+1} + 2\Lambda_{12} u^n - \tau(\Lambda_{11}\Lambda_{22} u^{n+1} + \Lambda_{12}^2 u^n),$$

сильно устойчива, но не имеет свойства полной аппроксимации. То же справедливо для схемы расщепления (2.4.12) при $m = 3$.

3. Схема стабилизирующей поправки

$$\frac{u^{n+1/m} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11} u^{n+1/m} + (\Omega - \Lambda_{11}) u^n;$$

$$\frac{u^{n+2/m} - u^{n+1/m}}{\tau} = \Lambda_{22} (u^{n+2/m} - u^n);$$

.....

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{m-1}{m}}}{\tau} = \Lambda_{mm} (u^{n+1} - u^n), \quad \Omega = \sum_{i,j=1}^m \Lambda_{ij}, \quad (3)$$

эквивалентна схеме в целых шагах

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^{n+1} + (\Omega - \Lambda)u^n - \tau \sum_{i < j} \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} (u^{n+1} - u^n) + \\ &+ \tau^2 \sum_{i < j < k} \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} \Lambda_{kk} (u^{n+1} - u^n) + \dots + (-1)^{m-1} \Lambda_{11} \dots \\ &\dots \Lambda_{mm} \tau^{m-1} (u^{n+1} - u^n), \\ \Lambda &= \sum_{i=1}^m \Lambda_{ii}, \quad i, j, k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует полная аппроксимация при любом m . Для ρ имеем выражение

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1 - 2 \sum_{i < j} l_{ij} + \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \sum_{i < j < k} l_{ii} l_{jj} l_{kk} + l_{11} \dots l_{mm}}{(1 + l_{11})(1 + l_{22}) \dots (1 + l_{mm})} = \\ &= \frac{1 - 2 \sum_{i < j} l_{ij} + \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \dots + l_{11} \dots l_{mm}}{1 + \sum_{i=1}^m l_{ii} + \sum_{i < j} l_{ii} l_{jj} + \dots + l_{11} \dots l_{mm}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$l_{ii} = 4\tau a_{ii} \frac{\sin^2 \frac{k_i h_i}{2}}{h_i^2}; \quad (6)$$

$$l_{ij} = 4 \frac{\tau a_{ij}}{h_i h_j} \cos \frac{k_i h_i}{2} \cos \frac{k_j h_j}{2} \sin \frac{k_i h_i}{2} \sin \frac{k_j h_j}{2} = \frac{\tau a_{ij}}{h_i h_j} \sin k_i h_i \sin k_j h_j.$$

При $m = 2$ схема обладает сильной устойчивостью, если выполняются условия эллиптичности

$$a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

При более сильных ограничениях схема будет сильно устойчивой также и для $m \geq 3$ (см. 2.4.13).

4. Схема аппроксимационной поправки (а. п.)

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2m}} - u^n}{\alpha\tau} = \Lambda_{11} u^{n+\frac{1}{2m}}, \dots, \frac{u^{n+\frac{m}{2m}} - u^{n+\frac{m-1}{2m}}}{\alpha\tau} = \Lambda_{mm} u^{n+\frac{m}{2m}}, \quad (7)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^{n+\frac{m}{2m}}.$$

После исключения дробных шагов получаем

$$(E - \alpha\tau\Lambda_{11})(E - \alpha\tau\Lambda_{22}) \dots (E - \alpha\tau\Lambda_{mm}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n. \quad (8)$$

Отсюда следует, что схема а. п. имеет свойство полной аппроксимации. Из (8) следует выражение для ρ

$$\rho = \frac{1 - \sum_{i,j=1}^m l_{ij} + \alpha \sum_{i=1}^m l_{ii} + \alpha^2 \sum_{i<j} l_{ii}l_{jj} + \dots + \alpha^m l_{11} \dots l_{mm}}{1 + \alpha \sum_{i=1}^m l_{ii} + \alpha^2 \sum_{i<j} l_{ii}l_{jj} + \dots + \alpha^m l_{11} \dots l_{mm}}. \quad (9)$$

В случае $m = 2$ схема а. п. сильно устойчива при $1/2 \leq \alpha \leq 1$.

5. Схема мажорирующего оператора (м. о.) [48, 49] при $m = 2$ имеет вид

$$(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n. \quad (10)$$

Уравнение

$$(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})u^{n+1} = [(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) + \tau\Omega]u^n. \quad (10')$$

при заданной правой части решается дополнительными (внутренними) итерациями.

Таким образом, в схеме м. о. разностный эллиптический оператор Ω общего вида заменяется разностным аналогом оператора Лапласа.

6. Схема стабилизирующего оператора при $m = 2$ имеет вид

$$(E - \alpha\tau\Lambda_{11})(E - \alpha\tau\Lambda_{22}) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n. \quad (11)$$

Схема (11) эквивалентна схеме а. п. и может быть реализована в виде схемы приближенной факторизации

$$(E - \alpha\tau\Lambda_{11})u^{n+1/2} = [(E - \alpha\tau\Lambda_{11})(E - \alpha\tau\Lambda_{22}) + \tau\Omega]u^n; \quad (12)$$

$$(E - \alpha\tau\Lambda_{22})u^{n+1} = u^{n+1/2}.$$

Заметим, что схемы мажорирующего и стабилизирующего оператора исходят из схемы универсального алгоритма

$$B \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n.$$

В первом случае происходит замена оператора Ω оператором B более простой структуры, во втором случае оператор B является факторизованным, удовлетворяя в то же время условию полной аппроксимации.

Общую схему стабилизирующего оператора смотри в § 9, п. 6.

7. Схема с диагональными прогонками. Укажем в заключение этого пункта на схему И.Д. Софронова [65], в которой применены предиктор – корректор и диагональные прогонки на основе метода расщепления.

Для простоты будем считать область интегрирования квадратом ($h_1 = h_2 = h$; $N_1 = N_2 = N$), $m = 2$. Положим

$$L = L_{11} + L_{22} + M_{11} + M_{22}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} L_{11} &= (a_{11} - |a_{12}|) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}; \\ L_{22} &= (a_{22} - |a_{12}|) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \\ M_{11} &= |a_{12}|(1 + \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2}; \\ M_{22} &= |a_{12}|(1 - \sigma) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sigma = \text{sign} a_{12}; \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2); \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2).$$

Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \Omega_1, \Omega_2$ – центральные трехточечные аппроксимации операторов $L_{11}, L_{22}, M_{11}, M_{22}$, действующие по координатным и по диагональным линиям соответственно. Разностная схема расщепления, соответствующая представлению (13), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/8} - u^n}{\tau/2} &= \Lambda_1 u^{n+1/8}; & \frac{u^{n+2/8} - u^{n+1/8}}{\tau/2} &= \Lambda_2 u^{n+2/8}; \\ \frac{u^{n+3/8} - u^{n+2/8}}{\tau/2} &= \Omega_1 u^{n+3/8}; & \frac{u^{n+1/2} - u^{n+3/8}}{\tau/2} &= \Omega_2 u^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

При условии

$$a_{11} \geq |a_{12}|; \quad a_{22} \geq |a_{12}| \quad (16)$$

операторы Λ_1, Λ_2 имеют неположительные собственные числа, и схема (15) сильно устойчива, обладая точностью первого порядка.

Применяя корректор

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^{n+1/2} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Omega_1 + \Omega_2)u^{n+1/2} \quad (17)$$

находим u^{n+1} с точностью $O(\tau^2 + h^2)$.

Схема расщепления с корректором рассмотрена еще ранее в другой работе И.Д. Софронова [66].

П. 6. СХЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

До сих пор мы рассматривали только итерационные схемы с постоянным шагом. При выполнении критерия сильной устойчивости и соответствующем выборе τ норма оператора шага для явных схем имела вид $(1 - Ch^2)$, для неявных – $(1 - Ch)$. В том и другом случае можно ускорить сходимость, выбирая переменный итерационный параметр τ_n .

Еще Ричардсон [52] получил существенное улучшение сходимости явной схемы (3.2), введя переменный шаг. Работа Ричардсона и последующие исследования (см. [53]) позволили в случае явной итерационной схемы свести задачу о нахождении оптимальных шагов к построению полинома, наименьшим образом отклоняющегося от нуля. Пусть сделано m итераций с переменными шагами $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$. Тогда амплитуда гармоники $\sin k_1 x_1 \cdot \sin k_2 x_2$ умножится на величину

$$P_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, \mu) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_m = (1 - \alpha_1 \mu) \dots (1 - \alpha_m \mu). \quad (1)$$

Здесь

$$\alpha_s = 2a^2 \tau_s; \quad \mu = \frac{2 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2} = \mu(k_1, k_2). \quad (2)$$

Параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ выбираются так, чтобы величина

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \max_{k_1, k_2} |P_m[\alpha, \mu(k_1, k_2)]|, \quad \mu_0 \leq \mu \leq \mu_1, \quad (3)$$

$$\mu_0 = \mu(1, 1), \quad \mu_1 = \mu(N_1, N_2)$$

достигла минимального значения.

Эта задача заменяется другой задачей, в которой дискретный параметр $\mu(k_1, k_2)$ рассматривается как непрерывный параметр μ , меняющийся в отрезке $[\mu(1, 1), \mu(N_1, N_2)]$. Как видим, выбор оптимального шага итерации сводится к задаче выделения из семейства (1) полинома $P(\alpha, \mu)$ с наименьшим отклонением от нуля. На отрезке $[\mu_0, \mu_1]$, как известно (см. [54]), решением этой задачи является функция

$$P_m(x) = \frac{T_m\left(\frac{\mu_1 + \mu_0 - 2x}{\mu_1 - \mu_0}\right)}{T_m\left(\frac{\mu_1 + \mu_0}{\mu_1 - \mu_0}\right)}, \quad (4)$$

где $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$ – полином Чебышева. Оказалось, что при таком выборе шагов сходимость ускоряется до величины порядка (см. [53, 27])

$$1 - O(h). \quad (5)$$

В случае неявных схем выражение для ρ усложняется. Так, для метода п. п. п. имеем

$$\begin{aligned} \rho = \rho_1 \dots \rho_m = R(\alpha, \mu, \nu) &= \frac{1 - \alpha_1 \mu}{1 + \alpha_1 \mu} \cdot \frac{1 - \alpha_1 \nu}{1 + \alpha_1 \nu} \cdot \frac{1 - \alpha_2 \mu}{1 + \alpha_2 \mu} \cdot \frac{1 - \alpha_2 \nu}{1 + \alpha_2 \nu} \dots \\ &\dots \frac{1 - \alpha_m \mu}{1 + \alpha_m \mu} \cdot \frac{1 - \alpha_m \nu}{1 + \alpha_m \nu} = R(\alpha, \mu) R(\alpha, \nu), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{2} a^2 \tau_s; \quad \mu = \mu(k_1) = \frac{4}{h_1^2} \cdot \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}; \quad \nu = \nu(k_2) = \frac{4}{h_2^2} \cdot \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2};$$

$$R(\alpha, \mu) = \prod_{s=1}^m \frac{1 - \alpha_s \mu}{1 + \alpha_s \mu}; \quad R(\alpha, \nu) = \prod_{s=1}^m \frac{1 - \alpha_s \nu}{1 + \alpha_s \nu}. \quad (7)$$

Оптимальный набор шагов α_s соответствует решению вариационной задачи

$$\min_{\alpha} \max_{k_1, k_2} |R(\alpha, \mu, \nu)|, \quad k_1 = 1, \dots, N_1, \quad k_2 = 1, \dots, N_2, \quad (8)$$

которая после перехода от дискретных параметров $\mu(k_1)$, $\nu(k_2)$ к непрерывным параметрам μ , ν , приводится к задаче

$$\min_{\alpha} \max_{\mu} |R(\alpha, \mu)|; \quad \mu(1) \leq \mu \leq \mu(N_1), \quad (9a)$$

$$\min_{\alpha} \max_{\nu} |R(\alpha, \nu)|; \quad \nu(1) \leq \nu \leq \nu(N_2). \quad (9б)$$

Задача (9) не получила еще полного решения, однако имеются обнадеживающие исследования (см. по этому поводу обзор [55]). Следуя [10] (см. также [27]), укажем способ подбора параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, обеспечивающий уменьшение нормы отклонения в $1/q$ раз ($q < 1$) через m шагов, и оценим m как функцию от h . Предположим, для простоты,

$$h_1 = h_2 = h; \quad 1 \leq k_s \leq N; \quad s = 1, 2; \quad (N + 1)h = \pi.$$

Задавшись $m, h, q < 1$, разделим интервал $(1, N)$ на подинтервалы $(k_i, k_{i+1}), k_1 = 1, \dots, k_m = N$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} q &= \frac{1 - \alpha_1 \mu_1}{1 + \alpha_1 \mu_1} = -\frac{1 - \alpha_1 \mu_2}{1 + \alpha_1 \mu_2} = \frac{1 - \alpha_2 \mu_2}{1 + \alpha_2 \mu_2} = \dots \\ \dots &= -\frac{1 - \alpha_{m-1} \mu_m}{1 + \alpha_{m-1} \mu_m} = \frac{1 - \alpha_m \mu_m}{1 + \alpha_m \mu_m}, \quad \mu_s = \mu(k_s). \end{aligned} \quad (10)$$

Это возможно, так как величина

$$q(\alpha, k) = \frac{1 - \alpha \mu(k)}{1 + \alpha \mu(k)} \quad (11)$$

для $\alpha > 0, k > 0$ по модулю не превосходит 1 и является монотонно убывающей функцией от k при фиксированном α и функцией от α при фиксированном k .

Для k в интервале $k_s \leq k \leq k_{s+1}$ величина $q(\alpha_s, k)$ всегда по модулю не превосходит q , вне интервала по модулю не превосходит 1. Таким образом, через m шагов каждая гармоника затухает по амплитуде не меньше, чем в $1/q$ раз. Оценим величину m . Предполагая h достаточно малым, имеем

$$\mu_s \simeq k_s^2. \quad (12)$$

Из равенства (10) следует

$$(1 - q) - \alpha_s(1 + q)\mu_s = 0; \quad (13)$$

$$(1 + q) - \alpha_s(1 - q)\mu_{s+1} = 0.$$

Исключая из (13) α_s , имеем

$$\frac{\mu_{s+1}}{\mu_s} = \left(\frac{1 + q}{1 - q} \right)^2. \quad (14)$$

Пользуясь (12), имеем

$$\frac{k_{s+1}}{k_s} \approx \frac{1+q}{1-q}, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Перемножив равенства (15), получим

$$N \simeq \left(\frac{1+q}{1-q} \right)^m, \quad m \simeq \frac{\ln N}{\ln \frac{1+q}{1-q}} \simeq \frac{\ln \frac{1}{h}}{\ln \frac{1+q}{1-q}} \simeq \frac{\ln \frac{1}{h}}{2q}. \quad (16)$$

Равенство (16) носит характер асимптотической оценки с неопределенной константой.

Покажем (см. [10]), что в случае схемы п. п. п. при соответствующем выборе шагов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ итерационное решение u^n выйдет на точное решение разностной задачи Дирихле через $m = N$ итераций (квадрат) и $m = N_1 + N_2$ итераций (прямоугольник). Если выбрать $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$, $m = N_1 + N_2$, из условий

$$\alpha_1 = \frac{1}{\mu_1}; \alpha_2 = \frac{1}{\mu_2}, \dots, \alpha_{N_1} = \frac{1}{\mu_{N_1}}, \quad (17a)$$

$$\alpha_{N_1+1} = \frac{1}{\nu_1}; \alpha_{N_1+2} = \frac{1}{\nu_2}, \dots, \alpha_{N_1+N_2} = \frac{1}{\nu_{N_2}}, \quad (17b)$$

где

$$\mu_{k_1} = \frac{4 \sin^2 \frac{k_1 h_1}{2}}{h_1^2}; \quad \nu_{k_2} = \frac{4 \sin^2 \frac{k_2 h_2}{2}}{h_2^2},$$

то

$$R(\alpha, \mu, \nu) = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_m = 0 \quad (18)$$

для любых k_1, k_2 .

В случае квадрата, когда $h_1 = h_2 = h$, $N_1 = N_2 = N$, достаточно выполнения условий (17a), т. е. необходимо только N итераций.

II. 7. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ, ОСНОВАННЫЕ НА СХЕМАХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Поставим в соответствие уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ уравнение колебаний с затуханием

$$b \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta\Phi, \quad b > 0. \quad (1)$$

Перейдем от уравнения (1) к системе, положив

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = u_1; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = u_2; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -q = a^2 v. \quad (2)$$

Из (2) имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -a^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - bq. \quad (3)$$

Переходя к v , получаем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - bv. \quad (4)$$

На первом дробном шаге интегрируется система

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (5)$$

с помощью мажорантной неявной схемы бегущего счета, которая в переменных u_1 , u_2 , v имеет вид

$$K_1 f^{n+1/2} = M_1 f^n, \quad (6)$$

где

$$K_1 = \left\| \begin{array}{ccc} 2\Phi_1 \Psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 2\Phi_1 \Psi_1 \end{array} \right\|; \quad M_1 = \left\| \begin{array}{ccc} \Phi_1 + \Psi_1 & 0 & a(\Phi_1 - \Psi_1) \\ 0 & E & 0 \\ \frac{1}{a}(\Phi_1 - \Psi_1) & 0 & \Phi_1 - \Psi_1 \end{array} \right\|; \quad (7)$$

$$\Phi_1 = E + \frac{a\tau}{h_1} \Delta_{-1}; \quad \Psi_1 = E - \frac{a\tau}{h_1} \Delta_1; \quad f = (u_1, u_2, v).$$

На втором дробном шаге интегрируется система

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (8)$$

с помощью аналогичной схемы

$$K_2 f^{n+1} = M_2 f^{n+1/2}, \quad (9)$$

где

$$K_2 = \left\| \begin{array}{ccc} E & 0 & 0 \\ 0 & 2\Phi_2\Psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\Phi_2\Psi_2 \end{array} \right\|; \quad M_2 = \left\| \begin{array}{ccc} E & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 + \Psi_2 & a(\Phi_2 - \Psi_2) \\ 0 & \frac{1}{a}(\Phi_2 - \Psi_2) & \Phi_2 + \Psi_2 \end{array} \right\|; \quad (10)$$

$$\Phi_2 = E + \frac{a\tau}{h_2}\Delta_{-2}; \quad \Psi_2 = E - \frac{a\tau}{h_2}\Delta_2; \quad f = (u_1, u_2, v).$$

Нетрудно установить, что формулы (6), (9) эквивалентны формулам (3.4.2,3).

После этого применяется корректор

$$\frac{f^{n+2} - f^n}{2\tau} = \Omega f^n, \quad (11)$$

где

$$\Omega = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -a^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_1} \\ 0 & 0 & -a^2 \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_2} \\ \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_1} & \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_2} & -b \end{array} \right\|. \quad (12)$$

Можно применять схему стабилизирующего оператора

$$K_1 K_2 \frac{f^{n+2} - f^n}{2\tau} = \Omega f^n. \quad (13)$$

П. 8. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Покажем, что решение краевой задачи для уравнения Пуассона даже с помощью сильно устойчивых и полно аппроксимирующих схем требует специальной аппроксимации правой части ^{*.2}

Для уравнения Пуассона в области $G : \{0 < x_i < \pi, i = 1, 2\}$

$$\Delta u = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (1)$$

^{2*} На это обстоятельство указано Е.Г. Дьяконовым и А.А. Самарским.

с краевыми условиями первого рода

$$u(s) = f(s); \quad (x_1(s), x_2(s)) \in \gamma \quad (2)$$

применим схему расщепления с весами

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n) + q_1; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}) + q_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где q_1, q_2 - некоторые, пока не определенные, правые части.

Схема с целыми шагами имеет вид

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \beta\tau\Lambda_1)(E + \beta\tau\Lambda_2)u^n + \tau Q, \quad (4)$$

где

$$Q = B_2q_1 + A_1q_2 = (E + \beta\tau\Lambda_2)q_1 + (E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2.$$

В случае уравнения Лапласа ($q = 0$) при $\alpha = 1/2$ и $q_1 = q_2 = 0$ имеем схему с полной аппроксимацией.

Для полной аппроксимации уравнения Пуассона необходимо также, чтобы

$$Q = q. \quad (5)$$

Полагая для определенности $q_1 = 0$, имеем

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)q_2 = q. \quad (6)$$

Так как $\|E - \alpha\tau\Lambda_1\|^{-1} \leq 1$, уравнение (6) разрешимо с помощью обычной прогонки.

П. 9. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ С ОСРЕДНЕНИЕМ

До сих пор рассматривалась сходимость итераций только на целых шагах. Покажем, что в некоторых случаях целесообразно вести рассмотрение величин одновременно на целых и дробных шагах. Поставим, как обычно, краевой задаче эллиптического типа

$$Lu + q = 0; \quad u(s) = f(s) \quad (1)$$

в соответствие итерационную схему

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha u^{n+1/2} + \beta u^n) + q_1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (2a)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+1/2}) + q_2, \quad (2б)$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \prec L. \quad (3)$$

При этом операторы Λ_1, Λ_2 не содержат параметра τ , а аппроксимация (3) - полная. Продолжим равенства (2)

$$\frac{u^{n+3/2} - u^{n+1}}{\tau} = \Lambda_1(\alpha u^{n+3/2} + \beta u^{n+1}) + q_1. \quad (4)$$

Складывая (2a) с (2б), (2б) с (4), получим

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha v^n + \beta u^n) + \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta v^n) + Q, \quad (5a)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha v^{n+1} + \beta u^{n+1}) + \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta v^n) + Q, \quad (5б)$$

где положено

$$v^n = u^{n+1/2}; \quad v^{n+1} = u^{n+3/2}; \quad Q = q_1 + q_2. \quad (6)$$

Наконец, складывая (5a) с (5б), имеем

$$\begin{aligned} \frac{(u^{n+1} + v^{n+1}) - (u^n + v^n)}{\tau} &= \Lambda_1[(\alpha(v^n + v^{n+1}) + \beta(u^n + u^{n+1})) + \\ &+ \Lambda_2(\alpha u^{n+1} + \beta v^n) + 2Q. \end{aligned} \quad (7)$$

В предположении сильной устойчивости схемы (2)

$$u^n \rightarrow u; \quad v^n \rightarrow v, \quad (8)$$

и из (7) и (8) имеем

$$\Lambda_1(\alpha v + \beta u) + \Lambda_2(\alpha u + \beta v) + Q = 0.$$

При $\alpha = 1/2$ получаем

$$\Lambda \left(\frac{u + v}{2} \right) + Q = 0. \quad (9)$$

Если положить

$$Q = q_1 + q_2 = q, \quad (10)$$

то (9) означает, что осредненная величина $\frac{u^n + u^{n+1/2}}{2}$ сходится к точному решению u разностной краевой задачи

$$\Lambda u + q = 0; \quad u(s) = f(s). \quad (11)$$

Заметим, что указанный способ получения предельного решения становится предпочтительным в случае произвольной границы и переменных коэффициентов. Действительно, мы доказали сходимость полусуммы дробных шагов, не исключая какой-либо дробный шаг и не требуя коммутативности разностных операторов, которая нарушается в случае переменных коэффициентов и произвольной границы. Биркгоф и Варга в своем анализе сходимости метода п. п. п. [56] указали на коммутативность как существенный элемент доказательства сходимости. Повидимому, их возражение отпадает при последнем способе предельного перехода. Ясно, что указанный алгоритм применим для произвольных операторов Λ_1, Λ_2 . В случае уравнения Лапласа он указан в работе [57].

II. 10. СВЕДЕНИЕ СХЕМ НЕПОЛНОЙ АППРОКСИМАЦИИ К СХЕМАМ ПОЛНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

К итерационным схемам применим полностью анализ краевых условий, проведенный в § 2, п. 9. Ухудшение аппроксимации вблизи границы приводит к тому, что если даже схема в целых шагах имеет свойство полной аппроксимации, схема в дробных шагах этим свойством может уже не обладать.

Рассмотрим, например, схему в целых шагах

$$\begin{aligned} (E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^{n+1} &= (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^n, \\ (x_1, x_2) &\in G : \{0 < x_i < \pi\}, \quad i = 1, 2; \\ u^n(x_1, x_2) &= u^{n+1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Схема расщепления

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 \frac{u^n + u^{n+1/2}}{2}; \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 \frac{u^{n+1/2} + u^{n+1}}{2}, \quad (2)$$

для которой поставлены краевые условия

$$u^n(x_1, x_2) = u^{n+1/2}(x_1, x_2) = u^{n+1}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \gamma, \quad (3)$$

не обладает уже свойством полной аппроксимации, так как эквивалентная ей, с учетом краевых условий (3), схема в целых шагах имеет вид (см. § 2, п. 9)

$$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^n + R, \quad (4)$$

где $R \neq 0$ на ω .

Применяя метод неопределенных функций и полагая

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 \frac{u^n + u^{n+1/2}}{2} + q_1; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2 \frac{u^{n+1/2} + u^{n+1}}{2} + q_2, \end{aligned} \quad (5)$$

можно подобрать q_1, q_2 так, чтобы $R = 0$ и удовлетворялись краевые условия (3) (см. § 2, п. 9). После этого схема (5) становится схемой с полной аппроксимацией. Аналогичный прием применим и в том случае, когда схема не обладает полной аппроксимацией в силу самой структуры разностного оператора, а не только краевых условий. Покажем это на примере схемы расщепления. Как известно, в трехмерном случае схема расщепления не обладает свойством полной аппроксимации. Рассмотрим схему расщепления

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1(\alpha u^{n+1/3} + \beta u^n) + q_1; \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2(\alpha u^{n+2/3} + \beta u^{n+1/3}) + q_2; \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3(\alpha u^{n+1} + \beta u^{n+2/3}) + q_3 \end{aligned} \quad (6)$$

с неопределенными правыми частями q_1, q_2, q_3 . Соответствующая схема в целых шагах имеет вид

$$\begin{aligned} &(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)(E - \alpha\tau\Lambda_3)u^{n+1} = \\ &= (E + \beta\tau\Lambda_1)(E + \beta\tau\Lambda_2)(E + \beta\tau\Lambda_3)u^n + \tau Q, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= (E + \beta\tau\Lambda_2)(E + \beta\tau\Lambda_3)q_1 + (E - \alpha\tau\Lambda_1)(E + \beta\tau\Lambda_3)q_2 + \\ &+ (E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)q_3. \end{aligned}$$

Преобразуем схему (7) к виду

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)(E - \alpha\tau\Lambda_3)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^n + R, \quad (8)$$

где

$$R = [\tau(\beta^2 - \alpha^2)(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3) + \tau^2(\beta^3 + \alpha^3)\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3] u^n + Q = \Phi u^n + Q. \quad (9)$$

Потребуем теперь, чтобы схема (6) была схемой полной аппроксимации. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $R = 0$. Если положить внутри области G $q_1 = q_2 = 0$, то для q_3 получим уравнение

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)q_3 = -\Phi u^n. \quad (10)$$

Задавая q_1, q_2, q_3 на границе в соответствии с краевыми условиями, можно определить q_3 из уравнения (10). При указанном выборе q_1, q_2, q_3 схема (6) становится схемой полной аппроксимации.

— \triangle —

§ 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

П. 1. УРАВНЕНИЯ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ И УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Деформация плоского упругого тела характеризуется тензором (*тензор деформации*)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Напряжения в теле, вызванные деформацией, характеризуются тензором σ_{ij} (*тензор напряжения*). По закону Гука, тензоры σ_{ij} , ε_{ij} связаны линейной зависимостью

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \operatorname{div} \vec{u}, \quad (2)$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$, λ, μ – коэффициенты Ламе.

Условия упругого равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho X_1 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho X_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где X_1, X_2 – компоненты массовых сил.

По *принципу Даламбера*, уравнения упругих колебаний имеют вид

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho X_1 &= 0; \\ -\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho X_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где ρ – плотность вещества.

Пользуясь (1), (2), уравнения (4) можно записать в виде

$$-\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{X} = 0. \quad (5)$$

Соответственный вид получают уравнения (3).

Уравнение (5) можно несколько видоизменить

$$\begin{aligned} -\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho X_1 &= 0; \\ -\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \rho X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Соответственно меняются уравнения (3).

В случае отсутствия массовых сил ($X_1 = X_2 = 0$), положив

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (7)$$

тождественно удовлетворим (3). Функция ψ не является произвольной.

Уравнения (7) представляют собой переопределенную систему уравнений для u_i . Условие совместности этой системы, как нетрудно показать, имеет вид

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (8)$$

Действительно, введя в рассмотрение величину

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \quad (9)$$

имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \varepsilon_{12} - \omega; \quad (10)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \varepsilon_{12} + \omega; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22}. \quad (11)$$

Условия совместности (10), (11) дают

$$\frac{\omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2}, \quad (12)$$

соответственно

$$\frac{\omega}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2}. \quad (13)$$

Наконец, условия совместности (12), (13) дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} \right) = \\ = - \left[\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу (2), (7) условия (14) приводят к (8).

Гармонический анализ устойчивости уравнения (5) показывает, что упругие колебания не затухают, следовательно, решения (3) не могут быть получены из решения (4) выходом на стационарный режим. Будем описывать затухание упругих колебаний с помощью уравнения

$$\alpha \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \beta \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{X}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) позволит получить и итерационные схемы решения стационарного уравнения. Для получения простейших итерационных схем можно воспользоваться также уравнением чисто параболического типа

$$\alpha \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{X}. \quad (16)$$

Аналогичный прием может быть использован для уравнения (8). Мы ставим ему в соответствие уравнение

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta \Delta \psi = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad (17)$$

или просто уравнение

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \Delta \psi = 0. \quad (18)$$

II. 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для уравнения (1.5) могут быть поставлены следующие задачи.

1. Первая краевая задача. На границе γ плоской области G заданы смещения u_1, u_2 как функции от s (параметра дуги γ) и t

$$\vec{u}(s) = \vec{f}(s, t). \quad (1)$$

2. Вторая краевая задача. На границе f заданы нормальное и тангенциальное напряжения

$$\sigma_n(s) = f_1(s, t); \quad \sigma_\tau(s) = f_2(s, t). \quad (2)$$

В случае стационарных задач функции $f_1(s)$, $f_2(s)$ должны удовлетворять дополнительным условиям, обеспечивающим равновесие тела, рассматриваемого как жесткое.

3. Краевая задача смешанного типа. На одной части границы задаются смещения, на другой – напряжения.

4. В случае бигармонического уравнения (1.8) или соответствующего неоднородного уравнения

$$\Delta\Delta\psi + q = 0 \quad (3)$$

будем рассматривать краевую задачу следующего типа:

$$\psi = 0, \quad \Delta\psi = f(s). \quad (4)$$

К уравнениям (3), (4) приходим, например, в случае свободно опертой пластины. Тогда ψ истолковывается как смещение средней плоскости пластины, q – нагрузка, $f(s) = 0$ (см., например, [58]).

II. 3. СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ

Для уравнений (1.5), (1.6) при $\rho = 1$ применяется явная схема 2-го порядка точности

$$\begin{aligned} & - \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2} u_i^n + \mu \frac{\Delta_{3-i} \Delta_{-3+i}}{h_{3-i}^2} u_i^n + \\ & + (\lambda + \mu) \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4h_1 h_2} u_{3-i}^n + X_i^n = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1) \end{aligned}$$

А.Н. Коновалов [59] предложил для (1.5), (1.6) неявную схему 2-го порядка точности, основанную на идее приближенной факторизации оператора.

Рассмотрим схему

$$\begin{aligned}
& - \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\Delta_i \Delta_{-i} u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{h_i^2} + \\
& + \mu \frac{\Delta_{3-i} \Delta_{-3+i} u_i^{n+1} + u_i^{n-1}}{h_{3-i}^2} + (\lambda + \mu) \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4h_1 h_2} u_{3-i}^n + X_i^n = \\
& = - \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2} \Lambda_{ii} (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + \\
& + \frac{\mu}{2} \Lambda_{3-i, 3-i} (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + (\lambda + \mu) \Lambda_{12} u_{3-i}^n + X_i^n = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2)
\end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{ii} = \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h_i^2}; \quad \Lambda_{12} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_{-1})(\Delta_2 + \Delta_{-2})}{4h_1 h_2}.$$

Схема (2) имеет 2-й порядок точности, абсолютно устойчива, но реализация ее затруднительна. Факторизуя верхний оператор схемы (2), имеем

$$\begin{aligned}
& [E - \frac{\tau^2}{2}(\lambda + 2\mu)\Lambda_{ii}][E - \frac{\tau^2}{2}\mu\Lambda_{3-i, 3-i}](u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) = \\
& = 2u_i^n + (\lambda + \mu)\tau^2\Lambda_{12}u_{3-i}^n + X_i^n \cdot \tau^2, \quad i = 1, 2. \quad (3)
\end{aligned}$$

Схема (3) имеет точность 2-го порядка, абсолютно устойчива и реализуется с помощью трехточечных прогонок.

Методом энергетических неравенств А. Н. Коновалов доказал сходимость схемы (3) для первой краевой задачи.

II. 4. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аналогично предыдущему будем рассматривать итерационные схемы решения уравнения

$$\Delta\Delta\psi = 0 \quad (1)$$

как схемы интегрирования уравнения

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + (L_{11} + L_{12} + L_{21} + L_{22})\psi = 0; \\
& L_{ij} = \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2)
\end{aligned}$$

1. Схема расщепления. Построим эту схему аналогично случаю уравнения теплопроводности общего типа (см. § 2, п. 4)

$$\frac{\psi^{n+1/2} - \psi^n}{\tau} + \Lambda_{11}\psi^{n+1/2} + \Lambda_{12}\psi^n = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_{21}\psi^{n+1/2} + \Lambda_{22}\psi^{n+1} = 0,$$

где

$$\Lambda_{11} = \left(\frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} \right)^2; \quad \Lambda_{22} = \left(\frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} \right)^2; \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \frac{\Delta_1 \Delta_{-1} \Delta_2 \Delta_{-2}}{(h_1 h_2)^2}. \quad (4)$$

Соответствующая схема в целых шагах имеет вид

$$(E + \tau \Lambda_{11})(E + \tau \Lambda_{22})\psi^{n+1} = (E - \tau \Lambda_{12})^2 \psi^n. \quad (5)$$

Отсюда следует сильная устойчивость схемы

$$\rho = \frac{(1 - a_1 a_2)^2}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)}; \quad a_i = -\frac{4\sqrt{\tau} \sin^2 \frac{k_i h_i}{2}}{h_i^2}. \quad (6)$$

Принимая во внимание тождество

$$\Lambda_{11} \Lambda_{22} = \Lambda_{12}^2, \quad (7)$$

видим, что в отличие от уравнения теплопроводности схема расщепления (3) для бигармонического уравнения обладает свойством полной аппроксимации.

2. Схема стабилизирующей поправки. В работе Конте и Дэймса [60] была обобщена схема стабилизирующей поправки Дугласа - Рэкфорда на случай бигармонического уравнения

$$\frac{\psi^{n+1/2} - \psi^n}{\tau} + \Lambda_{11}\psi^{n+1/2} + 2\Lambda_{12}\psi^n + \Lambda_{22}\psi^n = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_{22}(\psi^{n+1} - \psi^n) = 0.$$

Соответствующая схема в целых шагах имеет вид

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})\psi^{n+1} + 2\Lambda_{12}\psi^n + \tau \Lambda_{11} \Lambda_{22} (\psi^{n+1} - \psi^n) = 0. \quad (8')$$

В силу (7) схема (8) эквивалентна (5).

3. Схема аппроксимационной поправки

$$\frac{\psi^{n+1/4} - \psi^n}{\alpha\tau} + \Lambda_{11}\psi^{n+1/4} = 0; \quad \frac{\psi^{n+1/2} - \psi^{n+1/4}}{\alpha\tau} + \Lambda_{22}\psi^{n+1/2} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + \Lambda\psi^{n+1/2} = 0; \quad \Lambda = \Lambda_{11} + 2\Lambda_{12} + \Lambda_{22}.$$

Схема в целых шагах имеет вид

$$(E + \alpha\tau\Lambda_{11})(E + \alpha\tau\Lambda_{22})\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + \Lambda\psi^n = 0 \quad (10)$$

и эквивалентна (5) при $\alpha = 1$

4. Схема стабилизирующего оператора

$$A\frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\tau} + \Lambda\psi^n = 0; \quad \Lambda = \Lambda_{11} + 2\Lambda_{12} + \Lambda_{22};$$

$$A = (E + \alpha\tau\Lambda_{11})(E + \alpha\tau\Lambda_{22}) \quad (11)$$

также эквивалентна (5) при $\alpha = 1$.

Таким образом, схемы расщепления ($\alpha = 1$), поправок (при $\alpha = 1$) и стабилизирующего оператора ($\alpha = 1$) представляет собой различные реализации одной и той же однородной схемы. Они различаются, кроме того, реализацией краевых условий. Заметим, что схемы расщепления и стабилизирующего оператора являются двухслойными, схемы поправок – трехслойными.

5. Схема расщепления для системы гармонических уравнений. Для некоторых краевых задач упругости, например для задачи о поперечном изгибе нагруженной свободно подпертой пластины, вместо бигармонического уравнения удобнее пользоваться системой двух гармонических.

Для краевой задачи

$$\Delta\psi = \varphi; \quad \Delta\varphi + q = 0; \quad (12)$$

$$\varphi(s) = f(s); \quad \psi(s) = g(s) \quad (13)$$

рассмотрим схему расщепления

$$\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha\varphi^{n+1/2} + \beta\varphi^n);$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha\varphi^{n+1} + \beta\varphi^{n+1/2}) + q;$$

$$\frac{\psi^{n+1/2} - \psi^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha\psi^{n+1/2} + \beta\psi^n); \quad (14)$$

$$\frac{\psi^{n+1} - \psi^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha\psi^{n+1} + \beta\psi^{n+1/2}) + \varphi^{n+1}.$$

Схема (14) является сильно устойчивой и полно аппроксимирующей при $\alpha = 1/2$.

Предельный переход следует брать для полусуммы значений функций на целом и дробном шагах (см. § 4, п. 9).

II. 5. ИТЕРАЦИОННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ В СМЕЩЕНИЯХ

Для уравнения упругого равновесия в смещениях

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} &= 0; \\ (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

А.Н. Коноваловым [61] была предложена и исследована схема стабилизирующей поправки

$$\frac{u_1^{n+1/2} - u_1^n}{\tau} = \Lambda_{11}u_1^{n+1/2} + \Lambda_{12}u_1^n + \Omega u_2^n; \quad (2a)$$

$$\frac{u_2^{n+1/2} - u_2^n}{\tau} = \Omega u_1^{n+1/2} + \Lambda_{21}u_2^{n+1/2} + \Lambda_{22}u_2^n, \quad (2б)$$

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{12}(u_1^{n+1} - u_1^n), \quad \frac{u_2^{n+1} - u_2^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_{22}(u_2^{n+1} - u_2^n),$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\Delta_1\Delta_{-1}}{h_1^2}; & \Lambda_{12} &= \mu\frac{\Delta_2\Delta_{-2}}{h_2^2}; & \Lambda_{21} &= \mu\frac{\Delta_1\Delta_{-1}}{h_1^2}; \\ \Lambda_{22} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\Delta_2\Delta_{-2}}{h_2^2}; & \Omega &= (\lambda + \mu)\frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{h_1^2} \cdot \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_2}. \end{aligned}$$

А.Н. Коновалов доказал сходимость этой схемы для первой краевой задачи в прямоугольнике. Ряд схем с дробными шагами для уравнений упругости был предложен также А.А. Самарским [96].

П. 6. КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ УПРУГОСТИ

При решении краевой задачи второго рода требуется построение рекуррентной системы счета граничных условий. Покажем это на примере следующей краевой задачи (см. рис. 5).

Выпишем краевые условия на левой вертикальной границе

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= f_2; \\ \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= f_1. \end{aligned} \quad (1)$$

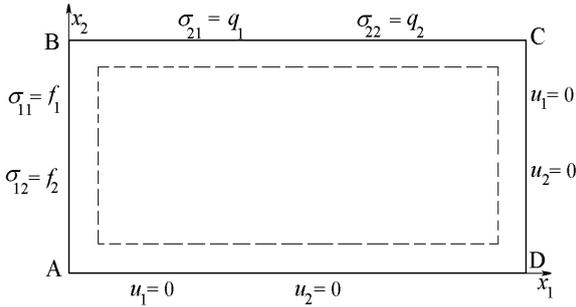


Рис. 5. Решение смешанной краевой задачи для уравнений упругости в прямоугольнике.

Система (1) есть система гиперболического типа, в которой в случае вертикальной границы роль временного переменного играет x_2 , роль пространственного – x_1 . Величины u_1, u_2 на границе будем обозначать u_1^n, u_2^n , величины в ближайших к ним внутренних точках сетки – U_1^n, U_2^n . Простейшая явная аппроксимация (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \mu \frac{u_2^n - U_2^n}{h_1} &= f_2^n; \\ \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^n - U_1^n}{h_1} &= f_1^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения устойчивости уравнений (2) при фиксированных $U_1^n, U_2^n, f_1^n, f_2^n$ составим уравнения в вариациях (для простоты обозначений знак

вариации отбрасываем)

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \frac{u_2^n}{h_1} = 0, \quad \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^n}{h_1} = 0. \quad (3)$$

Отсюда

$$\bar{u}^{n+1} = C\bar{u}^n; \quad \bar{u} = \{u_1, u_2\}; \quad C = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \frac{h_2}{h_1} \\ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \cdot \frac{h_2}{h_1} & 1 \end{array} \right\| \quad (3')$$

Оценим норму матрицы перехода C из (3'). Для ее характеристических корней имеем выражение

$$\rho_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \cdot \frac{h_2}{h_1}} \quad (4)$$

Отсюда следует, что спектральный радиус и норма матрицы C больше 1, рекуррентный счет (2) неустойчив.

Применим неявную аппроксимацию

$$\begin{aligned} \mu \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \mu \frac{u_2^{n+1} - U_2^{n+1}}{h_1} &= f_2^n; \\ \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^{n+1} - U_1^{n+1}}{h_1} &= f_1^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения в вариациях имеют вид

$$\frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{h_2} - \frac{u_2^{n+1}}{h_1} = 0; \quad \lambda \frac{u_2^{n+1} - u_2^n}{h_2} - (\lambda + 2\mu) \frac{u_1^{n+1}}{h_1} = 0. \quad (6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_1^n &= u_1^{n+1} - \frac{h_2}{h_1} u_2^{n+1}; \\ u_2^n &= -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \cdot \frac{h_2}{h_1} u_1^{n+1} + u_2^{n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для устойчивости счета необходимо, чтобы матрица (обратная матрицы перехода)

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 & -\frac{h_2}{h_1} \\ -\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \cdot \frac{h_2}{h_1} & 1 \end{array} \right\| \quad (8)$$

имела характеристические корни ≥ 1 . Для корней ρ матрицы (8) имеем выражение

$$\rho_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}} \cdot \frac{h_2}{h_1} \quad (9)$$

Отсюда условие устойчивости принимает вид

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}} \cdot \frac{h_2}{h_1} \geq 2. \quad (10)$$

При написании аналогичной схемы по верхней горизонтальной стороне h_1, h_2 меняются ролями, и получим

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda}} \cdot \frac{h_1}{h_2} \geq 2. \quad (11)$$

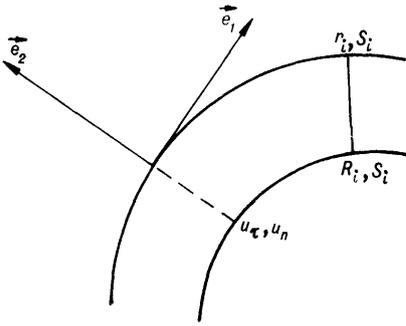


Рис. 6. Краевые условия 2-го рода в местном репере.

стрелки, другой – по внешней нормали (см. рис. 6). Тогда вектор смещения \vec{u} представится в виде

$$\vec{u} = u_\tau \vec{e}_1 + u_n \vec{e}_2. \quad (12)$$

В отличие от случая прямоугольника направление \vec{e}_2 будем считать временным, \vec{e}_1 – пространственным, местные декартовы координаты будем обозначать через t , соответственно x .

Тогда краевые условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_n}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u_\tau}{\partial x} &= f_1; \\ \mu \left(\frac{\partial u_\tau}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) &= f_2. \end{aligned} \quad (13)$$

^{1*} Данный анализ устойчивости принадлежит А.Н. Коновалову.

Приведем уравнения (13) к инвариантам

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c \frac{\partial r}{\partial x} = g_1; \quad \frac{\partial s}{\partial t} - c \frac{\partial s}{\partial x} = g_2, \quad (14)$$

где

$$r = u_n + cu_\tau; \quad s = u_n - cu_\tau, \quad c = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}}; \quad (15)$$

$$g_1 = \frac{f_1}{\lambda + 2\mu} + c \frac{f_2}{\mu}; \quad g_2 = \frac{f_1}{\lambda + 2\mu} - c \frac{f_2}{\mu}.$$

После этого уравнения (14) решаются с помощью неявной мажорантной схемы

$$\frac{r_i - R_i}{\tau} + c \frac{r_i - r_{i-1}}{h} = g_{1i}; \quad \frac{s_i - S_i}{\tau} - c \frac{s_{i+1} - s_i}{h} = g_{2i}, \quad (16)$$

которая устойчива при любых τ, h .

В случае прямоугольной области (см. рис. 5) на стороне AB имеем

$$u_1 = -u_n; \quad u_2 = u_\tau; \quad t = -x_1; \quad x = x_2; \quad \tau = h_1; \quad h = h_2; \\ r = -u_1 + cu_2; \quad s = -u_1 - cu_2, \quad (17)$$

на стороне BC

$$u_1 = u_\tau; \quad u_2 = u_n; \quad t = x_2; \quad x = x_1; \quad \tau = h_2; \quad h = h_1; \\ r = u_2 + cu_1; \quad s = u_2 - cu_1. \quad (18)$$

Переход от инвариантов (17) к инвариантам (18) производится на некоторой дуге, скругляющей угол ABC .

В заключение нашего анализа краевых задач упругости заметим, что исследованы полностью только немногие задачи и немногие методы.

— \triangle —

§ 6. СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ (с.п.т.)

До сих пор мы рассматривали разностные схемы интегрирования, дающие точность $O(\tau^\alpha + h^\beta)$, $\alpha, \beta \leq 2$. Соответствующие итерационные схемы давали точность $O(h^\beta)$. Метод дробных шагов может быть применен для получения простых схем повышенной точности $\beta > 2$.

П. 1. ОДНОРОДНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ

Следуя работам Дугласа, Гана [62] и А.А. Самарского [63], рассмотрим ряд однородных с.п.т. для уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad a_{ij} = \text{const}. \quad (2)$$

Для произвольной достаточно гладкой функции $u(x_1, \dots, x_m, t)$ справедливы следующие аппроксимационные оценки (положено $h_1 = h_2 = \dots = h_m = h$):

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i^2} = \Lambda_i u^n - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + O(h^4), \quad (3)$$

$$\Delta u^n = \Lambda u^n - \frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + O(h^4),$$

$$\frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i^2} = \frac{1}{3} \Lambda_i (u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + O(\tau^2 + h^4); \quad (4)$$

$$\Delta u = \frac{1}{3} \Lambda (u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) - \frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + O(\tau^2 + h^4),$$

где

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \quad \Lambda = \sum_{i=1}^m \Lambda_i; \quad u^n(x_1, \dots, x_m) = u(x_1, \dots, x_m, n\tau).$$

Из (4) следует для решения уравнения (1)

$$\frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} = \frac{1}{3}\Lambda(u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) - \frac{h^2}{12} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} + O(\tau^2 + h^4). \quad (5)$$

Замечая в случае уравнения (1), что

$$\Delta^2 u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} + 2 \sum_{i<j} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} = \Delta u_t = u_{tt}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

МОЖЕМ ПОЛОЖИТЬ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} &= \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} - 2 \sum_{i<j} \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} + O(\tau^2) = \\ &= \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} - 2 \sum_{i<j} \Lambda_i \Lambda_j u^n + O(\tau^2 + h^2), \\ & \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (7)$$

либо

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial^4 u^n}{\partial x_i^4} = \Lambda \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} - 2 \sum_{i<j} \Lambda_i \Lambda_j u^n + O(\tau^2 + h^2). \quad (8)$$

Сопоставляя уравнения (5), (7), (8), приходим к однородной с.п.т.

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} &= \frac{1}{3}\Lambda(u^{n-1} + u^n + u^{n+1}) - \\ & \quad - \frac{h^2}{12} \left[\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} - 2 \sum_{i<j} \Lambda_i \Lambda_j u^n \right] \end{aligned} \quad (9)$$

либо соответственно

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} &= \frac{1}{3}\Lambda \left[\left(1 - \frac{1}{8r}\right) u^{n+1} + u^n + \left(1 + \frac{1}{8r}\right) u^{n-1} \right] + \\ & \quad + \frac{h^2}{6} \sum_{i<j} \Lambda_i \Lambda_j u^n, \quad r = \tau/h^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично получается двухслойная с.п.т., основанная на оценках (3), (6)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} - \frac{h^2}{12} \Lambda \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{h^2}{6} \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n. \quad (11)$$

Схему (11) можно записать в виде

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \alpha \Lambda u^{n+1} + (1 - \alpha) \Lambda u^n + \frac{h^2}{6} \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j u^n, \quad (12)$$

$$\alpha = 0,5 \left(1 - \frac{h^2}{6\tau}\right) = 0,5 \left(1 - \frac{1}{6r}\right).$$

Схемы (9), (10), (11), (12) являются абсолютно устойчивыми и имеют порядок точности $O(\tau^2) + O(h^4)$.

II. 2. ФАКТОРИЗОВАННЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работах Дугласа, Гана [62], А.А. Самарского [63], В.Б. Андреева и А.А. Самарского [64] рассмотрены с.п.т. для параболических уравнений вида (1.1), (1.2).

Авторы строят легко реализуемые с.п.т. с факторизованным («расщепленным») верхним оператором. Эти схемы строятся исходя из m -слойной однородной с.п.т. ($m \geq 2$)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = Au^{n+1} + f^n, \quad (1)$$

где f^n – результат применения разностных пространственных операторов к функциям u^n, u^{n-1}, \dots

Метод построения факторизованной схемы, предложенный Дугласом и Ганом [62], выглядит следующим образом. Пусть

$$A = A_1 + \dots + A_m \quad (2)$$

есть разложение A на сумму операторов $A_i, i = 1, 2, \dots, m$. Тогда стро-

ится схема типа стабилизирующей поправки

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+2/m} - u^n}{\tau} &= A_1(u^{n+1/m} - u^n) + Au^n + f^n; \\ \frac{u^{n+2/m} - u^{n+1/m}}{\tau} &= A_2(u^{n+2/m} - u^n); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+(m-1)/m}}{\tau} &= A_m(u^{n+1} - u^n). \end{aligned} \quad (3)$$

Схема в целых шагах имеет вид

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = Au^{n+1} + f^n + \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right), \quad (4)$$

$$\Phi = -\tau^2 \sum_{i < j} A_i A_j + \tau^3 \sum_{i < j < k} A_i A_j A_k + \dots + (-1)^{m-1} \tau^m A_1 \dots A_m. \quad (5)$$

Рассмотрим факторизованные схемы, соответствующие уравнению (1.1) ($m = 2$) и схемам (1.9), (1.10).

В случае (1.9) полагаем

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}\Lambda - \frac{1}{6} \frac{h^2}{\tau^2} E; \\ A_1 &= \frac{2}{3}\Lambda_1 - \frac{1}{6} \frac{h^2}{\tau^2} E; \\ A_2 &= \frac{2}{3}\Lambda_2. \end{aligned} \quad (6)$$

При $\tau/h = \text{const}$ схемы (3), (6) имеют порядок $O(\tau^2 + h^4)$ и являются абсолютно устойчивыми.

Для схемы (1.10) имеем

$$A = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{8r} \right) \Lambda, \quad A_i = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{8r} \right) \Lambda_i, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

При $\tau/h^2 = \text{const}$ схема (3), (7) имеет точность $O(\tau^2 + h^4)$ и абсолютно устойчива.

В работе А.А. Самарского [63] предлагается другой метод построения факторизованного оператора. Схема (1) заменяется схемой

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= Au^{n+1} + f^n + \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) = \\ &= Au^{n+1} + f^n + \frac{1}{\tau} \Phi(u^{n+1} - u^n), \end{aligned} \quad (8)$$

где неопределенный пока оператор Φ подбирается таким образом, чтобы верхний оператор в схеме (8) был факторизованным. Если факторизация производится в соответствии с разложением (2), то

$$E - \tau A - \Phi = (E - \tau A_1) \dots (E - \tau A_m). \quad (9)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \Phi &= E - \tau A - (E - \tau A_1) \dots (E - \tau A_m) = \\ &= -\tau^2 \sum_{i < j} A_i A_j + \tau^3 \sum_{i < j < k} A_i A_j A_k + \dots + (-1)^{m-1} \tau^m A_1 \dots A_m. \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая выражения (5), (10), видим, что при совпадении исходных схем (1) и разложения (2) схемы (3), (8) эквивалентны.

В работе [63] в качестве исходной схемы (1) была взята двухслойная с.п.т. (1.12). Тогда факторизованная схема имеет вид

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2) \dots (E - \alpha\tau\Lambda_m)u^{n+1} = \Omega u^n, \quad (11)$$

где

$$\Omega = E + \tau \left[(1 - \alpha)\Lambda + \frac{h^2}{6} \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j \right] - \Phi;$$

$$\Phi = -\alpha^2 \tau^2 \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j + \alpha^3 \tau^3 \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + (-1)^m \alpha^m \tau^m \Lambda_1 \dots \Lambda_m. \quad (12)$$

В частном случае $m = 2$ схема А.А. Самарского принимает особенно простой вид

$$(E - \alpha\tau\Lambda_1)(E - \alpha\tau\Lambda_2)u^{n+1} = [E + (1 - \alpha)\tau\Lambda_1][E + (1 - \alpha)\tau\Lambda_2]u^n. \quad (13)$$

Аналогично строится с.п.т. для уравнения (1.2), в котором для простоты положим $a_{11} = a_{22} = 1$ (см. [63]). Исходная однородная схема имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n-1}}{2\tau} &= \frac{\Lambda_{11} + \Lambda_{22}}{2}(u^{n+1} + u^{n-1}) + 2a_{12}\Lambda_{12}u^n - \\ &\quad - \frac{h^2}{12} \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + \frac{h^2}{6} b\Lambda_1\Lambda_2 u^n, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{ii} &= \frac{\Delta_i \Delta_{-i}}{h^2}, \quad \Lambda_{12} = \frac{\Delta_{-1} \Delta_{-2} + \Delta_1 \Delta_2}{2h^2}, \quad a_{12} > 0, \\ \Lambda_{12} &= \frac{\Delta_{-1} \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_{-2}}{2h^2}, \quad a_{12} < 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$b = 1 + 2a_{12}^2 - 3|a_{12}|.$$

Факторизованная схема имеет вид

$$A_1 A_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (1 - 2\alpha) \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} + \alpha \Lambda (u^n + u^{n-1}) + 4\alpha a_{12} \Lambda_{12} u^n + 2(1 - \alpha) \tau b \Lambda_1 \Lambda_2 u^n, \quad (16)$$

$$A_i = E - \alpha \tau \Lambda_{ii}; \quad \alpha = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{6\tau}}.$$

П. 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ПОМОЩЬЮ С.П.Т.

Рассмотренные в предыдущих пунктах схемы являлись схемами интегрирования уравнений (1.1), (1.2) высокого порядка точности, обладали полной аппроксимацией и абсолютной устойчивостью. Поэтому они вполне пригодны как итерационные схемы повышенной точности.

Для итерационных схем точность интегрирования по «релаксационному времени» t является условной, существенна точность аппроксимации по пространственным переменным. Поэтому в случае итерационных схем имеется возможность использовать схемы с меньшей точностью по времени, лишь бы они удовлетворяли условию полной аппроксимации и были достаточно точными по пространственным переменным.

Ограничимся, для простоты, случаем $m = 2$. Для уравнения Лапласа

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (1)$$

однородная с.п.т. имеет вид

$$\Omega = \left(\Lambda + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 \right) u = 0. \quad (2)$$

Следуя работе А.А. Самарского, В.Б. Андреева [64], будем исходить из однородной абсолютно устойчивой схемы первого порядка точности по t

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 u^n. \quad (3)$$

Схема (3) тождественна следующей:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^n + \tau \Lambda \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2 u^n = \\ &= \tau \Lambda \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Omega u^n, \end{aligned} \quad (4)$$

или

$$(E - \tau\Lambda)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n. \quad (5)$$

Факторизуя оператор $E - \tau\Lambda$, получаем факторизованную с.п.т.

$$(E - \tau\Lambda_1)(E - \tau\Lambda_2)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Omega u^n, \quad (6)$$

обладающую полной аппроксимацией и сильно устойчивую.

Простые итерационные с.п.т. были получены В.А. Енальским [67], исходя из схем расщепления и п.п.п. Мы воспроизводим исследование [67] в несколько более общем виде

Рассмотрим схему расщепления

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1(\alpha_1 u^{n+1/2} + \beta_1 u^n); \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} &= \Lambda_2(\alpha_2 u^{n+1} + \beta_2 u^{n+1/2}) \end{aligned} \quad (7)$$

с неопределенными параметрами $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$. Схема в целых шагах имеет вид

$$(E - \alpha_1\tau\Lambda_1)(E - \alpha_2\tau\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \beta_1\tau\Lambda_1)(E + \beta_2\tau\Lambda_2)u^n. \quad (8)$$

Подберем α_i, β_i так, чтобы выполнялось условие полной аппроксимации. Преобразуем уравнение (8) к виду

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Omega_1 u^{n+1} + \Omega_2 u^n; \\ \Omega_1 &= \alpha_1\Lambda_1 + \alpha_2\Lambda_2 - \alpha_1\alpha_2\tau\Lambda_1\Lambda_2; \\ \Omega_2 &= \beta_1\Lambda_1 + \beta_2\Lambda_2 + \beta_1\beta_2\tau\Lambda_1\Lambda_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Условие полной аппроксимации означает, что

$$\Omega_1 + \Omega_2 = k\Omega = k(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6}\Lambda_1\Lambda_2). \quad (10)$$

За счет перенормирования параметра τ можем положить $k = 1$, и тогда условие (10) дает

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 &= \alpha_2 + \beta_2 = 1; \\ \beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2 &= \frac{1}{6r} = \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнений (11) находим

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \theta. \quad (12)$$

При условии

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \frac{1 - \theta}{2} \quad (13)$$

получается схема А.А. Самарского (2.13).

В работе [68] В.А. Енальский предложил в схемах с дробными шагами проводить разложения по операторам Λ_1 , Λ_2 , $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$. Тогда получаем следующие схемы:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/2} + \alpha \Lambda_1 u^n + \beta \Lambda_2 u^n + \gamma \tau \Lambda_1 \Lambda_2 u^n; \quad (14)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 u^{n+1} + \alpha \Lambda_2 u^{n+1/2} + \beta \Lambda_1 u^{n+1/2} + \gamma \tau \Lambda_1 \Lambda_2 u^{n+1/2}$$

с неопределенными коэффициентами α , β , γ . Схема в целых шагах имеет вид

$$\begin{aligned} Au^{n+1} &= Bu^n \\ A &= (E - \tau \Lambda_1)(E - \tau \Lambda_2); \\ B &= (E + \alpha \tau \Lambda_1 + \beta \tau \Lambda_2 + \gamma \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2) \times \\ &\quad \times (E + \beta \tau \Lambda_1 + \alpha \tau \Lambda_2 + \gamma \tau^2 \Lambda_1 \Lambda_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Подберем коэффициенты α , β , γ так, чтобы оператор $B - A$ делился на оператор $\Omega = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h^2}{6} \Lambda_1 \Lambda_2$. Из требования делимости следуют условия для α , β , γ

$$\frac{2\gamma + (\alpha - \beta)^2 - 1}{\alpha + \beta + 1} = \sigma, \quad \frac{\gamma^2}{\gamma(\alpha + \beta) - \alpha\beta\sigma} = \sigma, \quad \sigma = \frac{h^2}{6\tau} = \frac{1}{6r}. \quad (16)$$

Если

$$\alpha = \sigma, \quad \beta = 1 + \sigma, \quad \gamma = \alpha\beta, \quad (17)$$

то условия (16) выполняются, и получается схема, предложенная В.А. Енальским [68].

— \triangle —

§ 7. ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

П. 1. КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Для кинетического уравнения (односкоростное приближение, изотропное рассеяние)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m-1} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \sigma \varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int \varphi(x, u, t) du + S(x, u, t) \quad (1)$$

в работе Г.И. Марчука и автора [69] была указана схема (неполного расщепления)

$$\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha \varphi^{n+1/2} + \beta \varphi^n) + \bar{S}, \quad (2a)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2(\alpha \varphi^{n+1} + \beta \varphi^{n+1/2}). \quad (2б)$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \bar{S}$ — аппроксимации операторов $-\sigma E + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int du$, соответственно

$$\sum_{k=1}^{m-1} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad S, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1.$$

Схема (2) реализуется следующим образом. Суммируя (2a) по u_k , получим

$$\frac{\varphi_0^{n+1/2} - \varphi_0^n}{\tau} = -\sigma_c(\alpha \varphi_0^{n+1/2} + \beta \varphi_0^n) + \bar{S}_0, \quad (3)$$

где

$$\varphi_0 = \sum \varphi \Delta u; \quad \bar{S}_0 = \sum \bar{S} \Delta u; \quad \sigma_c = \sigma - \sigma_s \quad (3a)$$

и сумма в (3a) берется по сеточным индексам.

Из уравнения (3) $\varphi_0^{n+1/2}$ разрешается явно

$$\varphi_0^{n+1/2} = \frac{1 - \beta\tau\sigma_c}{1 + \alpha\tau\sigma_c}\varphi_0^n + \frac{\bar{S}_0}{1 + \alpha\tau\sigma_c}\tau. \quad (4)$$

После этого интегрируется уравнение (2а), которое можно переписать в виде

$$\frac{\varphi^{n+1/2} - \varphi^n}{\tau} + \sigma(\alpha\varphi^{n+1/2} + \beta\varphi^n) = \frac{\sigma_s}{4\pi}(\alpha\varphi_0^{n+1/2} + \beta\varphi_0^n) + \bar{S}. \quad (2в)$$

Для облегчения реализации второго дробного шага применяется схема полного расщепления

$$\frac{\varphi^{n+1/m} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_1(\alpha\varphi^{n+1/m} + \beta\varphi^n) + \bar{S}, \quad (5а)$$

$$\frac{\varphi^{n+\frac{i+1}{m}} - \varphi^{n+\frac{i}{m}}}{\tau} = \Lambda_{2i}(\alpha\varphi^{n+\frac{i+1}{m}} + \beta\varphi^{n+\frac{i}{m}}), \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (5б)$$

где $\Lambda_2 = \Lambda_{21} + \dots + \Lambda_{2m-1}$; Λ_{2i} – аппроксимации одномерных операторов $u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, m-1$; $(m-1)$ – размерность пространства.

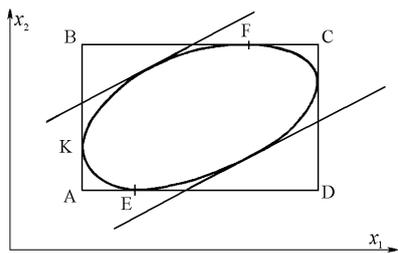


Рис. 7. Доопределение φ в $\Pi - \Pi_0$ в двумерном случае.

Остановимся на анализе краевых условий. Для уравнения (1) ставится смешанная задача Коши

$$\begin{aligned} \varphi(x, u, 0) &= \varphi_0(x, u), \quad (x, u) \in G, \\ \varphi(x, u, t) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} u_k \cdot n_k \leq 0, \quad (x, u, t) \in \Gamma. \quad (7)$$

в цилиндрической области $\Pi = G \times H$ с основанием G , боковой границей $\Gamma = \gamma \times H$, $\gamma = \bar{G} - G$ и нормалью $n = \{n_k\}$. Если Π есть параллелепипед, то реализация краевых условий в схеме полного расщепления очевидна: на каждом i -м дробном шаге (5б) осуществляется схема бегущего счета вдоль x_i в направлении от освещенной грани $\left(\sum_{k=1}^{m-1} u_k \cdot n_k \leq 0 \right)$.

В случае произвольной цилиндрической области Π_0 с основанием G_0 область Π_0 заключается в параллелепипед Π , и значения φ соответственно доопределяются в области $\Pi - \Pi_0$. В двумерном случае доопределение

φ производится следующим образом (см. рис. 7). При проведении первого дробного шага ($i = 1$) из (5б) полагается $\varphi^{n+2/3} = 0$ на AB , $\varphi^{n+1/3} = 0$ в областях FVK , $KAЕ$. Второй дробный шаг ($i = 2$) проводится с начальными данными $\varphi^{n+2/3}$, полученными из первого дробного шага, и с краевыми условиями $\varphi = \varphi^{n+1}$ на AD . Подробное исследование сходимости разностной схемы проводится в работах [70], [71].

Заметим, что аналогичный прием суммирования φ для получения разностного уравнения, содержащего на верхнем слое только φ_0 , применялся В.Я. Гольдиным [98].

II. 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В работе А. А. Самарского [50] был предложен и обоснован алгоритм для решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j = f_i(t), \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Явная схема интегрирования (1) имеет первый порядок точности и требует $O(m^2)$ операций.

Обычная неявная схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + A \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = f^{n+1}, \quad u = \{u_i\}, \quad f = \{f_i\}, \quad A = \{a_{ij}\} \quad (2)$$

имеет 2-й порядок и требует $O(m^3)$ операций. В работе [50] предлагается схема, аналогичная схеме п.п.п.

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 u^n &= f^{n+1/2}, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau/2} + A_1 u^{n+1/2} + A_2 u^{n+1} &= f^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2, \\ A_1 &= (a_{ij}^-), \quad A_2 = (a_{ij}^+), \quad a_{ij}^- = 0, \quad j > i, \\ a_{ii}^- + a_{ii}^+ &= a_{ii}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если треугольные матрицы A_1, A_2 являются положительно определенными, т. е.,

$$(A_\alpha u, u) \geq C \|u\|^2, \quad C > 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (5)$$

то схема (3) устойчива.

Схема (3) может рассматриваться также как итерационная. Для коэффициента ρ затухания погрешности справедлива оценка (см. [50])

$$\rho \leq \bar{\rho} = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{2C\tau}{1 + d^2\tau^2}, \quad (6)$$

где

$$d = \max(\|A_1\|, \|A_2\|).$$

Нетрудно установить, что может быть применена схема, аналогичная схеме расщепления.

— \triangle —

§ 8. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

Метод дробных шагов может быть с успехом применен к задачам гидродинамики для построения экономичных схем интегрирования и итерационных схем.

П. 1. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ КОНТУРА

Рассмотрим плоское потенциальное течение несжимаемой жидкости вокруг контура γ , имеющего осью симметрии прямую $x_2 = 0$ (см. рис. 8).

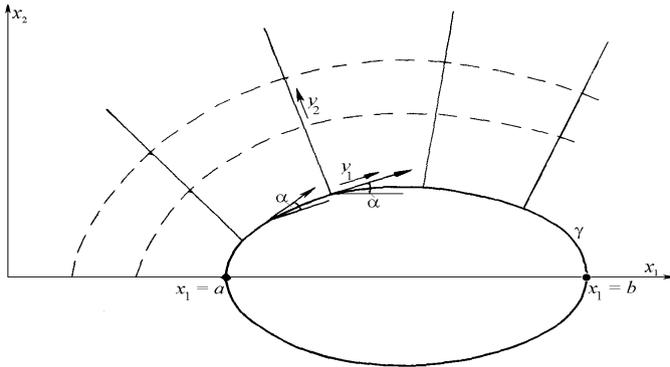


Рис. 8. Ортогональная сеть эквидистант и нормалей.

Поток на бесконечности будем считать однородным и вектор скорости $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$ направленным по оси x_1 :

$$u_1 \rightarrow u_{10}, \quad u_2 \rightarrow 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Для функции тока ψ получаем краевую задачу

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = 0, \quad (2)$$

$$\psi(x_1, 0) = 0, \quad -\infty < x_1 \leq a, \quad b \leq x_1 < \infty, \quad (3a)$$

$$\psi(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma, \quad (3б)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -u_{10}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty. \quad (3в)$$

Можно решать задачу (2), (3) в декартовых координатах, но тогда сетка в окрестности границы будет неравномерной, что уменьшает точность расчета.

Введем ортогональную систему координат y_1, y_2 , где y_1 есть длина дуги контура γ , y_2 – расстояние до γ , отсчитываемое по нормали, y_1, y_2 связаны с x_1, x_2 соотношениями

$$x_1 = x_1(y_1) - y_2 \sin \alpha(y_1),$$

$$x_2 = x_2(y_1) + y_2 \cos \alpha(y_1), \quad \cos \alpha = \frac{dx_1}{dy_1},$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 = [1 - y_2 k]^2 dy_1^2 + dy_2^2.$$

Здесь

$$x_1 = x_1(y_1), \quad x_2 = x_2(y_1)$$

- параметрическое задание контура γ ; $k(y_1) = d\alpha/dy_1$ – кривизна контура.

Уравнение (2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) = 0, \quad (4)$$

где

$$H_1 = (1 - ky_2)^2, \quad H_2 = 1. \quad (5)$$

Область интегрирования преобразуется в полубесконечную полосу

$$0 \leq y_1 \leq l, \quad 0 \leq y_2 < \infty, \quad (6)$$

где l – полупериметр контура.

Краевые условия формулируются в плоскости y_1, y_2 следующим образом:

$$\psi(0, y_2) = 0, \quad \psi(l, y_2) = 0, \quad (7a)$$

$$\psi(y_1, 0) = 0, \quad 0 \leq y_1 \leq l, \quad (7б)$$

$$\psi(y_1, a) = -u_{10}x_2 = u_{10}\{x_2(y_1) + a \cos \alpha(y_1)\}. \quad (7в)$$

При $a \rightarrow \infty$ получаем точную постановку краевой задачи, если заменим условие (7в) условием (3в), выразив последнее в координатах y_1, y_2 .

Задача Дирихле (4), (7) в прямоугольнике $0 \leq y_1 \leq l, 0 \leq y_2 \leq a$ решается известным образом (см. § 4).

Заметим, что для ускорения сходимости следует изменить масштаб по оси y_2 , введя новую переменную $Y_2 = f(y_2)$. Кроме того, для ускорения сходимости полезно ввести релаксационный множитель $F(y_1, y_2, t)$ так, чтобы решать задачу Дирихле для нестационарного уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F(y_1, y_2, t) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right]. \quad (8)$$

Подобного рода алгоритм был реализован в виде программы, учитывающей возможность также осевой симметрии.

II. 2. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ (ЗАДАЧА О ВОДОСЛИВЕ)

Рассмотрим задачу о набегании однородного на бесконечности потока на неровность дна (см. рис. 9).

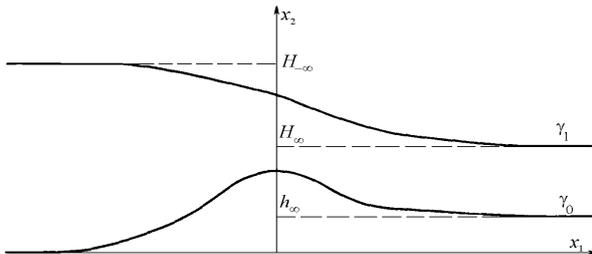


Рис. 9. Набегание потока на неровность дна.

Будем считать, что линия дна задана уравнением

$$x_2 = f(x_1), \quad (1)$$

где $f(x_1)$ удовлетворяет условиям

$$f(-\infty) = 0; \quad f(+\infty) = h_\infty. \quad (2)$$

По-прежнему движение жидкости подчиняется уравнению (1.2).

В физической плоскости x_1, x_2 краевые условия имеют вид

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = u_{-\infty}, \quad u_2 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq H_{-\infty}, \quad x_1 = -\infty, \quad (3a)$$

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = u_\infty, \quad u_2 = 0, \quad h_\infty \leq x_2 \leq H_\infty, \quad x_1 = +\infty, \quad (3б)$$

$$\psi = 0, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_0,$$

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right] + P_0 = -gx_2 + c_1, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1, \quad (3в)$$

$$\psi = \text{const} = c_2, \quad (x_1, x_2) \in \gamma_1. \quad (3г)$$

Здесь $H_{-\infty}$ – заданная величина, P_0 – давление на верхней (свободной) границе.

Условие (3г) означает, что свободная поверхность в стационарном потоке является, как и дно, линией тока (ψ -линией), условие (3в) отвечает закону Бернулли.

Свободная поверхность является неопределенной и должна быть выбрана таким образом, чтобы условия (3в), (3г) были совместны. Константы c_1, c_2 определяются из условий

$$c_2 = u_{-\infty} H_{-\infty}, \quad (4)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} u_{-\infty}^2 + P_0 + gH_{-\infty}. \quad (5)$$

Наконец, предельные высота H_∞ и скорость u_∞ определяются из законов сохранения массы и импульса (закона Бернулли)

$$u_{-\infty} H_{-\infty} = u_\infty (H_\infty - h_\infty), \quad (6)$$

$$c_1 - P_0 = \frac{1}{2} u_{+\infty}^2 + gH_\infty. \quad (7)$$

Для решения сложной нелинейной задачи (1.2), (3) перейдем к новым независимым переменным x_1, ψ , выбрав в качестве неизвестной функции x_2 . Вместо уравнения (1.2) получим квазилинейное эллиптическое уравнение.

В дальнейшем примем для удобства обозначения $x_1 = x$, $x_2 = z$. Тогда уравнение для z примет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial z}{\partial \psi}} = 0 \quad (8)$$

или

$$Lz = z_\psi^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2z_x z_{\psi x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \psi} + [1 + z_x^2] \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = 0. \quad (9)$$

В переменных x, ψ область интегрирования становится прямоугольной. Краевые условия (3) принимают вид (см. рис. 10)

$$z = -\psi/u_{-\infty}, \quad 0 \leq \psi \leq c_2, \quad x = -c, \quad (10a)$$

$$z = \psi/u_{\infty} + h_{\infty}, \quad 0 \leq \psi \leq c_2, \quad x = +c, \quad (10б)$$

$$z = f(x), \quad -c \leq x \leq c, \quad \psi = 0, \quad (10в)$$

$$z_x^2 + (gz - c_1 + P_0)z_\psi^2 + 1 = 0, \quad -c \leq x \leq c, \quad \psi = c_2. \quad (10г)$$

При $c \rightarrow \infty$ получаем точную постановку задачи.

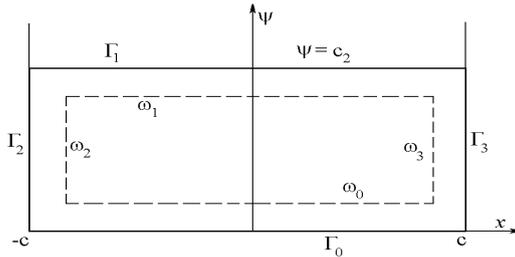


Рис. 10. Область интегрирования в плоскости x, ψ .

На прямых $\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_3$ заданы значения z (условия (10а, б, в)), на прямой Γ_1 задано нелинейное условие (10г). Для решения получившейся нелинейной задачи организуется сложный итерационный процесс. Для этого, как обычно, уравнению (9) ставится в соответствие нестационарное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t} = Lz, \quad (11)$$

которое интегрируется с помощью какой-либо схемы дробных шагов. В соответствующей итерационной схеме коэффициенты в операторе L берутся с предыдущей итерации. Например, итерационная схема расщепления имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{z^{n+1/2} - z^n}{\tau} &= (z_\psi^2)^n \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{h_1^2} z^{n+1/2} - (z_x z_\psi)^n \cdot \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_1} \cdot \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_2} z^n; \\ \frac{z^{n+1} - z^{n+1/2}}{\tau} &= -(z_x z_\psi)^{n+1/2} \cdot \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_1} \cdot \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_2} z^{n+1/2} + \\ &+ [1 + z_x^2]^{n+1/2} \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{h_2^2} z^{n+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично линейризуется краевое условие (10г)

$$(z_x)^k z_x^{n+1} + [(gz - c_1 + P_0)z_\psi]^k \cdot z_\psi^{n+1} + 1 = 0. \quad (13)$$

где k - индекс итерации на границе.

Обозначим через $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ линию сетки, ближайшую к границе $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

Пусть на Γ_1 задано, как n -я итерация, значение z . Тогда для z получаем краевую задачу первого рода, и с заданными краевыми условиями делается один или несколько циклов итераций по схеме (12). После этого условие на Γ_1 пересчитывается с помощью цикла итераций по схеме

$$\frac{z^{k+1} - z^k}{\tau} = (z_x)^k \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_1} z^{k+1} + [(gz - c_1 + P_0)z_\psi]^k \frac{z^{k+1} - z^n(\omega_1)}{h_2} + 1, \quad (14)$$

где $z^n(\omega_1)$ берется на ω_1 с последней итерации при решении задачи Дирихле. Чередую таким образом циклы итераций, получаем сходящийся итерационный процесс. Описанный алгоритм был предложен и реализован в виде программы С.Н. Антонцевым, О.Ф. Васильевым, Б.Г. Кузнецовым и автором [73].

II. 3. ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В двумерном случае течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями

$$\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \Delta u_1, \quad (1a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \mu \Delta u_2, \quad (1б)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (1в)$$

где μ — коэффициент вязкости.

Для несжимаемой жидкости имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0, \quad (2)$$

и уравнение (1в) принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0. \quad (3)$$

Мы в этом пункте ограничимся рассмотрением частного случая несжимаемой жидкости и стационарного течения. Оно будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \nu \Delta u_1; \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \nu \Delta u_2; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Поставим краевые условия, соответствующие симметричному обтеканию (см. рис. 11).

Для построения релаксационного процесса поставим в соответствие уравнениям (4) некоторую нестационарную систему.

Наиболее естественной релаксационной моделью является модель слабо сжимаемой жидкости. В этом случае будем исходить из системы (1). Сохраняя уравнения (1а), (1б), положим

$$p = a^2 \rho^k, \quad (5)$$

(a^2 , k — постоянные), и перепишем уравнение (1в) в виде

$$\varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) + p \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{k}. \quad (6)$$

Считая k достаточно большим, получим уравнение с малым параметром ε .

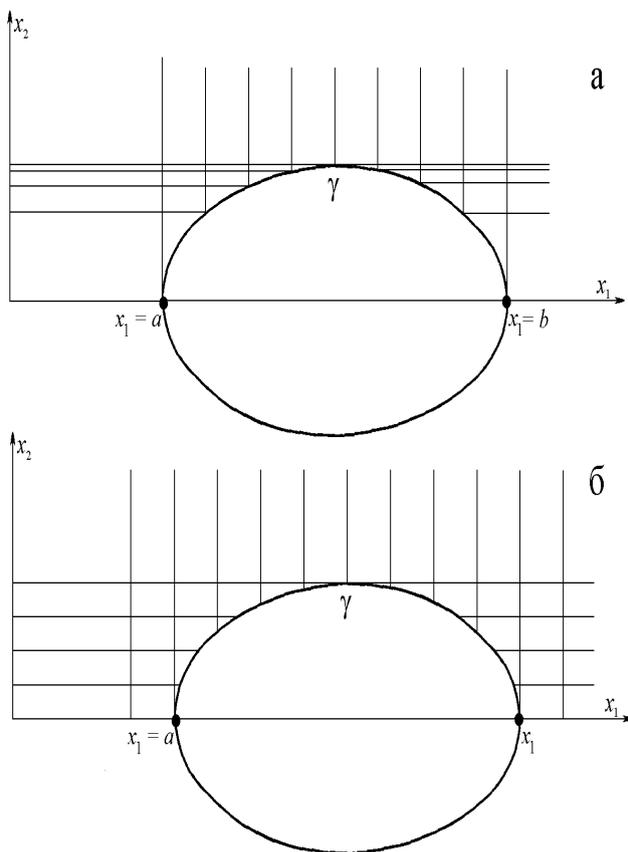


Рис. 11. а — согласованная сетка, б — несогласованная сетка.

В этом случае нестационарная система имеет вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \nu \Delta u_1; \\
 \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \nu \Delta u_2; \\
 \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) + p \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В дальнейшем положим $\rho = 1$.

К уравнению (7) можно применить схему расщепления в координатах x_1, x_2 , аппроксимируя систему

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}; \\ \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon u_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + p \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0\end{aligned}\tag{8}$$

на первом полушаге $t \in [n\tau, (n + 1/2)\tau]$ и систему

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}; \\ \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon u_2 \frac{\partial p}{\partial x_2} + p \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

на втором полушаге $t \in [(n + 1/2)\tau, (n + 1)\tau]$.

Может быть использована другая нестационарная система. Она имеет вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = \nu \Delta u_1,\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \nu \Delta u_2; \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0,\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$q = \frac{1}{2} q_1 + \frac{1}{2} q_2; \quad q_1 = p + \frac{u_1^2}{2}; \quad q_2 = p + \frac{u_2^2}{2}.\tag{12}$$

Ей соответствует расщепленная система

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} &= \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= 0,\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}; \\
\frac{1}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} &= \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}; \\
\frac{1}{2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Выпишем соответствующую схему расщепления

$$\frac{u_1^{n+1/2} - u_1^n}{\tau} + \frac{\Delta_1}{h_1} (\alpha q_1^{n+1/2} + \beta q_1^n) = \nu \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_{-1}}{h_1^2} [\alpha u_1^{n+1/2} + \beta u_1^n];$$

$$\begin{aligned}
\frac{u_2^{n+1/2} - u_2^n}{\tau} + (\alpha u_1^n + \beta u_1^{n+1/2}) \frac{\Delta}{h_1} (\alpha u_2^{n+1/2} + \beta u_2^n) &= \\
&= \nu \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_{-1}}{h_1^2} [\alpha u_2^{n+1/2} + \beta u_2^n]; \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\frac{q_1^{n+1/2} - q_1^n}{\tau} + \frac{\Delta_{-1}}{h_1} [\alpha u_1^{n+1/2} + \beta u_1^n] = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{u_1^{n+1} - u_1^{n+1/2}}{\tau} + (\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+1/2}) \frac{\delta}{h_2} (\alpha u_1^{n+1} + \beta u_1^{n+1/2}) &= \\
&= \nu \frac{\Delta_2 \cdot \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha u_1^{n+1} + \beta u_1^{n+1/2});
\end{aligned}$$

$$\frac{u_2^{n+1} - u_2^{n+1/2}}{\tau} + \frac{\Delta_2}{h_2} (\alpha q_2^{n+1} + \beta q_2^{n+1/2}) = \nu \frac{\Delta_2 \cdot \Delta_{-2}}{h_2^2} (\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+1/2}); \tag{16}$$

$$\frac{q_2^{n+1} - q_2^{n+1/2}}{\tau} + \frac{\Delta_{-2}}{h_2} [\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+1/2}] = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Delta_{-1}; & (\alpha u_1^n + \beta u_1^{n+1/2}) &\geq 0; \\
\Delta &= \Delta_{+1}; & (\alpha u_1^n + \beta u_1^{n+1/2}) &< 0; \\
\delta &= \Delta_{-2}; & (\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+1/2}) &\geq 0; \\
\delta &= \Delta_{+2}; & (\alpha u_2^{n+1} + \beta u_2^{n+1/2}) &< 0;
\end{aligned}$$

$$\alpha \geq 0; \quad \beta \geq 0; \quad \alpha + \beta = 1.$$

Δ , δ могут быть также центральными разностями. Нетрудно установить, что неявные схемы (15), (16) сводятся к трехточечным прогонкам вдоль линий сетки (см. рис. 11). Сетка может быть как согласованной (линии сетки встречаются на контуре — (рис. 11, а), так и несогласованной (рис. 11, б). В последнем случае применяется дополнительно интерполяция.

В практическом счете условия при $x_1 = \pm\infty$ ставятся на линиях $x_1 = \pm c$ при c достаточно большом. Такой алгоритм расчета был разработан Б.Г. Кузнецовым, автором [74] и реализован в виде программы Н.Н. Владимировой.

II. 4. МЕТОД КАНАЛОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

При решении многих задач гидродинамики приходится прибегать к криволинейной сетке. Метод каналовых течений заключается в одновременном преобразовании координат и компонент скоростей таким образом, чтобы каждая компонента характеризовала скорость течения в соответствующем координатном канале (см. рис. 12).

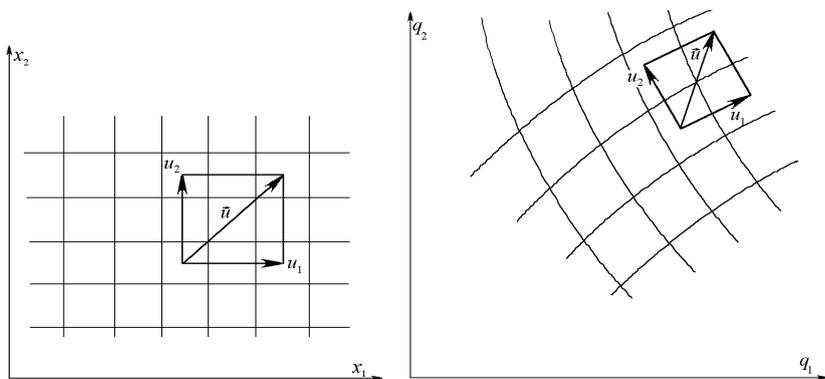


Рис. 12. Преобразование координат и компонент скоростей.

С этой целью следует пользоваться тензорной записью уравнений гидродинамики. Пусть

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{\alpha} u^{\alpha} \frac{\partial u^i}{\partial x^{\alpha}} \right) + \frac{\partial p}{\partial x^i} &= 0; \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha} u^{\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x^{\alpha}} + \rho \sum_{\alpha} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} &= 0; \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha} u^{\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^{\alpha}} = 0, \quad p = p(\rho, S) &
\end{aligned} \tag{1}$$

есть система уравнений газовой динамики в декартовых ортогональных координатах. Будем рассматривать u^i как контравариантные компоненты вектора скорости \vec{u} , а $\partial p / \partial x^i$ — как контравариантный градиент p .

Пусть функции

$$q^i = q^i(x^1, \dots, x^m, t), \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

задают переход от координат x^i к криволинейным координатам q^i в данный момент времени t . Вводя, как обычно, матрицы перехода

$$a_j^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^j}; \quad A_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}; \quad \sum_{\alpha} a_{\alpha}^i A_j^{\alpha} = \delta_j^i, \tag{3}$$

получаем следующий закон перехода:

$$U^i = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^i u^{\alpha}, \tag{4}$$

где U^i — компоненты вектора скорости, соответствующие координатам q^i . Отсюда следует

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^i}{\partial t} &= \sum_{\alpha} \left(a_{\alpha}^i \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial a_{\alpha}^i}{\partial t} u^{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^i \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial a_{\beta}^i}{\partial t} A_{\alpha}^{\beta} U^{\alpha} = \\
&= \sum_{\alpha} a_{\alpha}^i \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\alpha} b_{\alpha}^i U^{\alpha}, \quad b_{\alpha}^i = \sum_{\beta} \frac{\partial a_{\beta}^i}{\partial t} A_{\alpha}^{\beta}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Таким образом, величины

$$\frac{\partial U^i}{\partial t} - \sum_{\alpha} b_{\alpha}^i U^{\alpha} \tag{6}$$

преобразуются как компоненты контравариантного вектора, и после перехода к координатам q^i по формуле (2) и компонентам U^i по формулам (5) уравнения (1) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U^i}{\partial t} + \sum_{\alpha} U^{\alpha} \frac{\partial U^i}{\partial q^{\alpha}} \right) + \sum_{\alpha} g^{i\alpha} \frac{\partial p}{\partial q^{\alpha}} &= \Phi^i; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha} U^{\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial q^{\alpha}} + \rho \sum_{\alpha} \frac{\partial U^{\alpha}}{\partial q^{\alpha}} &= \Psi; \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha} U^{\alpha} \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha}} &= 0, \quad i, \alpha = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi^i &= -\rho \left[\sum_{\alpha} b_{\alpha}^i U^{\alpha} + \sum_{\alpha, \beta} U^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^i U^{\alpha} \right]; \\ \Psi &= -\rho \sum_{\beta, \gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^{\gamma} U^{\beta}; \\ \Gamma_{\alpha, \beta}^i &= \sum_{\gamma} a_{\gamma}^i \frac{\partial A_{\alpha}^{\gamma}}{\partial q^{\beta}}, \quad i, \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (8)$$

В частном случае $m = 2$ рассмотрим расщепленную систему

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial U^1}{\partial t} + \rho U^1 \frac{\partial U^1}{\partial q^1} + g^{11} \frac{\partial p}{\partial q^1} = \frac{1}{2} \Phi^1, \quad (9a)$$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial U^2}{\partial t} + \rho U^1 \frac{\partial U^2}{\partial q^1} + g^{21} \frac{\partial p}{\partial q^1} = \frac{1}{2} \Phi^2, \quad (9б)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U^1 \frac{\partial \rho}{\partial q^1} + \rho \frac{\partial U^1}{\partial q^1} = \frac{1}{2} \Psi, \quad (9в)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} + U^1 \frac{\partial S}{\partial q^1} = 0, \quad (9г)$$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial U^1}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial U^1}{\partial q^2} + g^{12} \frac{\partial p}{\partial q^2} = \frac{1}{2} \Phi^1;$$

$$\frac{1}{2} \rho \frac{\partial U^2}{\partial t} + \rho U^2 \frac{\partial U^2}{\partial q^2} + g^{22} \frac{\partial p}{\partial q^2} = \frac{1}{2} \Phi^2; \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U^2 \frac{\partial \rho}{\partial q^2} + \rho \frac{\partial U^2}{\partial q^2} = \frac{1}{2} \Psi;$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial t} + U^2 \frac{\partial S}{\partial q^2} = 0.$$

Система (9) аппроксимируется некоторой разностной схемой в интервале $t \in [n\tau, (n+1/2)\tau]$ система (10) — в интервале $[(n+1/2)\tau, (n+1)\tau]$.

Каждая из систем (9), (10) имеет структуру одномерной системы. Более точно, в системе (9) уравнения (9а, в, г) аналогичны одномерным уравнениям газовой динамики и могут быть решены с помощью неявной схемы, основанной на векторной прогонке. После этого уравнение (9б) решается методом бегущего счета для U^2 . Аналогичная процедура применяется и к системе (10). Указанная схема расчета удобна в том случае, когда в подвижной системе координат контактная граница является координатной линией*¹. Тогда прогонка по каналу, пересекающему границу, возможна, так как трансверсальные контравариантные компоненты вектора скорости непрерывны при переходе через границу (см. рис. 13). Это обстоятельство вытекает из того факта, что разрыв вектора скорости $U^+ - U^-$ на контактной границе параллелен самой границе.

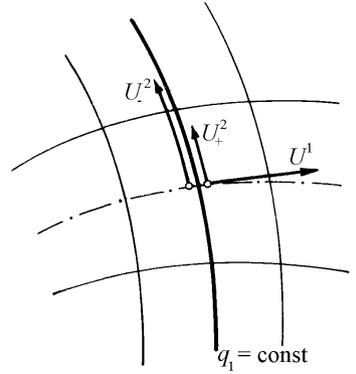


Рис. 13. U^1 непрерывна при переходе через контактную границу, U^2 — разрывна.

II. 5. МЕТОД ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР (МЕТОД ПОПРАВКИ)

Метод предиктор-корректор можно рассматривать как одну из разновидностей метода дробных шагов, хотя первый применялся ранее и независимо в различных задачах.

Выше мы уже убедились в том, что метод предиктор-корректор может употребляться при построении схемы аппроксимирующей поправки (см. § 2). В случае нелинейных уравнений он может также служить для восстановления дивергентности схемы. Если факт использования метода предиктор-корректор для обыкновенных дифференциальных уравнений известен уже давно, то применение п.-к. к нелинейным уравнениям с частными производными было предложено недавно в работах Дугласа [75], С.К. Годунова, К.А. Семендяева [76], С.К. Годунова [34], И.К. Яушева и автора [35]. Общая идея п.-к. в применении к уравнениям газовой

* Такого рода подвижные сетки, включающие контактные границы в качестве координатных линий, применялись С.К. Годуновым.

динамики может быть представлена в следующем виде. Пусть

$$\oint u dx - v(u) dt = \iint f dx dt \quad (1)$$

есть система законов сохранения, записанная в векторной форме

$$u = \{u_1, \dots, u_m\}, \quad v = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad f = \{f_1, \dots, f_m\}.$$

Системе (I) соответствует дивергентная гиперболическая квазилинейная

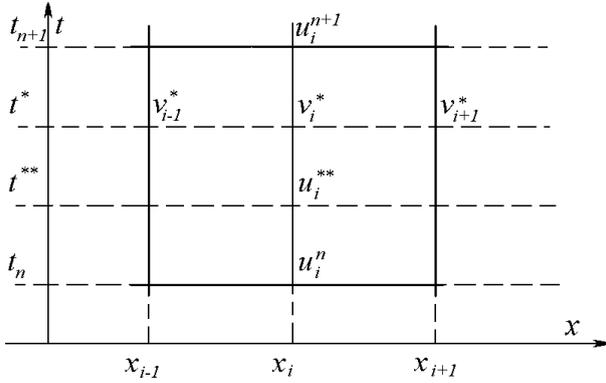


Рис. 14. Размещение величин u_i^n , v_i^* , u_i^{**} .

система

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v(u)}{\partial x} = f(u). \quad (2)$$

Выбирая прямоугольную расчетную сетку, аппроксимируем соотношения (2) разностной схемой (см. рис. 14)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{v_{i+1}^* - v_{i-1}^*}{2h} = f(u_i^{**}). \quad (3)$$

Здесь положено

$$u_i^n = u(x_i, t_n), \quad v_i^* = v(x_i, t^*), \quad u_i^{**} = u(x_i, t^{**}). \quad (4)$$

Величины v_i^* , u_i^{**} могут вычисляться по любой схеме. Рассмотрим сначала однородную схему, которая возникает, если, например, положить

$$v_i^* = \alpha v_i^{n+1} + \beta v_i^n = \alpha v(u_i^{n+1}) + \beta v(u_i^n), \quad (5)$$

$$u_i^{**} = u_i^* = \alpha u_i^{n+1} + \beta u_i^n, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Схема (3) примет вид

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \alpha \frac{[v(u_{i+1}^{n+1}) - v(u_{i-1}^{n+1})]}{2h} + \beta \frac{[v(u_{i+1}^n) - v(u_{i-1}^n)]}{2h} = f(u_i^*) = f(\alpha u_i^{n+1} + \beta u_i^n). \quad (6)$$

Для реализации схемы (6) требуется линеаризовать формулы (6), положив

$$v(u^{n+1}) = v(u^n) + \left\| \frac{\partial v^n}{\partial u} \right\| (u^{n+1} - u^n); \quad (7)$$

$$f(u^*) = f(u^n) + \left\| \frac{\partial f^n}{\partial u} \right\| (u^* - u^n).$$

После этого формулы (6) решаются векторной прогонкой. Заметим, что после подстановки (7) в (6) схема становится не дивергентной. Для сохранения дивергентности следует решать схему (6) точно и рассматривать соотношения (7) как итерационные

$$v(u)^{k+1} = v(u)^k + \left\| \frac{\partial v}{\partial u} \right\|^k (u^{k+1} - u^k); \quad (8)$$

$$f(u)^{k+1} = f(u)^k + \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\|^k (u^{k+1} - u^k),$$

где k – индекс итерации и положено $u^0 = u^n$. Таким образом, в одно-родной схеме возникает необходимость сочетать векторную прогонку с итерациями по нелинейности. Метод предиктор-корректор избавляет от итераций. Для вычисления v^* может быть использована произвольная неявная абсолютно устойчивая схема, не обязательно дивергентная и не требующая итераций по нелинейности.

Перепишем систему (2) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = f; \quad A = \left\| \frac{\partial v}{\partial u} \right\|. \quad (9)$$

Тогда возможной схемой для определения u^* , v^* может быть схема

$$\frac{u^* - u^n}{\tau} + A(u^n) \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h} u^* = f(u^n) + B(u^n)(u^* - u^n),$$

$$B = \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\|, \quad (10)$$

реализуемая с помощью векторных прогонок и не требующая итераций (см. [34]).

Определив из (10) u^* , определяем $v^* = v(u^*)$. Применяя схему (3), получаем дивергентную схему. Она будет абсолютно устойчивой при $t^* \geq \frac{t_n + t_{n+1}}{2}$ и имеет второй порядок точности при $t^* = \frac{t_n + t_{n+1}}{2}$. Вместо (10) может быть применена и другая неявная схема, например мажорантная характеристическая схема (см. [35]).

II. 6. УРАВНЕНИЯ МЕТЕОРОЛОГИИ

В работах Г.И. Марчука [77, 78, 97] была разработана и обоснована неявная схема расщепления для интегрирования уравнений метеорологии

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} + u^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} - l u^2 = -\frac{\partial H}{\partial x^1}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} + u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - l u^1 = -\frac{\partial H}{\partial x^2}, \quad (1б)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u^1 \frac{\partial T}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial T}{\partial x^2} - k_1 T \frac{u^3}{p} = q, \quad (1в)$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial p} = 0, \quad (1г)$$

$$T = -k_2 p \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (1д)$$

где u^1, u^2, u^3 — компоненты скорости по осям x^1, x^2, p ; T — температура; H — высота изобарической поверхности $p = \text{const}$; q — приток тепла на единицу массы; l — параметр Кориолиса; k_1, k_2 — константы. Система (1) является *нерегулярной*, т.е. не принадлежит к системам типа Коши — Ковалевской.

Введем в рассмотрение вектор – функции

$$u = \{u^1, u^2, T\}; \quad f = \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x^1}, -\frac{\partial H}{\partial x^2}, k_1 \frac{Tu^3}{p} + q \right\} \quad (2)$$

и матрицу

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -l & 0 \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (3)$$

запишем уравнения (1а), (1б), (1в) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^1 \frac{\partial u}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} + Au = f. \quad (4)$$

При заданной функции f подсистема (4) есть замкнутая регулярная система гиперболического типа. Она решается методом расщепления

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 u^{n+1/3} = 0, \quad (5а)$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} + \Lambda_2 u^{n+2/3} = 0, \quad (5б)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} + Au^{n+1} = f^{n+1}, \quad (5в)$$

где операторы Λ_1, Λ_2 аппроксимируют операторы $u^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, u^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$ соответственно. Для замыкания системы (5) требуется определить f^{n+1} . С этой целью к уравнениям (5в) присоединяем разностную аппроксимацию уравнений (1г, 1д)

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_k + \Delta_{-k}}{2h_k} (u^k)^{n+1} = 0,$$

$$T^{n+1} = -k_2 p \frac{\Delta_3 + \Delta_{-3}}{2h_3} H^{n+1}, \quad h_1 = \Delta x_1, \quad h_2 = \Delta x_2, \quad h_3 = \Delta p. \quad (6)$$

Уравнения (5в) вместе с (6) составляют (с учетом краевых условий) замкнутую систему относительно u^{n+1}, H^{n+1} . Исключая u^{n+1} из (5в), (6), можно получить уравнение для H^{n+1} , которое решается итерациями.

— \triangle —

§ 9. ОБЩИЕ ФОРМУЛИРОВКИ

В предыдущих параграфах был рассмотрен ряд задач математической физики и разностные схемы их решения, основанные на методе дробных шагов. В настоящем параграфе мы сделаем попытку изложить наиболее общие точки зрения и методы построения схем с дробными шагами, а также дать обоснование метода дробных шагов для широкого класса схем.

П. 1. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ. ОБОСНОВАНИЕ В КОММУТАТИВНОМ СЛУЧАЕ МЕТОДОМ ИСКЛЮЧЕНИЯ

Для систем дифференциальных уравнений в частных производных метод расщепления (метод дробных шагов) был сформулирован в общем виде в работе автора [79] как метод построения экономичных неявных схем. В работе [79] рассматривались только двухслойные схемы в дробных шагах. В докладе Г.И. Марчука и автора [51] на Всесоюзной конференции по вычислительной математике (Москва, 1965 г.) и конгрессе ИФИП (Нью-Йорк, 1965 г.) этот метод сформулирован для систем интегродифференциальных уравнений и многослойных схем в дробных шагах. Рассмотрим линейную систему интегродифференциальных уравнений относительно неизвестной векторной функции

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Omega u + f, \quad (1)$$

для которой поставлена корректно в некотором банаховом пространстве задача Коши

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

Пусть

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots + \Omega_p \quad (3)$$

есть представление интегродифференциального оператора Ω в виде суммы p операторов $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$ операторы $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$ аппроксимируются операторами Λ_{ij} так, что имеют место аппроксимационные соотношения ^{*1}

$$\begin{aligned} \Lambda_{10} + \Lambda_{11} &\prec \Omega_1; \\ \Lambda_{20} + \Lambda_{21} + \Lambda_{22} &\prec \Omega_2; \\ \dots &\dots \\ \Lambda_{p0} + \Lambda_{p1} + \dots + \Lambda_{pp} &\prec \Omega_p. \end{aligned} \quad (4)$$

Схема расщепления имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/p} - u^n}{\tau} &= \Lambda_{10}u^n + \Lambda_{11}u^{n+1/p} + F_1; \\ \frac{u^{n+2/p} - u^{n+1/p}}{\tau} &= \Lambda_{20}u^n + \Lambda_{21}u^{n+1/p} + \Lambda_{22}u^{n+2/p} + F_2; \\ \dots &\dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_{p0}u^n + \Lambda_{p1}u^{n+1/p} + \dots + \Lambda_{pp}u^{n+1} + F_p, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$F_s = \Lambda_s f; \quad \sum_{s=1}^p \Lambda_s \prec E. \quad (6)$$

Если

$$\Lambda_{sr} = 0, \quad r < s - 1, \quad (7)$$

то каждая из схем (5) является двухслойной. Нетрудно сформулировать условия сходимости разностной схемы (5) к уравнению (1), если все рассматриваемые разностные операторы Λ_{ij}, Λ_i являются коммутативными.

Рассмотрим для простоты случай однородных двухслойных схем

$$(f = 0, \quad F_s = 0, \quad \Lambda_{sr} = 0, \quad r < s - 1)$$

$$\frac{u^{n+\frac{k}{p}} - u^{n+\frac{k-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_{kk-1}u^{n+\frac{k-1}{p}} + \Lambda_{kk}u^{n+k/p}, \quad (k = 1, \dots, p). \quad (8)$$

^{1*} Заметим, что операторы Λ_{ij} могут быть произвольной структуры, в том числе разностные и интегродифференциальные.

Построим соответствующую схему в целых шагах. Уравнения (8) могут быть переписаны в виде

$$A_k u^{n+k/p} = B_k u^{n+\frac{k-1}{p}}, \quad (9)$$

где

$$A_k = E - \tau \Lambda_{kk}; \quad B_k = E + \tau \Lambda_{kk-1} \quad (k = 1, \dots, p).$$

После этого, применяя метод исключения, предложенный в работе Дугласа [12], и пользуясь коммутативностью операторов A_k , B_k , получаем схему в целых шагах

$$A u^{n+1} = B u^n; \quad A = A_1 \dots A_p, \quad B = B_1 \dots B_p. \quad (10)$$

Разлагая операторы A , B по степеням τ , получаем

$$\begin{aligned} A &= E - \tau(\Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \dots + \Lambda_{pp}) + \tau^2(\Lambda_{11}\Lambda_{22} + \dots \\ &\dots + \Lambda_{p-1p-1}\Lambda_{pp}) + \dots + (-1)^p \tau^p \Lambda_{11}\Lambda_{22} \dots \Lambda_{p-1p-1}\Lambda_{pp}; \\ B &= E + \tau(\Lambda_{10} + \Lambda_{21} + \dots + \Lambda_{pp-1}) + \tau^2(\Lambda_{10}\Lambda_{21} + \dots \\ &\dots + \Lambda_{p-1p-2}\Lambda_{pp-1}) + \dots + \tau^p \Lambda_{10}\Lambda_{21} \dots \Lambda_{pp-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (11), схему (10) можно преобразовать к виду

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \sum_{k=1}^n (\Lambda_{kk-1} u^n + \Lambda_{kk} u^{n+1}) + \tau \Phi, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i < j} (\Lambda_{ii-1} \Lambda_{jj-1} u^n - \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} u^{n+1}) + \tau \sum_{i < j < k} (\Lambda_{ii-1} \Lambda_{jj-1} \Lambda_{kk-1} u^n + \\ &+ \Lambda_{ii} \Lambda_{jj} \Lambda_{kk} u^{n+1}) + \dots + \tau^{p-2} [\Lambda_{10} \Lambda_{21} \dots \Lambda_{pp-1} u^n + \\ &+ (-1)^{p-1} \Lambda_{11} \Lambda_{22} \dots \Lambda_{pp} u^{n+1}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Равенство (12) доказывает аппроксимацию двухслойной схемы (9), так как в силу (4) и (7) имеем

$$\sum_{k=1}^p (\Lambda_{kk-1} + \Lambda_{kk}) \prec \sum_{k=1}^p \Omega_k = \Omega. \quad (14)$$

Найдем теперь условие корректности схемы (9) или, что то же, схемы (10). Уравнения (9) могут быть записаны в виде

$$u^{n+\frac{k}{p}} = C_k u^{n+\frac{k-1}{p}}, \quad C_k = A_k^{-1} B_k, \quad k = 1, \dots, p. \quad (15)$$

Схема в целых шагах принимает вид

$$u^{n+1} = C u^n, \quad C = C_p C_{p-1} \dots C_1 = A^{-1} B. \quad (16)$$

Схема (9) равномерно корректна, если

$$\|C\| = \|C_p C_{p-1} \dots C_1\| \leq 1 + \text{const } \tau. \quad (17)$$

Таким образом, не обязательна устойчивость каждой схемы (9) в дробных шагах.

По известной теореме (см. § 1) сходимость имеет место, если

$$\|A^{-1}\| \leq M, \quad \|C\| \leq 1 + N\tau, \quad (18)$$

где константы M , N не зависят от n , τ .

II. 2. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ В НЕКОММУТАТИВНОМ СЛУЧАЕ

В общем случае некоммутативных операторов критерии сходимости аналогичны, но доказательство протекает более сложно. Покажем, как видоизменяется метод исключения в случае некоммутативных операторов. Продемонстрируем это на примере двухслойной схемы (1.9) с двумя дробными шагами ($p = 2$).

Так как операторы A_k , B_k некоммутативны, то обычный метод исключения неприменим. Умножим операторно первое уравнение в (1.9) на \bar{B}_2 , второе уравнение — на \bar{A}_1 , где операторы \bar{A}_1 , \bar{B}_2 пока еще не определены. После сложения получаем

$$\bar{A}_1 A_2 u^{n+1} - \bar{B}_2 B_1 u^n = (\bar{A}_1 B_2 - \bar{B}_2 A_1) u^{n+1/2}. \quad (1)$$

Положим

$$\bar{A}_1 = A_1 + \tau^s a_1; \quad \bar{B}_2 = B_2 + \tau^s b_2 \quad (2)$$

с неопределенными операторами a_1 , b_2 и показателем s . Отсюда находим

$$\bar{A}_1 B_2 - \bar{B}_2 A_1 = \tau^2 (\Lambda_{21} \Lambda_{11} - \Lambda_{11} \Lambda_{21}) + \tau^s (a_1 B_2 - b_2 A_1). \quad (3)$$

Полагая

$$\bar{A}_1 B_2 - \bar{B}_2 A_1 = 0, \quad (4)$$

получаем

$$s = 2, \quad (5)$$

$$b_2 A_1 - a_1 B_2 = \Lambda_{21} \Lambda_{11} - \Lambda_{11} \Lambda_{21}. \quad (6)$$

Если операторы a_1, b_2 удовлетворяют условию (6), то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})u^{n+1} + (\Lambda_{10} + \Lambda_{21})u^n + \tau\Phi, \quad (7)$$

$$\Phi = -\Lambda_{11}\Lambda_{22}u^{n+1} + \Lambda_{21}\Lambda_{10}u^n + b_2 B_1 u^n - a_1 A_2 u^{n+1}. \quad (8)$$

Положим, для определенности, $a_1 = 0$. Тогда из (6) имеем

$$b_2 = (\Lambda_{21}\Lambda_{11} - \Lambda_{11}\Lambda_{21}) \cdot A_1^{-1}. \quad (9)$$

После этого Φ принимает вид

$$\Phi = -\Lambda_{11}\Lambda_{22}u^{n+1} + \Lambda_{21}\Lambda_{10}u^n + (\Lambda_{21}\Lambda_{11} - \Lambda_{11}\Lambda_{21})A_1^{-1}B_1u^n. \quad (10)$$

Учитывая условия (1.14), видим, что схема (7) аппроксимирует уравнение (1.1), если величина

$$(\Lambda_{21}\Lambda_{11} - \Lambda_{11}\Lambda_{21}) \cdot A_1^{-1} \cdot B_1 f \quad (11)$$

конечна для любой достаточно гладкой функции f .

Покажем, что при некоторых допущениях относительно оператора A функция $A^{-1}F$ будет обладать той же гладкостью, что и F , т. е. из ограниченности F и ее разностных отношений до порядка q следует ограниченность $A^{-1}F$ и ее разностных отношений до порядка q при любых сколь угодно малых h .

Пусть A - разностный (не обязательно финитный) оператор общего вида

$$A : Af = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} T_1^{\alpha_1} \dots T_m^{\alpha_m} f, \quad (12)$$

где суммирование по $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ производится от $\alpha_s = -N_s$ до $\alpha_s = N_s$, $s = 1, \dots, m$. Пусть $\Delta_s = T_s - E$ есть оператор первой правой разности. Введем в рассмотрение операторы $\delta_i A, \delta_{ij} A, \dots, \delta_{i_1 \dots i_q} A$

Отсюда

$$\begin{aligned}\delta_i A^{-1} &= -(A + h_i A_i)^{-1} \delta_i A \cdot A^{-1} = \\ &= -h_i (A + h_i A_i)^{-1} A_i A^{-1} = -h_i B_i,\end{aligned}\quad (20)$$

и B_i удовлетворяет оценке (18).

Аналогично доказываются оценки (18) для $B_{i_1 i_2}, \dots, B_{i_1 i_2 \dots i_q}$.

Лемма 2. Если

а) оператор A удовлетворяет условиям (15), (16) леммы 1;

б) $\|f\| \leq M_3$; $\|\Delta_i f\| \leq h_i M_3, \dots$; $\|\Delta_{i_1} \Delta_{i_2} \dots \Delta_{i_q} f\| \leq h_{i_1} \dots h_{i_q} M_3$,

где константа M_3 не зависит от h_i , то справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|A^{-1} f\| &\leq M_4; \quad \|\Delta_i(A^{-1} f)\| \leq h_i M_4, \dots; \\ \|\Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_q}(A^{-1} f)\| &\leq h_{i_1} \dots h_{i_q} M_4,\end{aligned}\quad (21)$$

где константа M_4 не зависит от h_i .

Доказательство. Оценка $\|A^{-1} f\| \leq M_4$ очевидна.

Оценим величину $\Delta_i(A^{-1} f)$. Пользуясь равенством (14) и применяя его для оператора A^{-1} , имеем

$$\Delta_i(A^{-1} f) = (A^{-1} + \delta_i A^{-1}) \Delta f + \delta_i A^{-1} f \quad (22)$$

или в обозначениях (17)

$$\frac{\Delta_i}{h_i}(A^{-1} f) = (A^{-1} + h_i B_i) \frac{\Delta_i}{h_i} f + B_i f. \quad (23)$$

Применяя оценки (16), (18) леммы 1, находим

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\Delta_i}{h_i}(A^{-1} f) \right\| &\leq [\|A^{-1}\| + h_i \|B_i\|] \cdot \left\| \frac{\Delta_i}{h_i} f \right\| + \|B_i\| \cdot \|f\| \leq \\ &\leq (M_1 + h_i M_2) \left\| \frac{\Delta_i}{h_i} f \right\| + M_2 \|f\|.\end{aligned}\quad (24)$$

Лемма 2 для $\Delta_i(A^{-1} f)$ доказана.

Аналогично протекает доказательство для величин $\Delta_{i_1} \dots \Delta_{i_q}(A^{-1} f)$. Применяя леммы 1, 2 к оценке выражения (11), видим, что при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (1) и его решения $u(x, t)$ аппроксимация имеет место.

Указанная идея доказательства аппроксимации была высказана автором в докладе на IV Всесоюзном математическом съезде (см. [28]),

а затем более детально разработана в статьях автора [80], Ю.Е. Бояринцева [81]. Многочисленные работы были посвящены обоснованию с помощью априорных оценок метода дробных шагов для широких классов уравнений с переменными коэффициентами. Отметим в первую очередь работы Лиза [82, 83], Е.Г. Дьяконова [21-24, 39], А.А. Самарского [84, 85, 41, 63].

II. 3. МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРА

В работе Бэйкера и Олифаша [16] сформулирован метод точной факторизации верхнего оператора, который в случае уравнения теплопроводности приводил к схеме, аналогичной схеме расщепления. Однако метод точной факторизации оказался непригодным для уравнений с переменными коэффициентами. В работе автора [18] была сформулирована идея приближенной факторизации оператора, которая становится применимой уже для уравнений с переменными коэффициентами. В работах Е.Г. Дьяконова [21-24, 39] разработан и обоснован метод приближенной факторизации (метод расщепляющегося оператора, в терминологии Е.Г. Дьяконова) для широкого класса уравнений параболического и гиперболического типа.

Мы даем общую формулировку метода приближенной факторизации в соответствии с работой Г.И. Марчука и автора [51]. Пусть

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_0 u^n + F_n \quad (1)$$

есть однородная разностная аппроксимация уравнения (1.1). Функция F_n аппроксимирует f и, в случае многослойных схем, содержит также результат применения разностных операторов к u^{n-1} , u^{n-2} и т. д. Ограничиваясь пока случаем двухслойной аппроксимации, изложим метод приближенной факторизации (см. [51]). Пусть

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \Lambda_{11} + \Lambda_{12} + \dots + \Lambda_{1p}; \\ \Lambda_0 &= \Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \dots + \Lambda_{0q} \end{aligned} \quad (2)$$

суть представления верхнего и нижнего операторов Λ_1 , Λ_0 в виде суммы операторов, вообще говоря, более простой структуры. Справедливы

аппроксимационные соотношения

$$\begin{aligned} (E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12}) \dots (E - \tau\Lambda_{1p}) &\prec E - \tau\Lambda_1; \\ (E + \tau\Lambda_{01})(E + \tau\Lambda_{02}) \dots (E + \tau\Lambda_{0q}) &\prec E + \tau\Lambda_0. \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с (3) схема (1) заменяется факторизованной схемой

$$\begin{aligned} (E - \tau\Lambda_{11})(E - \tau\Lambda_{12}) \dots (E - \tau\Lambda_{1p})u^{n+1} &= \\ = (E + \tau\Lambda_{01})(E + \tau\Lambda_{02}) \dots (E + \tau\Lambda_{0q})u^n + \tau F_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно установить, что схема (4) аппроксимирует уравнение (1.1). Действительно, разлагая (4) по τ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= (\Lambda_{11} + \Lambda_{12} + \dots + \Lambda_{1p})u^{n+1} + \\ &+ (\Lambda_{01} + \Lambda_{02} + \dots + \Lambda_{0q})u^n + F_n + \tau\Phi, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \left[\sum_{i < j} \Lambda_{0i}\Lambda_{0j} + \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_{0i}\Lambda_{0j}\Lambda_{0k} + \dots + \tau^{q-2}\Lambda_{01}\Lambda_{02} \dots \Lambda_{0q} \right] u^n + \\ &+ \left[- \sum_{i < j} \Lambda_{1i}\Lambda_{1j} + \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_{1i}\Lambda_{1j}\Lambda_{1k} + \dots + (-1)^{p-1}\tau^{p-2}\Lambda_{11} \dots \Lambda_{1p} \right] u^{n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5), (6) следует аппроксимация.

Таким образом, в отличие от метода расщепления, в методе приближенной факторизации аппроксимация устанавливается непосредственно. Заметим, что однородная схема (1) и представление (2) не определяют однозначно соответствующую схему. Например, схема

$$\begin{aligned} (E - \tau\Lambda_{1p})(E - \tau\Lambda_{1p-1}) \dots (E - \tau\Lambda_{11})u^{n+1} &= \\ = (E + \tau\Lambda_{0q})(E + \tau\Lambda_{0q-1}) \dots (E + \tau\Lambda_{01})u^n + \tau F_n \end{aligned} \quad (4a)$$

в общем случае некоммутативных операторов Λ_{1s} , Λ_{0s} не эквивалентна схеме (4) и становится ей эквивалентной только в случае коммутативных операторов.

Обратимся теперь к анализу устойчивости, который, напротив, большей частью более затруднителен по сравнению с методом расщепления.

эквивалентна следующей схеме в дробных шагах:

$$(E - \tau\Lambda_{11})u^{n+1/p} = (E + \tau\Lambda_{01})(E + \tau\Lambda_{02}) \dots (E + \tau\Lambda_{0q})u^n + \tau F_n;$$

$$(E - \tau\Lambda_{12})u^{n+2/p} = u^{n+1/p}, \dots, (E - \tau\Lambda_{1p})u^{n+1} = u^{n+\frac{p-1}{p}}. \quad (13)$$

Последняя же эквивалентна схеме расщепления

$$\frac{u^{n+1/p} - u^n}{\tau} = \Lambda_{11}u^{n+1/p} + \Omega u^n + F_n,$$

$$\frac{u^{n+2/p} - u^{n+1/p}}{\tau} = \Lambda_{12}u^{n+2/p},$$

.....

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_{1p}u^{n+1}, \quad (14)$$

$$\Omega = \frac{1}{\tau}[(E + \tau\Lambda_{01})(E + \tau\Lambda_{02}) \dots (E + \tau\Lambda_{0q}) - E].$$

Таким образом, реализация (14) связана с последовательным обращением операторов $(E - \tau\Lambda_{11})$, $(E - \tau\Lambda_{12})$, ..., $(E - \tau\Lambda_{1p})$ более простой структуры, нежели оператор $(E - \tau\Lambda_1$, что сильно упрощает алгоритм. Ясно, что реализация факторизованной схемы в виде схемы с дробными шагами (схем расщепления) не является однозначной. Вообще факторизованную схему (4) можно рассматривать как некоторую каноническую схему, эквивалентную различным двухслойным схемам дробных шагов.

Перейдем теперь к рассмотрению схем приближенной факторизации, возникающих из многослойных схем

$$A_1u^{n+1} + A_0u^n + A_{-1}u^{n+1} + \dots + A_{-p+1}u^{n-p+1} + f_n = 0. \quad (15)$$

Такие схемы могут возникать в результате однородной аппроксимации как системы (1.1), так и систем более сложного вида

$$B_1 \frac{\partial u}{\partial t} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots + B_p \frac{\partial^p u}{\partial t^p} = \Omega u + f, \quad (16)$$

где B_1, B_2, \dots, B_p — линейные операторы.

Пусть операторы A_s представимы в виде

$$A_s = E + \tau^{\alpha_s} \Lambda_s, \quad s = 1, 0, -1, \dots - p + 1, \quad (17)$$

где Λ_s — пространственные операторы, и

$$\Lambda_s = \Lambda_{s1} + \dots + \Lambda_{sq_s}, \quad s = 1, \dots, -p + 1, \quad (18)$$

есть представления операторов Λ_s в виде суммы операторов более простой (вообще говоря) структуры. Тогда приближенно факторизованная схема, соответствующая схеме (15) и представлению (18), имеет вид

$$\bar{A}_1 u^{n+1} + \bar{A}_0 u^n + \bar{A}_{-1} u^{n-1} + \dots + \bar{A}_{-p+1} u^{n-p+1} + f_n = 0, \quad (19)$$

где

$$\bar{A}_s = (E + \tau^{\alpha_s} \Lambda_{s1}) \dots (E + \tau^{\alpha_s} \Lambda_{sq_s}) = A_s + \tau^{2\alpha_s} \Phi_s; \quad (20)$$

$$\Phi_s = \sum_{i < j} \Lambda_{si} \Lambda_{sj} + \dots + (\tau^{\alpha_s})^{q_s-2} \Lambda_{s1} \dots \Lambda_{sq_s}. \quad (21)$$

Аппроксимация (19) исследуется, как обычно, с помощью разложения (19) в ряд по τ . Исследование устойчивости схемы и здесь представляет собой основную трудность.

Заметим, в заключение, что основным моментом при построении указанных схем является приближенная факторизация верхнего оператора, так как она позволяет упростить их реализацию. Факторизация нижних операторов носит сопутствующий характер, обеспечивая устойчивость и точность схемы. Поэтому операторы на нижних шагах можно искать в более общем виде

$$A_s = A_s + \tau^{\rho_s} \Phi_s = E + \tau^{\alpha_s} \Lambda_s + \tau^{\rho_s} \Phi_s, \quad (22)$$

где операторы Φ_s имеют произвольную структуру. Здесь методы дробных шагов приобретают характер метода *неопределенных операторов (коэффициентов)*. Теория схем общей структуры еще слабо разработана.

П. 4. МЕТОД СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ ПОПРАВКИ

Метод стабилизирующей поправки, введенный Дугласом и Рэкфордом [12] и сформулированный в общем виде в работе Дугласа и Гана [86], является весьма общим и эффективным методом построения схем с дробными шагами.

Пусть

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + F_n, \quad (1)$$

где

$$F_n = A_0 u^n + A_{-1} u^{n-1} + \dots + A_{-q+1} u^{n-q+1} + f_n \quad (2)$$

есть исходная однородная схема. Положим

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_p. \quad (3)$$

Схеме (1), (2) и представлению (3) поставим в соответствие следующую схему в дробных шагах

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/p} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1(u^{n+1/p} - u^n) + \Lambda u^n + F_n; \\ \frac{u^{n+2/p} - u^{n+1/p}}{\tau} &= \Lambda_2(u^{n+2/p} - u^{n+1/p}); \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{p-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_p(u^{n+1} - u^n). \end{aligned} \quad (4)$$

Последовательно исключая $u^{n+1/p}$, $u^{n+2/p}$, \dots , $u^{n+\frac{p-1}{p}}$, получаем эквивалентную факторизованную схему в целых шагах

$$\begin{aligned} (E - \tau\Lambda_1) \dots (E - \tau\Lambda_p) u^{n+1} &= \tau\Lambda u^n + \tau F_n + (E - \tau\Lambda_1) u^n - \\ &- \tau(E - \tau\Lambda_1)\Lambda_2 u^n - \dots - \tau(E - \tau\Lambda_1) \dots (E - \tau\Lambda_{p-1})\Lambda_p u^n. \end{aligned} \quad (5)$$

После алгебраического преобразования находим

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} + F_n - \tau^2 \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right), \quad (6)$$

$$\Phi = \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j - \tau \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + (-1)^p \tau^{p-2} \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_p. \quad (7)$$

Из представлений (6), (7) следует, что с точностью до $O(\tau^2)$ схема стабилизирующей поправки сохраняет аппроксимацию исходной схемы (1), (2).

Перейдем к анализу устойчивости схемы с. п. Предположим для простоты, что u — скалярная функция и операторы Λ_s , A_s коммутативны. Тогда, применяя спектральный анализ устойчивости к схеме (1), находим

$$\frac{\rho_1 - 1}{\tau} = \lambda \rho_1 + g(\rho_1). \quad (8)$$

где ρ_1 — коэффициент умножения схемы (1); λ — собственное число оператора Λ ;

$$g(\rho_1) = a_0 + a_{-1} \frac{1}{\rho_1} + \dots + a_{-q+1} \frac{1}{\rho_1^{q-1}}$$

— умножение ошибки, соответствующее оператору

$$A_0 u^n + A_{-1} u^{n-1} + \dots + A_{-q+1} u^{n-q+1},$$

$a_0, a_{-1}, \dots, a_{-q+1}$ — собственные числа операторов

$$A_0, A_{-1}, \dots, A_{-q+1}.$$

Аналогично для схемы (6) получаем

$$\frac{\rho - 1}{\tau} = \lambda \rho + g(\rho) - \tau^2 \varphi\left(\frac{\rho - 1}{\tau}\right), \quad (9)$$

где $\varphi\left(\frac{\rho - 1}{\tau}\right)$ — умножение ошибки, соответствующее оператору Φ . Для $\varphi\left(\frac{\rho - 1}{\tau}\right)$ очевидно выражение

$$\varphi\left(\frac{\rho - 1}{\tau}\right) = \frac{a}{\tau}(\rho - 1), \quad (10)$$

где

$$a = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j - \tau \sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \dots + (-1)^p \tau^{p-2} \lambda_1 \dots \lambda_p; \quad (11)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — собственные числа операторов $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$. Таким образом, для коэффициентов умножения ρ_1, ρ получаем соотношения

$$\rho_1 = \frac{1 + \tau \cdot g(\rho_1)}{1 - \lambda \tau}; \quad \rho = \frac{1 + \tau \cdot g(\rho) + a \tau^2}{1 - \lambda \tau + a \tau^2}. \quad (12)$$

В случае двухслойных схем $g(x)$ не зависит от x , и справедливо следующее утверждение.

Если λ_i отрицательны (отсюда следует положительность a), то из устойчивости схемы (1) следует устойчивость схемы (6). За более детальным анализом отсылаем читателя к работе [86].

Разлагая по степеням τ , находим

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) + (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1) \dots (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_p) F^n, \quad (8)$$

$$\Phi = \sum_{i < j} \Lambda_i \Lambda_j - \frac{\tau}{2} \sum_{i < j < k} \Lambda_i \Lambda_j \Lambda_k + \dots + (-1)^{p-2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^{p-2} \Lambda_1 \dots \Lambda_p. \quad (9)$$

Если положить

$$F_n = (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_p)^{-1} \dots (E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1)^{-1} f^n, \quad (10)$$

то придем окончательно к схеме

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} - \frac{\tau^2}{4} \Phi \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right) + f_n, \quad (11)$$

которая сохраняет второй порядок по t аппроксимации схемы (1).

В случае, когда собственные значения операторов Λ_s отрицательны, доказывается аналогично прежнему (см. п. 4), что из устойчивости (1) следует устойчивость (3), (4).

П. 6. МЕТОД СТАЦИОНИРОВАНИЯ

Большинство рассмотренных нами итерационных схем решения стационарной краевой задачи для стационарного уравнения

$$Lu - f = 0 \quad (1)$$

(L — эллиптический оператор) являются схемами интегрирования соответствующего нестационарного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - f. \quad (2)$$

Как видим, итерационный процесс воспроизводит процесс установления нестационарного разностного решения, которое является приближенным

решением уравнения (2). Однако такое соответствие между итерационным процессом и процессом установления для уравнения (2) является необязательным. Уравнению (1) можно поставить в соответствие уравнение более общей структуры

$$P\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = Lu - f, \quad (3)$$

где оператор $P\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ имеет вид матрицы, действующей на составной вектор $\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^q u}{\partial t^q}\right)$. Оператор $P\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ — будем называть его релаксационным — в остальном может иметь весьма общую структуру, лишь бы уравнение (3) обеспечивало выход на стационарный режим произвольного решения (3). Такого рода схемы рассматривались в монографии В.К. Саульева [27], в работе Н.Н. Владимировой, Б.Г. Кузнецова и автора [74], в п.7 §4, в §5, в п.3 §8 настоящей монографии. Как было замечено в п.1 §8, релаксационный оператор $P\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ может зависеть также от точки x_1, \dots, x_m , что увеличивает скорость сходимости. Релаксационный оператор непосредственно вводится и в итерационную схему. Пусть Λ есть аппроксимация оператора L . Рассмотрим универсальное представление двухслойной итерационной схемы (см. [87])

$$B\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}\right) = \Lambda u^n - f \quad (4)$$

с неопределенным оператором B , который может зависеть также от индекса n итерации. Ясно, что схема (4) удовлетворяет условию полной аппроксимации и является сильно устойчивой при условии

$$\|C\| = \|E + \tau B^{-1}\Lambda\| \leq 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (5)$$

В настоящее время сформулировано два метода построения итерационных схем, основанных на представлении (4).

Метод *мажорирующего оператора*, предложенный Е.Г. Дьяконовым [46, 47], заключается в замене оператора Λ мажорирующим оператором B , удовлетворяющим условию

$$\delta_0(Bu, u) \leq (\Lambda u, u) \leq \delta_1(Bu, u), \quad (6)$$

где δ_0, δ_1 — положительные константы. Тогда уравнение

$$Bu^{n+1} = Bu^n + \tau(\Lambda u^n - f) \quad (7)$$

может быть решено относительно u^{n+1} , при заданном u^n , итерациями. Для простоты реализации B должен иметь более простую структуру, нежели Λ . Так, если (см. п. 5 § 4)

$$\Lambda = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + 2a_{12}\Lambda_{12},$$

то

$$B = \Lambda_{11} + \Lambda_{22}.$$

В методе стабилизирующего оператора (см. [51]) для простоты реализации оператор B полагается факторизованным

$$B = B_1 \dots B_p, \quad (8)$$

где операторы B_1, \dots, B_p должны быть обратимыми, а оператор C из (5) сильно устойчивым. В частности, операторы B_1, \dots, B_p могут иметь вид

$$E - \tau\Lambda_s$$

и, в случае неположительных операторов Λ_s , будут обратимыми. Заметим, что при этом совсем не обязательно условие

$$\sum_{s=1}^p \Lambda_s = \Lambda.$$

Единственным условием является условие сильной устойчивости (5). Можно рассматривать многослойные итерационные схемы вида

$$B_1 \left(\frac{\Delta_0}{\tau} \right) u^n + B_2 \left(\frac{\Delta_0}{\tau} \right)^2 u^n + \dots + B_q \left(\frac{\Delta_0}{\tau} \right)^q u^n = \Lambda u^n + f \quad (9)$$

с неопределенными операторами B_1, \dots, B_q .

При любых операторах B_1, \dots, B_q схема (9) будет обладать свойством полной аппроксимации.

Метод стабилизирующего оператора пригоден для получения схем повышенной точности и в случае уравнений с переменными коэффициентами. Первые схемы типа стабилизирующего оператора были получены А.А. Самарским [63, 64], Е.Г. Дьяконовым [90, 95].

— \triangle —

§ 10. МЕТОД СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

П. 1. ПРИМЕРЫ

До сих пор метод дробных шагов мы рассматривали как метод построения экономичных разностных схем. Покажем, что метод дробных шагов можно применять к дифференциальным уравнениям. В этом смысле его можно толковать как метод слабой аппроксимации специального вида. Начнем с рассмотрения простейших примеров.

1. Для задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \equiv 1, \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

применим разностную схему дробных шагов

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau} = 1, \quad (2a)$$

$$\frac{x^{n+1} - x^{n+1/2}}{\tau} = 0, \quad (2б)$$

$$x^0 = 0. \quad (2в)$$

Ей соответствует схема в целых шагах

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = 1, \quad x^0 = 0. \quad (3)$$

Отсюда следует, что (2) дает точное решение задачи (1). В то же время схему (2) можно толковать следующим образом: на первом полушаге (2a) решаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = 1. \quad (4a)$$

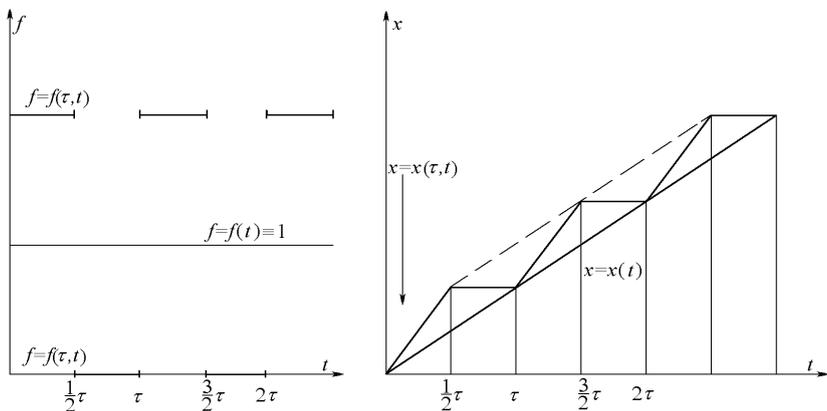


Рис. 15. Сравнение функций $f(t) \equiv 1$, $f(\tau, t)$ и соответствующих интегральных кривых $x(t)$, $x(\tau, t)$.

На втором полушаге (26) решаем уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = 0. \quad (46)$$

В целом же решается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(\tau, t), \quad x^0 = 0, \quad (5)$$

где функция $f(\tau, t)$ определяется так:

$$f(\tau, t) = 2, \quad n\tau < t \leq (n + 1/2)\tau,$$

$$f(\tau, t) = 0, \quad (n + 1/2)\tau < t \leq (n + 1)\tau.$$

На рис. 15 показаны сравнительные графики функции $f(t) \equiv 1$, $f(\tau, t)$ и решений $x(t)$ (1) и $x(\tau, t)$ (5).

Нетрудно видеть, что функция $f(\tau, t)$ сходится к функции $f(t) \equiv 1$ слабо, т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2} [f(\tau, s) - f(s)] ds \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0, \quad t_1, t_2 - \text{любые}, \quad (6)$$

в то время как соответствующее решение (5) сходится к решению (1) сильно.

2. Для задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0, \quad x(0) = 1, \quad a > 0 \quad (7)$$

примем разностную схему

$$\frac{x^{n+1/2} - x^n}{\tau} + ax^n = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{x^{n+1} - x^{n+1/2}}{\tau} = 0, \quad (8б)$$

$$x^0 = 1. \quad (8в)$$

Вновь схему (8) можно толковать как решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} + a(\tau, t)x = 0, \quad x(0) = 1, \quad (9)$$

где

$$a(\tau, t) = 2a; \quad n\tau < t \leq (n + 1/2)\tau; \quad (10)$$

$$a(\tau, t) = 0; \quad (n + 1/2)\tau < t \leq (n + 1)\tau,$$

$a(\tau, t)$ слабо аппроксимирует $a(t) \equiv a$ в смысле равенства (6), решение (9) сходится к решению (7) сильно.

3. Рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0; \quad u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2). \quad (11)$$

Ее решение имеет вид

$$u(x_1, x_2, t) = u_0(x_1 - t, x_2 - t) = T_{-1}(t)T_{-2}(t)u_0(x_1, x_2), \quad (12)$$

где операторы сдвига $T_{-1}(t)$, $T_{-2}(t)$ имеют следующий смысл:

$$T_{-1}(t)f(x_1, x_2) = f(x_1 - t, x_2); \quad (13)$$

$$T_{-2}(t)f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 - t).$$

Таким образом, оператор решения $S(t)$ уравнения (11) имеет вид

$$S(t) = T_{-2}(t)T_{-1}(t). \quad (14)$$

Сохранив функцию начальных данных $u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2)$, заменим

уравнение (11) уравнением с «осциллирующими» коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f_1(\tau, t) \frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(\tau, t) \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\tau, t) &= 2; & f_2(\tau, t) &= 0; & n\tau < t \leq (n + 1/2)\tau; \\ f_1(\tau, t) &= 0; & f_2(\tau, t) &= 2; & (n + 1/2)\tau < t \leq (n + 1)\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

Решение уравнения (15) в интервале от $n\tau$ до $(n + 1)\tau$ равносильно последовательному решению уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0; \quad n\tau < t \leq (n + 1/2)\tau, \quad (17a)$$

соответственно

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0; \quad (n + 1/2)\tau < t \leq (n + 1)\tau. \quad (17b)$$

Оператор перехода уравнения (17a) равен

$$S_1(t + \frac{\tau}{2}, t) = S_1(\frac{\tau}{2}) = T_{-1}(\tau), \quad (18a)$$

оператор перехода уравнения (17b) равен

$$S_2(t + \frac{\tau}{2}, t) = S_2(\frac{\tau}{2}) = T_{-2}(\tau). \quad (18b)$$

Следовательно, для оператора перехода $S_\tau(t + \tau, t) = S_\tau(\tau)$ уравнения (15) имеем выражение

$$S_\tau(\tau) = S_2(\frac{\tau}{2})S_1(\frac{\tau}{2}) = T_{-2}(\tau)T_{-1}(\tau) = S(\tau),$$

где $S(\tau)$ — оператор перехода уравнения (11).

Уравнение (15) аппроксимирует (11) слабо, а оператор $S_\tau(t, 0)$ решения (15) аппроксимирует оператор решения $S(t, 0)$ (11) сильно, совпадая с последним для $t = n\tau$.

4. Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (19)$$

построим следующее уравнение с осциллирующими коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1(\tau, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2(\tau, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\tau, t) = 2, \quad a_2(\tau, t) = 0; \quad n\tau < t \leq (n + 1/2)\tau, \\ a_1(\tau, t) = 0, \quad a_2(\tau, t) = 2; \quad (n + 1/2)\tau < t \leq (n + 1)\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда снова без труда устанавливается соотношение

$$S(\tau) = S_2\left(\frac{\tau}{2}\right)S_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = S_\tau(\tau), \quad (22)$$

где $S(\tau)$ — оператор перехода уравнения (19); $S_i(\tau)$ — операторы перехода уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2; \quad (23)$$

$S_\tau(\tau)$ — оператор перехода уравнения (20) *¹. Введем теперь понятие слабой аппроксимации для дифференциальных операторов общей структуры.

II. 2. СЛАБАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Начнем с определения слабой аппроксимации функций.

Определение. Семейство функций $f_\tau(x, t)$ слабо аппроксимирует по t в интервале $[0, T]$ функцию $f(x, t)$, если

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_\tau(x, s) - f(x, s)] ds = \delta(x, t_1, t_2, \tau) \quad (1)$$

и $\|\delta\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ и любых $t_1, t_2 \in [0, T]$.

Семейство линейных дифференциальных операторов $L_\tau(t)$ слабо аппроксимирует по t оператор $L(t)$, если слабая аппроксимация имеет место для коэффициентов. Ясно, что аналогичное определение слабой аппроксимации можно ввести для каждого пространственного переменного, однако здесь мы ограничимся рассмотрением слабой аппроксимации по t ,

¹* Аналогичная интерпретация схемы расщепления как последовательного приближенного интегрирования одномерных уравнений была дана в работах [36, 13, 79, 84, 91]. В работе [92] дается обобщение схемы п.п.п. для пространственных дифференциальных операторов. В этих работах переход с одного дробного шага на другой является дискретным, т. е. авторы приходят к разностным схемам.

при этом специального вида. В дальнейшем, для краткости, будем говорить об операторах L_τ , а не о семействах операторов.

Пусть

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \quad (2)$$

есть система типа, рассмотренного в §1, п. 1, для которой поставлена задача Коши, корректная в смысле §1, п. 1

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2')$$

Пусть

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_p \quad (3)$$

есть представление оператора L в виде суммы операторов L_1, \dots, L_p , вообще говоря, более простой структуры, чем оператор L . Рассмотрим оператор

$$L_\tau = \alpha_1(\tau, t)L_1 + \alpha_2(\tau, t)L_2 + \dots + \alpha_p(\tau, t)L_p, \quad (4)$$

где функции $\alpha_s(\tau, t)$ определяются следующим образом:

$$\alpha_s(\tau, t) = p \cdot \delta_{si}, \quad (5)$$

если

$$t \in \left(n\tau + \frac{i-1}{p}\tau, n\tau + \frac{i}{p}\tau \right). \quad (6)$$

Здесь

$$\delta_{si} = \begin{cases} 1, & i = s, \\ 0, & i \neq s, \end{cases} \quad i, s = 1, \dots, p. \quad (7)$$

Нетрудно установить, что оператор L_τ слабо аппроксимирует оператор L . Наряду с системой (2) рассмотрим систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_\tau u + f_\tau, \quad (8)$$

где функция f_τ может аппроксимировать f как слабо, так и сильно (в частности, совпадать), а оператор L_τ определен равенством (4).

Что следует понимать под решением $u = u_\tau$ задачи Коши

$$u_\tau(x, 0) = u_0(x) \quad (8')$$

для уравнения (8)?

Пусть $u_\tau(x, t)$ есть решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = pL_1u$$

в промежутке $0 \leq t \leq \tau/p$ с начальными данными $u(x, 0) = u_0(x)$.

Определим $u_\tau(x, t)$ в промежутке $\tau/p \leq t \leq 2\tau/p$ как решение задачи Коши для уравнения $\partial u/\partial t = pL_2u$ с начальными данными $u(x, \tau/p) = u_\tau(x, \tau/p)$. Продолжая аналогичным образом, определим $u_\tau(x, t)$ в интервале $\frac{p-1}{p}\tau \leq t \leq \tau$ как решение задачи Коши для уравнения $\partial u/\partial t = pL_pu$ с начальными данными

$$u(x, \frac{p-1}{p}\tau) = u_\tau(x, \frac{p-1}{p}\tau).$$

После этого процесс определения функций u_τ повторяется. Функция $u_\tau(x, t)$ построенная таким образом, по определению, является решением задачи Коши (8), (8').

Введем обозначения:

$S(t_2, t_1)$ — оператор перехода уравнения (2);

$S_\tau(t_2, t_1)$ — оператор перехода уравнения (8);

$S_i(t_2, t_1)$ — оператор перехода уравнения

$$\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} = L_i u, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Тогда, по самому построению решения u_τ , справедливо соотношение

$$\begin{aligned} S_\tau(t + \tau, t) &= S_p(t + \tau, t + \frac{p-1}{p}\tau) \times \\ &\times S_{p-1}(t + \frac{p-1}{p}\tau, t + \frac{p-2}{p}\tau) \dots S_1(t + \frac{\tau}{p}, t). \end{aligned} \quad (9)$$

В соответствии со свойством (9) будем называть систему (8) *факторизованной* или *расщепленной*. Нашей задачей является сопоставление свойств операторов

$$S(t_2, t_1), S_\tau(t_2, t_1), S_i(t_2, t_1).$$

Введем предварительно ряд понятий. Определим сначала *продолженную систему*. Пусть оператор L имеет вид

$$L = \sum_{\alpha} a_{\alpha_1 \dots \alpha_m} D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m}. \quad (10)$$

Введем в рассмотрение вектор $\overset{1}{u}$, компонентами которого являются величины

$$p^\alpha = p^{\alpha_1, \dots, \alpha_m} = D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} u = D^\alpha u, \quad (11)$$

где сочетания $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ взяты из суммы (10) и обязательно имеется сочетание $(0, \dots, 0)$, которому соответствует исходный вектор $u = p^{0, \dots, 0}$.

Применим к уравнению (2) оператор D^α :

$$D^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} D^\alpha u = \frac{\partial}{\partial t} p^\alpha = D^\alpha(Lu) + D^\alpha f. \quad (11')$$

Пользуясь правилом дифференцирования

$$D_i(ap^\beta) = D_i a p^\beta + a D_i p^\beta,$$

где a — некоторый матричный коэффициент, $p^\beta = p^{\beta_1, \dots, \beta_m}$, преобразуем (11') к виду

$$\frac{\partial p^\alpha}{\partial t} = l^\alpha \overset{1}{u} + D^\alpha f, \quad (12)$$

где l^α — некоторый дифференциальный оператор.

Объединяя равенства (12), приходим к системе

$$\frac{\partial \overset{1}{u}}{\partial t} = L \overset{1}{u} + f. \quad (13)$$

Систему (13) будем называть *первой продолженной системой*, соответствующей системе (2), или просто *первым продолжением системы* (2). Покажем на простом примере, как записывается продолженная система. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \quad (14)$$

Полагая $p^i = \frac{\partial u}{\partial x^i}$, дифференцируя (14) по x^i . получаем

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} + \sum_{\alpha} \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^{\alpha}} + \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial p^i}{\partial x^{\alpha}} = 0, \quad i, \alpha = 1, 2. \quad (15)$$

Вводя в рассмотрение вектор $\overset{1}{u} = (u, p^1, p^2)$, уравнения (14), (15) можно записать в виде

$$\frac{\partial \overset{1}{u}}{\partial t} = \overset{1}{L} u, \quad (16)$$

$$\overset{1}{L} = - \left\| \begin{array}{ccc} \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} & 0 & 0 \\ \sum_{\alpha} \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} & \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} & 0 \\ \sum_{\alpha} \frac{\partial a_{\alpha}}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} & 0 & \sum_{\alpha} a_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \end{array} \right\| \quad (17)$$

В частном случае, когда коэффициенты постоянны, любая производная p^{α} удовлетворяет тому же уравнению, что и функция u , оператор $\overset{1}{L}$ имеет диагональный вид.

$$\overset{1}{L} = \left\| \begin{array}{ccc} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{array} \right\|, \quad (18)$$

где операторная матрица (18) действует в пространстве компонент вектора $\overset{1}{u}$.

Аналогично, составляя векторы $\overset{2}{u} = \{p^{\alpha+\beta}\}$, $\overset{3}{u} = \{p^{\alpha+\beta+\gamma}\}$, ..., где β, γ, \dots пробегает те же сочетания, что и α , получаем для $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$, ... вторую, соответственно третью и т. д. продолженные системы. Будем записывать k -ую продолженную систему в виде

$$\frac{\partial \overset{k}{u}}{\partial t} = \overset{k}{L} \overset{k}{u} + \overset{k}{f}. \quad (19)$$

Легко установить, что представлению (3) соответствует представление

$$\overset{k}{L} = \overset{k}{L}_1 + \dots + \overset{k}{L}_p \quad (20)$$

и оператору $\overset{k}{L}_{\tau}$ соответствует оператор

$$\overset{k}{L}_{\tau} = \alpha_1 \overset{k}{L}_1 + \dots + \alpha_p \overset{k}{L}_p. \quad (21)$$

Таким образом, наряду с системой (8) будем рассматривать продолженную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{\tau}^k u + f_{\tau}^k. \quad (22)$$

Будем обозначать:

$S(t_2, t_1)$ — оператор перехода уравнения (19);

$S_{\tau}(t_2, t_1)$ — оператор перехода уравнения (22);

$S_i(t_2, t_1)$ — оператор перехода уравнения $\frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} = L_i^k u$.

Вновь справедливо соотношение

$$\begin{aligned} S_{\tau}^k(t + \tau, t) &= S_p^k(t + \tau, t + \frac{p-1}{p}\tau) \times \\ &\times S_{p-1}^k(t + \frac{p-1}{p}\tau, t + \frac{p-2}{p}\tau) \dots S_1^k(t + \frac{\tau}{p}, t). \end{aligned} \quad (23)$$

Равенство (23) может быть сформулировано следующим образом: факторизация продолженной системы есть продолжение факторизованной. Иными словами, операции продолжения и факторизации перестановочны.

Продолженной системе отвечает и продолженная задача Коши. Для этого достаточно положить

$$p_0^{\alpha} = D^{\alpha} u_0, \quad p_0^{\alpha+\beta} = D^{\alpha+\beta} u_0 \quad (24)$$

и т. д. Будем обозначать задачи Коши для систем (2), (8) и их продолженных соответственно буквами

$$I, I_{\tau}, I, I_{\tau}$$

и предполагать, что задачи I, I_{τ} определены в одном и том же банаховом пространстве B , задачи I, I_{τ} определяются в соответствующих банаховых пространствах B_k . Например, норма в B_k может определяться следующим образом:

$$\|u\|_{B_k}^2 = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \|p^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}\|_B^2.$$

Сформулируем теперь ряд свойств решений равномерно корректных систем.

Лемма 1. Если система (2) равномерно корректна, то решение $u(t)$ равномерно непрерывно.

Доказательство. В силу непрерывности оператора $S(t+\tau, t)u(t)$ непрерывна по t для любого t в сегменте $[0, T]$. По теореме Кантора $u(t)$ равномерно непрерывна.

Лемма 2. Если а) задачи I, I^1 равномерно корректны; б) коэффициенты a_α равномерно непрерывны по t , то выражения $\frac{\partial u}{\partial t}, Lu$ имеют смысл, равномерно непрерывны по t , и справедливо равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu.$$

Доказательство. Вектор $\overset{1}{u}(t) = \{p^\alpha(t)\}$ имеет смысл для произвольного $t \in [0, T]$, следовательно, выражение

$$q(t) = Lu = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(t) \cdot p^{\alpha}(t)$$

также имеет смысл для $t \in [0, T]$. По лемме 1 $p^\alpha(t)$ равномерно непрерывны как компоненты равномерно непрерывного $\overset{1}{u}(t)$. Принимая во внимание условие б) леммы 2, видим, что Lu равномерно непрерывно.

По определению обобщенного решения

$$u(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varepsilon, t), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где предел имеет место равномерно по t в B_1 и $u(\varepsilon, t)$ — гладкие решения I , принадлежащие B_1 . Для них справедливы соотношения

$$\frac{\partial u(\varepsilon, t)}{\partial t} = L(t)u(\varepsilon, t), \quad (25a)$$

$$u(\varepsilon, t + \tau) - u(\varepsilon, t) = \int_t^{t+\tau} L(\theta)u(\varepsilon, \theta)d\theta. \quad (25b)$$

Переходя в равенстве (25б) к пределу в норме $B_0 = B$, получаем

$$u(t + \tau) - u(t) = \int_t^{t+\tau} L(\theta)u(\theta)d\theta. \quad (26)$$

Так как $L(t)u(t)$ равномерно непрерывно, то

$$\frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} \rightarrow \frac{\partial u(t)}{\partial t} = L(t)u(t)$$

и $\frac{\partial u}{\partial t}$ равномерно непрерывно. Лемма доказана.

Лемма 3. Если а) I, I^1 равномерно корректны; б) $u_0 \in B_1, f(t) \in B_1$ и равномерно непрерывна по t , то формула

$$u(t) = S(t, 0)u_0 + \int_0^t S(t, \theta)f(\theta)d\theta \quad (27)$$

дает решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f \quad (28)$$

с начальными данными

$$u(0) = u_0. \quad (29)$$

Доказательство. Исследуем сначала свойства функций

$$F(t, \theta) = S(t, \theta)f(\theta). \quad (30)$$

При фиксированной θ $F(t, \theta)$ есть решение $u(t)$ системы I :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$$

с начальными данными $u(\theta) = f(\theta)$. По лемме 1 $F(t, \theta)$ равномерно непрерывно по t в B и в B_1 . Рассмотрим по норме B разность

$$\begin{aligned} F(t, \theta + h) - F(t, \theta) &= S(t, \theta + h)f(\theta + h) - S(t, \theta)f(\theta) = \\ &= S(t, \theta + h)[f(\theta + h) - f(\theta)] + [S(t, \theta + h) - S(t, \theta)]f(\theta) = \\ &= S(t, \theta + h)[f(\theta + h) - f(\theta)] + S(t, \theta + h)[E - S(\theta + h, \theta)]f(\theta). \end{aligned} \quad (31)$$

Первое слагаемое в (31) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ равномерно по θ в силу равномерной непрерывности $f(\theta)$. Оценим второе слагаемое. Справедливо представление

$$[E - S(\theta + h, \theta)]f(\theta) = -[F(\theta + h, \theta) - f(\theta)].$$

По свойству $F(t, \theta)$ это слагаемое стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ для любого θ .

Следовательно, функция $F(t, \theta)$ непрерывна по θ , значит, равномерно непрерывна в сегменте $[0, t]$, и интеграл $F(t) = \int_0^t F(t, \theta)d\theta$ имеет смысл в B . Аналогично показывается, что он имеет смысл и в B_1 .

Оценим разность

$$\begin{aligned}
 u(t + \tau) - u(t) &= [S(t + \tau, 0) - S(t, 0)]u_0 + \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta)d\theta + \\
 &+ \int_0^t [S(t + \tau, \theta) - S(t, \theta)]f(\theta)d\theta = [S(t + \tau, t) - E]S(t, 0)u_0 + \\
 &+ \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta)d\theta + \int_0^t [S(t + \tau, t) - E]S(t, \theta)f(\theta)d\theta.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Пользуясь (27), преобразуем формулу (32) к виду

$$\begin{aligned}
 u(t + \tau) - u(t) &= [S(t + \tau, t) - E][u(t) - \int_0^t S(t, \theta)f(\theta)d\theta] + \\
 &+ \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta)d\theta + \int_0^t [S(t + \tau, t) - E]S(t, \theta)f(\theta)d\theta = \\
 &= [S(t + \tau, t) - E]u(t) + \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta)d\theta + \\
 &+ \int_0^t [S(t + \tau, t) - E]S(t, \theta)f(\theta)d\theta - [S(t + \tau, t) - E] \int_0^t S(t, \theta)f(\theta)d\theta.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Два последних члена в (33) приводятся, и в результате получаем после деления на τ

$$\frac{u(t + \tau) - u(t)}{\tau} = \frac{[S(t + \tau, t) - E]}{\tau}u(t) + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} S(t + \tau, \theta)f(\theta)d\theta. \tag{34}$$

По условиям леммы 3 $F(t, \theta) \in B_1$; $F(t) \in B_1$, и, следовательно,

$$u(t) = S(t, 0)u(0) + F(t) \in B_1,$$

так как $u(0) \in B_1$.

Но тогда

$$\frac{[S(t + \tau, t) - E]u(t)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} L(\theta)U(\theta)d\theta, \quad (35)$$

где $U(\theta)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = L(\theta)U(\theta), \quad U(t) = u(t), \quad t \leq \theta \leq t + \tau.$$

Так как $L(\theta)U(\theta)$, $S(t + \tau, \theta)f(\theta)$ равномерно непрерывны, то, применяя теорему о среднем и переходя в равенстве (34) к пределу при $\tau \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = L(t)u(t) + f(t).$$

В силу формулы (27) начальные данные удовлетворяются, лемма доказана.

Формула (27) сохраняет свой смысл и тогда, когда $u(0) \in B$, $f(\theta) \in B$ и задача I равномерно корректна. В этом случае она может быть положена в основу определения обобщенного решения задачи (28), (29).

Из леммы 3 получаем

Следствие. Если задача I корректна, то решение задачи (28), (29) непрерывно зависит от правой части f (корректно по правой части). Утверждение следует сразу из оценки

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|S(t, 0)\| \cdot \|u_0\| + \int_0^t \|S(t, \theta)\| \cdot \|f(\theta)\| d\theta \leq \\ &\leq e^{\alpha t} \|u_0\| + \int_0^t e^{\alpha(t-\theta)} \|f(\theta)\| d\theta. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем принимать формулу (27) за определение решения задачи (28), (29) в смысле леммы 3.

Леммы 1, 2, 3 справедливы также для системы I_τ .

П. 3. ТЕОРЕМЫ СХОДИМОСТИ*²

Справедлива

^{2*} Настоящий пункт воспроизводит результаты работ Г.В. Демидова и автора [88, 89].

Теорема 1. Если а) I_τ , I_τ^1 равномерно корректны в B , B_1 ; б) I_τ корректна по правой части; в) $L_i u$ равномерно непрерывна по t для решения $u(t)$ задачи I ; г) $u_0 \in B_1$, то $u(t)$ — единственное решение задачи I , удовлетворяющее условиям в), г), а $u_\tau(t)$ сильно сходится при $\tau \rightarrow 0$ к $u(t)$ равномерно по t .

Иными словами, если факторизованная исходная и первая продолженная системы корректны и решение исходной системы (2.2) достаточно гладко, то оно единственно и к нему сходится решение факторизованной системы.

Доказательство. Пусть $u(t)$ есть решение задачи I с начальными данными $u_0 \in B_1$, $u_\tau(t)$ — решение задачи I_τ с теми же начальными данными u_0 . Функция

$$v(t) = u_\tau(t) - u(t) \quad (1)$$

является решением задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_\tau v + (L_\tau - L)u(t), \quad v(0) = 0. \quad (2)$$

В силу условия б) и леммы 3 $v(t)$ вычисляется по формуле

$$v(t) = \int_0^t S_\tau(t, \theta)(L_\tau - L)u(\theta)d\theta = \sum_{i=1}^p v_i(t), \quad (3)$$

где

$$v_i(t) = \int_0^t S_\tau(t, \theta)\varepsilon_i(\tau, \theta)\varphi_i(\theta)d\theta; \quad (4)$$

$$\varepsilon_i(\tau, \theta) = \alpha_i(\tau, \theta) - 1; \quad \varphi_i(\theta) = L_i(\theta)u(\theta).$$

Пусть $t = n\tau + \frac{i-1}{p}\tau + \eta$, $0 \leq \eta \leq \frac{\tau}{p}$. Тогда

$$\int_0^t = \int_0^{n\tau} + \int_{n\tau}^{n\tau + \frac{i-1}{p}\tau + \eta}.$$

В силу равномерной корректности задачи I_τ второй интеграл имеет порядок $O(\tau)$ равномерно по t . Поэтому достаточно оценить интеграл $v_i(t)$ при $t = n\tau$. Для v_i получаем выражение

$$v_i(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} S_\tau(t, \theta)\varepsilon_i(\tau, \theta)\varphi_i(\theta)d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau}^{(k+\frac{j}{p})\tau} S_\tau(t, \theta) \varepsilon_i(\tau, \theta) \varphi_i(\theta) d\theta. \quad (5)$$

Принимая во внимание (2.5) и (4), для ε_i справедливо выражение

$$\varepsilon_i(\tau, \theta) = p\delta_{ij} - 1, \quad \theta \in \left[\left(k + \frac{j-1}{p}\right)\tau, \left(k + \frac{j}{p}\right)\tau \right]. \quad (6)$$

Отсюда для $v_i(t)$ находим

$$v_i(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau}^{(k+\frac{j}{p})\tau} \left[S_\tau(t, \theta + \frac{i-j}{p}\tau) \varphi_i(\theta + \frac{i-j}{p}\tau) - S_\tau(t, \theta) \varphi_i(\theta) \right] d\theta. \quad (7)$$

Как видим, оценка $v_i(t)$ сводится к оценке выражения вида

$$\int_a^{a+h_1} [S_\tau(t, \theta + h_2) \varphi(\theta + h_2) - S_\tau(t, \theta) \varphi(\theta)] d\theta \quad (8)$$

для равномерно корректного оператора $S_\tau(t, \theta)$ и равномерно непрерывной по t функции $\varphi(\theta)$.

Представим (8) в виде суммы

$$\begin{aligned} & \int_a^{a+h_1} [S_\tau(t, \theta + h_2) - S_\tau(t, \theta)] \varphi(\theta) d\theta + \\ & + \int_a^{a+h_1} S_\tau(t, \theta + h_2) [\varphi(\theta + h_2) - \varphi(\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу равномерной корректности $S(t, \theta)$ и равномерной непрерывности $\varphi(\theta)$ второй член суммы в (9) имеет порядок $h_1\alpha(h_2)$, где $\alpha(h_2) \rightarrow 0$ при $h_2 \rightarrow 0$, а выражение

$$I_2\varphi_i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau}^{(k+\frac{j}{p})\tau} S_\tau(t, \theta + \frac{i-j}{p}\tau) \times \left[\varphi_i(\theta + \frac{i-j}{p}\tau) - \varphi_i(\theta) \right] d\theta.$$

имеет по норме порядок $\alpha(\tau)$.

Оценим первый член суммы (9). Предполагая, для определенности, h_2 положительным и пользуясь соотношением

$$S_\tau(t, \theta) = S_\tau(t, \theta + h_2) \cdot S_\tau(\theta + h_2, \theta), \quad (10)$$

можно преобразовать его к виду

$$\int_a^{a+h_1} S_\tau(t, \theta + h_2)[E - S_\tau(\theta + h_2, \theta)]\varphi(\theta)d\theta. \quad (11)$$

Рассмотрим выражение

$$[S_\tau(\theta + h_2, \theta) - E]\varphi(\theta). \quad (12)$$

Пусть $U(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{\partial U}{\partial t} = L_\tau U, \quad U(\theta) = \varphi(\theta).$$

Тогда (12) есть не что иное, как $U(\theta + h_2) - U(\theta)$. Если $\varphi(\theta) \in B_1$, то справедливо равенство

$$U(\theta + h_2) - U(\theta) = \int_\theta^{\theta+h_2} L_\tau U dt.$$

В силу корректности $I_\tau L_\tau U$ имеет смысл, ограничена, и

$$\int_\theta^{\theta+h_2} L_\tau \varphi d\theta = O(h_2)$$

равномерно по t, τ .

Таким образом, интеграл

$$\int_a^{a+h_1} [S_\tau(t, \theta + h_2) - S_\tau(t, \theta)]\varphi(\theta)d\theta$$

для $\varphi(\theta) \in B_1$ имеет также порядок $O(h_1 \cdot h_2)$, следовательно, для $\varphi(\theta) \in B_1$ выражение

$$I_1 \varphi_i = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau}^{(k+j/p)\tau} \left[S_\tau(t, \theta + \frac{i-j}{p}\tau) - S_\tau(t, \theta) \right] \varphi_i(\theta) d\theta \quad (13)$$

по норме имеет также порядок $O(\tau)$. I_1 можно рассматривать как семейство операторов $I_1(\tau)$, действующих на функцию $u(\tau)$. Так как

$$\|I_1(\tau)\varphi_i\| \leq C(T) \max \|L_i u\|, \quad (14)$$

то для $u \in B_1$, $\varphi_i \in B_0$ семейство $I_1(\tau)$ равномерно ограничено. Учитывая, что для $u \in B_2$ $\|I_1(\tau)\varphi\| \rightarrow 0$, по теореме Банаха-Штейнгауза $I_1(\tau)$ сходится к нулевому оператору, т. е. для $\varphi_i \in B_0$ $I_1(\tau \rightarrow 0)$ при $\tau \rightarrow 0$.

Имея в виду, что $v = \sum_{i=1}^p (I_1 + I_2)\varphi_i$, приходим к окончательной оценке

$$\|v(t)\| \rightarrow 0 \quad (15)$$

при $\tau \rightarrow 0$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что для уравнений с постоянными коэффициентами достаточности задачи I_τ , и условия теоремы 1 сводятся к достаточной гладкости начальных данных. Это справедливо, конечно, для всех уравнений, у которых корректность продолженной системы следует из корректности исходной.

Теорема 1 доказывает сильную сходимость решения $u_\tau(t)$ факторизованной системы (2.8) с осциллирующими коэффициентами, слабо аппроксимирующей систему, к решению $u(t)$ системы (2.2). Однако можно получить большее: из существования решения факторизованной системы (2.8) вывести существование решения и корректность системы (2.2) и дать конструктивное определение оператора перехода $S(t_2, t_1)$ через оператор $S_\tau(t_2, t_1)$. Это утверждение вполне содержательно, так как оператор $S_\tau(t_2, t_1)$ представляется в виде произведения (2.9) операторов более простой структуры.

Таким образом, задача интегрирования системы (2.2) сводится к интегрированию системы более простой структуры. Справедлива

Теорема 2. Если задачи I_τ , I_τ^1 , I_τ^2 равномерно корректны, то: а) $u_\tau(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ сходится равномерно по t к функции $u(t) = S(t, 0)u_0$; б) оператор $S(t_2, t_1)$ равномерно корректен.

Доказательство. По условию теоремы справедливы оценки

$$\|S_\tau^k(t_2, t_1)\| \leq e^{\alpha(t_2-t_1)}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T, \quad k = 0, 1, 2, \quad (16)$$

где константа α не зависит от τ , t_1 , t_2 .

Пусть $u_{\tau_1}(t)$, $u_{\tau_2}(t)$ решения задачи I_τ , соответствующие $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau_2$ при $u_0 \in B_2$. Функция

$$v(t) = u_{\tau_2}(t) - u_{\tau_1}(t) \quad (17)$$

является решением задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = L_{\tau_1} v + (L_{\tau_2} - L_{\tau_1}) u_{\tau_2}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad v(0) = 0. \quad (18)$$

Для $v(t)$ справедливо представление

$$v(t) = \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) (L_{\tau_2} - L_{\tau_1}) u_{\tau_2}(\theta) d\theta. \quad (19)$$

Представим $v(t)$ в виде

$$v(t) = I_1 + I_2;$$

$$I_1 = \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) [L - L_{\tau_1}] u_{\tau_2}(\theta) d\theta;$$

$$I_2 = \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) [L_{\tau_2} - L] u_{\tau_2}(\theta) d\theta. \quad (20)$$

Оценим норму I_2 (норма I_1 оценивается аналогично).

$$I_2 = \sum_{i=1}^p \int_0^t S_{\tau_1}(t, \theta) \varepsilon_i \varphi_i(\theta) d\theta;$$

$$\varepsilon_i = \alpha_i(\tau_2, t) - 1; \quad \varphi_i = L_i u_{\tau_2}.$$

$$(21)$$

Вновь, как и в теореме 1, можно считать, что $t = n\tau_2$, так как отброшенная часть имеет порядок $O(\tau_2)$. Преобразуя I_2 аналогично теореме 1, имеем

$$I_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{n-1} \int_{(k+\frac{j-1}{p})\tau_2}^{(k+j/p)\tau_2} \left[S_{\tau_1}(t, \theta + \frac{i-j}{p}\tau_2) \times \right.$$

$$\left. \times \varphi_i(\theta + \frac{i-j}{p}\tau_2) - S_{\tau_1}(t, \theta) \varphi_i(\theta) \right] d\theta. \quad (22)$$

Пользуясь тем, что $\varphi_i(\theta) \in B_1$, и производя оценки аналогично теореме 1, получаем

$$\|I_1\| = \alpha(\tau_1), \quad \|I_2\| = \alpha(\tau_2), \quad \|v(t)\| \leq \alpha(\tau_1) + \alpha(\tau_2). \quad (23)$$

Это и означает, что последовательность $u_\tau(t)$ фундаментальна и сходится сильно при $\tau \rightarrow 0$ к $u(t) \in B$, причем сходимость равномерна по t . Иными словами, последовательность функций $S_\tau(t, 0)u(0)$ сходится для $u(0) \in B_2$. Так как B_2 плотно в B и S_τ ограничены в совокупности, то выполнены условия теоремы Банаха - Штейнгауза. В силу этой теоремы (см. [72]) существует предельный оператор

$$S(t_2, t_1) = \lim_{\tau \rightarrow 0} S_\tau(t_2, t_1).$$

В силу равномерной корректности операторов $S_\tau(t_2, t_1)$ оператор $S(t_2, t_1)$ удовлетворяет условию равномерной корректности

$$\|S(t_2, t_1)\| \leq e^{\alpha(t_2 - t_1)}$$

с тем же показателем α .

Покажем, что удовлетворяется условие композиции (условие полу-группы)

$$S(t_3, t_1) = S(t_3, t_2) \cdot S(t_2, t_1). \quad (24)$$

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} S(t_3, t_2) \cdot S(t_2, t_1) - S(t_3, t_1) &= [S_\tau(t_3, t_1) - S(t_3, t_1)] + \\ &+ [S(t_3, t_2) - S_\tau(t_3, t_2)] \cdot S_\tau(t_2, t_1) + S(t_3, t_2)[S(t_2, t_1) - S_\tau(t_2, t_1)]. \end{aligned} \quad (25)$$

Переходя в (25) к пределу при $\tau \rightarrow 0$, получаем равенство (24), что и требовалось доказать. Докажем, наконец, что удовлетворяется условие непрерывного примыкания. Справедлива оценка

$$\|u(t) - u(0)\| \leq \|u(t) - u_\tau(t)\| + \|u_\tau(t) - u(0)\|. \quad (26)$$

Так как $\|u(t) - u_\tau(t)\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ равномерно по t , выберем τ_0 настолько малым, чтобы

$$\|u(t) - u_\tau(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (27)$$

при $\tau \leq \tau_0$ для всех t . При фиксированном τ выберем t_0 настолько малым, чтобы

$$\|u_\tau(t) - u(0)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (28)$$

при $t \leq t_0$. Из (26), (27), (28) следует

$$\|u(t) - u(0)\| < \varepsilon \quad (29)$$

при $t \leq t_0$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если задачи I_τ^k ($k = 0, 1, 2, 3$) корректны, то для произвольной $u(0) \in B_1$ $\overset{1}{u}_\tau(t) \rightarrow \overset{1}{u}(t)$ и предельная функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ и начальным данным.

Доказательство. Рассматривая в B_1 в качестве исходной задачу $\overset{1}{I}$, мы совершенно так же, как и при доказательстве теоремы 2, докажем, что $\overset{1}{u}_\tau$ сходится к $\overset{1}{u}$. Покажем, что $u(t)$ имеет производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ и удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$. Рассмотрим среднюю функцию

$$\bar{u}_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} u_\tau(\theta) d\theta. \quad (30)$$

Функция $\bar{u}_\tau(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ сходится к $u(t)$ равномерно по t . Действительно,

$$\begin{aligned} u(t) - \bar{u}_\tau(t) &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [u(t) - u_\tau(\theta)] d\theta = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [u(t) - u(\theta)] d\theta + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [u(\theta) - u_\tau(\theta)] d\theta. \end{aligned} \quad (31)$$

Функция $u(t)$ равномерно непрерывна в сегменте $0 \leq t \leq T$, так как она является равномерным пределом равномерно непрерывных функций $u_\tau(t)$. Следовательно, первое слагаемое в (31) стремится к нулю при $\tau \rightarrow 0$ равномерно по t , второе стремится к нулю равномерно по t в силу равномерной сходимости $u_\tau(t)$ к $u(t)$. Итак,

$$u(t) - \bar{u}_\tau(t) \rightarrow 0 \quad (32)$$

при $\tau \rightarrow 0$ равномерно по t . Аналогично доказывается, что

$$\|\bar{u}(t) - \overset{1}{u}(t)\| = \|\bar{\overset{1}{u}} - \overset{1}{u}(t)\| \rightarrow 0 \quad (33)$$

при $\tau \rightarrow 0$ равномерно по t . Таким образом, $\bar{u}_\tau(t)$ вместе с производными $D^\alpha \bar{u}_\tau$ сходится к $u(t)$. Применяя операцию осреднения к уравнению I_τ имеем

$$\frac{\partial \bar{u}_\tau}{\partial t} = L\bar{u}_\tau + f_\tau(t), \quad (34)$$

где

$$f_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [L_\tau(\theta)u_\tau(\theta) - L(t)\bar{u}_\tau(t)]d\theta. \quad (35)$$

Покажем, что $f_\tau(t) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$ для $u_0 \in B_2$. Для $f_\tau(t)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} [\alpha_i(\tau, \theta)L_i(\theta)u_\tau(\theta) - L_i\bar{u}_\tau(t)]d\theta = \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{p}{\tau} \int_{\sigma_i} [L_i(\theta)u_\tau(\theta) - L_i(t)\bar{u}_\tau(t)]d\theta, \end{aligned} \quad (36)$$

где интегрирование в последнем интеграле идет в подынтервале длиной τ/p , в котором $\alpha_i \neq 0$. Преобразуем этот интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma_i} [L_i(\theta)u_\tau(\theta) - L_i(t)\bar{u}_\tau(t)]d\theta = \\ &= \int_{\sigma_i} [L_i(\theta)u_\tau(\theta) - L_i(t)u_\tau(t)]d\theta + \int_{\sigma_i} L_i(t)[u_\tau(t) - \bar{u}_\tau(t)]d\theta. \end{aligned} \quad (37)$$

$L_i(\theta)u_\tau(\theta)$ равномерно непрерывно, и поэтому первый интеграл имеет по норме порядок $\varepsilon_1(\tau)$, где $\varepsilon_1(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. Так как $L_i(t)\bar{u}_\tau(t)$ равномерно сходится к $L_i(t)u_\tau(t)$ при $\tau \rightarrow 0$, то второй интеграл также по норме имеет порядок $\varepsilon_2(\tau)$, где $\varepsilon_2(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$. В результате $f_\tau(t) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ для $u_0 \in B_2$. Ясно, что $f_\tau(t)$ может быть представлено в виде

$$f_\tau(t) = M_\tau(t)u_0, \quad (38)$$

где линейный оператор $M_\tau(t)$ имеет равномерно по τ ограниченную норму в B_1

$$\|M_\tau(t)\|_{B_1} \leq C(T)\|u_0\|_{B_1}. \quad (39)$$

Так как $\|M_\tau(t)u_0\| \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ для всех $u_0 \in B_2$, то по теореме Банаха - Штейнгауза в пространстве B_1 $M_\tau(t)$ стремится к нулевому оператору и $f_\tau(t) \rightarrow 0$, для $u_0 \in B_1$. Так как доказано, что $L\bar{u}_\tau \rightarrow Lu$, то из равенства (34) следует, что $\frac{\partial u_\tau}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ и справедливо равенство $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$. Теорема доказана.

Мы уже говорили, что в случае уравнений с постоянными коэффициентами из корректности I следует корректность I^k ($k = 1, 2, 3$). То же

справедливо для систем I_τ^k . В этом случае условия теорем 1-3 отличаются только требованиями гладкости начальных данных.

Более слабые требования корректности систем I_τ получаются и тогда, когда рассмотрение ведется для конкретных банаховых пространств или для конкретных систем. Справедливы две теоремы.

Теорема 4. Если задачи I_τ , I_τ^1 равномерно корректны в $B = L_q(\Omega)$ ($q > 1$) и B_1 , то $u_\tau(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ фундаментальна равномерно по t , и всякая гладкая предельная функция $u(t)$ является решением задачи I . Если $u_0^1 \in L_q$, то $u(t)$ — гладкое и единственное решение задачи I .

Заметим, что в теореме 4 мы предполагаем еще, что u^1 содержит, по крайней мере, первые производные по всем пространственным переменным.

Рассмотрим симметрическую систему первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

где $A_i(x, t)$ — симметричные матрицы, непрерывные в Ω вместе с первыми производными по пространственным переменным. Положим

$$L_i = A_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В этом случае $p = m$, $B = L_2$. Справедлива

Теорема 5. Задачи I , I_τ равномерно корректны. Функция $u_\tau(t)$ равномерно по t сходится при $\tau \rightarrow 0$ к решению задачи I .

— \triangle —

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Элементы функционального анализа. М., 1965.
- [2] Р. Филлипс, Э. Хилле. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1962.
- [3] P.D. Lax, R.D. Richtmeyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. on Pure and Appl. Math., 1956, vol. IX (1956), pp. 267-293.
- [4] Р.Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, 1960.
- [5] В.С. Рябенский. О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши. «Докл. АН СССР», 1952, т. 86, № 6.
- [6] Н.Н. Мейман. К теории уравнения в частных производных. «Докл. АН СССР», 1954, т. 97, № 4.
- [7] Р.Д. Рихтмайер. Абстрактная теория линейной неоднородной задачи Коши. - Сб. «Некоторые вопросы вычисл. и прикл. матем». Новосибирск, 1966.
- [8] О.В. Локуцкий. Численные методы решения уравнений в частных производных. «Усп. матем. наук», 1956, т. XI, вып. 3.
- [9] Г.И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов. Госатомиздат, 1961.
- [10] D.W. Peaceman, H.H. Rachford, jr. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. «Journ. Soc. Industr. Appl. Math.», vol. 3 (1955), № 1, pp. 28-42.
- [11] Jim Douglas, jr. On the numerical integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ by implicit methods. «Journ. Soc. Industr. Appl. Math.», vol. 3 (1955), № 1, pp. 42-65.
- [12] Jim Douglas, jr. and H.H. Rachford, jr. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. «Transactions of the Amer. Math. Soc.», 1956, vol. 82, № 2, pp. 421-439.
- [13] Н.Н. Яценко. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности - «Докл. АН СССР», 1959, т. 125, № 6.
- [14] Н.Н. Яценко, В.А. Сучков, Ю.Я. Погодин. О разностном решении уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. «Докл. АН СССР», 1959, т. 128, № 5.
- [15] Н.Н. Яценко. Простые неявные схемы для многомерных задач. Докл. на Всесоюзн. совещ. по вычисл. матем. и вычис. техн. М., 1959.

- [16] *G.A. Baker, jr., I.A. Oliphant.* An implicit numerical method for solving the two dimensional heat equation. «Quart. of Appl. Math.», vol. XVIII (1960), № 4, pp. 361-375.
- [17] *G.A. Baker, jr.* An implicit numerical method for solving the n-dimensional heat equation. «Quart. of Appl. Math.», vol. XVIII (1960), № 4, pp. 440-442.
- [18] *Н.Н. Яненко.* О неявных разностных методах счета многомерного уравнения теплопроводности. «Иzv. вузов», Математика, 1961, № 4 (23).
- [19] *I.A. Oliphant.* An implicit numerical method for solving two dimensional time-dependent diffusion problems. «Quart. of Appl. Math.» vol. XIX, № 3 (1961), pp. 221-229.
- [20] *Н.И. Булеев.* Численный метод решения двумерных и трехмерных уравнений диффузии. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), № 2.
- [21] *Е.Г. Дьяконов.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для нестационарных уравнений. «Докл. АН СССР», 1962, т. 144, № 1.
- [22] *Е.Г. Дьяконов.* О некоторых разностных схемах для решения краевых задач. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 1.
- [23] *Е.Г. Дьяконов.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4.
- [24] *Е.Г. Дьяконов.* Разностные схемы с расщепляющимся оператором для общих параболических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 2.
- [25] *P.L.I. Brian.* An finite difference method of high order accuracy for the solution of three dimensional heat conduction problems, A. I. Ch. E. J., 1961, № 7, pp. 367-370.
- [26] *J. Douglas, jr.* Alternating direction method for three space variables. Num. Math., 1962, № 4, pp. 41-63.
- [27] *В.К. Саульев.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
- [28] *Н.Н. Яненко.* Некоторые вопросы теории сходимости разностных схем с постоянными и переменными коэффициентами. Тр. IV Всесоюз. матем. съезда, т. II. «Наука», 1964.
- [29] *Laasonen.* Über eine Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Ada Math., M., 1949, vol. 81, p. 309.
- [30] *Л.Д. Ландау, Н.Н. Мейман, И.М. Халатников.* Численные методы интегрирования уравнений в частных производных методом сеток. Тр. III Всесоюз. матем. съезда, т. II. М., 1958.
- [31] *О.А. Ладыженская.* Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей. Канд. дисс. ЛГУ, март 1949; «Уч. зап. ЛГУ», 1952, вып. 23.
- [32] *C. Rouse.* A method for the numerical calculation of hydrodinamic flow and radiation diffusion by implicit differencing. «Journ. Soc. Industr. Appl. Math.», vol. 9, № 1, 1961.

- [33] *Н.Н. Яненко, В.Е. Неуважаев.* Один метод расчета газодинамических движений с нелинейной теплопроводностью. Тр. МИАН СССР, т. 74, 1966.
- [34] *С.К. Годунов.* Разностные методы решения уравнений газовой динамики. Лекции для студентов НГУ. Новосибирск, 1962.
- [35] *Н.Н. Яненко, И.К. Яушев.* Об одной абсолютно устойчивой схеме интегрирования уравнений гидродинамики. Сб. «Разностные методы решения задач математической физики». Тр. МИАН, т. 74, 1966.
- [36] *К.А. Багриновский, С.К. Годунов.* Разностные методы многомерных задач. «Докл. АН СССР», 1957, т. 115, № 3.
- [37] *Н.Н. Анучина, Н.Н. Яненко.* Неявные схемы расщепления для гиперболических уравнений и систем. «Докл. АН СССР», 1959, т. 128, № 6.
- [38] *С.К. Годунов, А.В. Забродин.* О разностных схемах второго порядка точности для многомерных задач. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 4.
- [39] *G.I. Habetler and E.L. Wachspress.* Symmetric successive overrelaxation in solving diffusion difference equations. - Math. of comp., vol. 15(1961), pp. 356-362).
- [40] *А.Н. Коновалов.* Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний. «Докл. АН СССР», 1962, т. 147, № 1.
- [41] *А.А. Самарский.* Локально одномерные разностные схемы для многомерных уравнений гиперболического типа в произвольной области. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 4.
- [42] *К.О. Friedrichs.* Symmetric hyperbolic linear differential equations. «Comm. on Pure and Appl. Math.», vol. VII (1954), pp. 345-392.
- [43] *Н. Н. Анучина.* Некоторые разностные схемы для систем гиперболических уравнений. Тр. МИАН, т. 74, 1966.
- [44] *S. Frankel.* Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. Math. tabl. Aid Comput., 1950, vol. 4, pp. 65-75.
- [45] *D. Young.* Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. «Transactions of the Amer. Math. Soc.», 1954, vol. 76, pp. 92-111.
- [46] *Е.Г. Дьяконов.* Об одном итерационном способе решения систем конечно-разностных уравнений. «Докл. АН СССР», 1961, т. 138, № 3.
- [47] *Е.Г. Дьяконов.* Метод мажорирующего оператора для решения разностных аналогов некоторых сильно эллиптических систем. «Усп. матем. наук», 1964, т. XIX, вып. 5.
- [48] *В.П. Ильин.* О применении метода переменных направлений для решения квазилинейных уравнений параболического и эллиптического типов. Сб. «Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.». Новосибирск, 1966.
- [49] *В.А. Енальский.* О движении частиц в электромагнитном поле. Тр. МИАН, т. 74, 1966.
- [50] *А.А. Самарский.* Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 6, 3.

- [51] *Г.И. Марчук, Н.Н. Яценко*. Применение метода расщепления (дробных шагов) для решения задач математической физики. Докл. на Всесоюзн. конф. по вычисл. матем. (Москва, февраль 1965). Докл. на конгр. ИФИП (Нью-Йорк, май 1965), см. также Сб. «Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.». Новосибирск, 1966.
- [52] *L.D. Richardson*. The approximate ariphmetical solution by finite differences of phisical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. «Phil. Trans. Roy. Soc.», London, ser. A 83, pp. 335-336.
- [53] *В. Вазов, Дж. Форсайт*. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, 1963.
- [54] *В. Марков*. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., 1892.
- [55] *Garret Birkhoff, Richard S. Varga, David Young*. Alternating direction implicit method. Advances in Computers, 1962, vol. 3, pp. 189-273. Ac. Press, New-York-London.
- [56] *G. Birkhoff, R.S. Varga*. Implicit alternating methods. «Transactions of the Amer. Math. Soc.», 1959, 92, pp. 13-24.
- [57] *R.B. Kellog*. Another alternating direction implicit method. «Journ. Soc. Industr. Appl.», 1903, vol. 11, № 4, pp. 976.
- [58] *С.П. Тимошенко, С. Воиновский-Кригер*. Пластинки и оболочки. Физматгиз, 3. См. также С.П. Тимошенко. Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1946.
- [59] *А.Н. Коновалов*. Применение метода расщепления к численному решению динамических задач теории упругости. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 4.
- [60] *S.D. Conte and R.J. Dames*. An alternating direction method for solving the biharmonic equation. «Math. Table and other Aids to Comp.», 1958, vol. XII, № 63, pp. 198-204.
- [61] *А.Н. Коновалов*. Об одной итерационной схеме решения статических задач теории упругости. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1964, т. 4, № 5.
- [62] *J. Douglas, jr., I.E. Gunn*. Two high order correct difference analogues for the equation of multidimensional heat flow. Math. Comp, 1963, vol. 17, № 81, pp. 71-80.
- [63] *А.А. Самарский*. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 5.
- [64] *А.А. Самарский, В.Б. Андреев*. Об одной разностной схеме повышенного порядка точности для уравнений эллиптического типа с несколькими пространственными переменными. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 6.
- [65] *И.Д. Софронов*. Разностная схема с диагональными направлениями прогонки для решения уравнения теплопроводности. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 2.

- [66] *И.Д. Софронов*. К разностному решению уравнения теплопроводности в криволинейных координатах. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1963, т. 3, № 4.
- [67] *В.А. Енальский*. О двух схемах повышенной точности для решения задачи Дирихле. Тр. МИАН, т. 74, 1966.
- [68] *В.А. Енальский*. Об одном итерационном процессе повышенной точности. Докл. 3-й Сиб. конф. по матем. и механ. Томск, 1964.
- [69] *Г.И. Марчук, Н.Н. Яненко*. Решение многомерного кинетического уравнения методом расщепления. «Докл. АН СССР», 1964, т. 157, № 6.
- [70] *Г.И. Марчук, У.М. Султангазин*. О сходимости метода расщепления для уравнений переноса излучений. «Докл. АН СССР», 1965, т. 161, № 1.
- [71] *Г.И. Марчук, У.М. Султангазин*. К вопросу о решении кинетического уравнения переноса методом расщепления. «Докл. АН СССР», 1965, т. 163, № 4.
- [72] *Л.В. Канторович, Г.П. Акилов*. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
- [73] *С.Н. Антонцев, О.Ф. Васильев, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко*. Численный расчет водослива. -Сб. «Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.». Новосибирск, 1966.
- [74] *Н.Н. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко*. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости. - Сб. «Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.». Новосибирск, 1966.
- [75] *Jim Douglas, jr.* The application of stability analysis in the numerical solution of quasi-linear parabolic differential equations. «Transactions of the Amer. Math. Soc.», 1958, vol. 89, pp. 484-518.
- [76] *С.К. Годунов, К.А. Семендяев*. Разностные методы численного решения задач газовой динамики. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 1.
- [77] *Г.И. Марчук*. Численный алгоритм решения уравнений прогноза погоды. «Докл. АН СССР», 1964, т. 156, № 2.
- [78] *Г.И. Марчук*. Новый подход к численному решению уравнений прогноза погоды. Симпозиум по долгосрочным методам прогноза, США, Боулдер, июль, 1964.
- [79] *Н.Н. Яненко*. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов). «Докл. АН СССР», 1960, т. 134, № 5.
- [80] *Н.Н. Яненко*. О сходимости метода расщепления для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, № 5.
- [81] *Ю.Е. Бояринцев*. О сходимости метода расщепления и о локальном критерии корректности для разностных уравнений с переменными коэффициентами.-Сб. «Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.». Новосибирск, 1966.
- [82] *M. Lees*. Alternating direction methods for hyperbolic differential equations. «Journ. Soc. Industr. Appl. Math.», vol. X (1960), № 4, pp. 610-616.

- [83] *M. Lees*. Alternating direction and semiexplicit difference methods for parabolic partial differential equations. «Num. Math.», vol. III (1961), № 5, pp. 398-462.
- [84] *А.А. Самарский*. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 5.
- [85] *А.А. Самарский*. О сходимости метода дробных шагов для уравнений теплопроводности. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1962, т. 2, № 6.
- [86] *Jim Douglas, James E. Gunn*. A general formulation of alternating direction methods. Part I. Parabolic and hyperbolic problems. «Num. Math.», vol. 6 (1964), pp. 428-453.
- [87] *Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева*. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1960.
- [88] *Н.Н. Яненко*. О слабой аппроксимации систем дифференциальных уравнений. «Сиб. матем. ж.», 1964, т. V, № 6.
- [89] *Г.В. Демидов, Н.Н. Яненко*. Метод слабой аппроксимации как конструктивный метод построения решения задачи Коши.-Сб. «Некоторые вопросы прикл. и вычисл. матем.». Новосибирск, 1966.
- [90] *Е.Г. Дьяконов*. О некоторых итерационных методах решения систем разностных уравнений, возникающих при решении методом сеток уравнений в частных производных эллиптического типа.-Сб. «Вычислительные методы и программирование», III, изд. МГУ 1965.
- [91] *А.А. Самарский*. О разностных схемах для многомерных дифференциальных уравнений математической физики.-Aplikace matematiky svazen 10, cislo 2, 146-163.
- [92] *R.B. Kellog*. An alternating direction method for operator equations. «Journ. Soc. Industr. Math.», 1964, vol. 12, № 4, pp. 848-854.
- [93] *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский*. Об однородных разностных схемах. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1961, т. I, № 1.
- [94] *А.А. Самарский*. О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем. «Докл. АН СССР», 1965, т. 165, № 6.
- [95] *Е.Г. Дьяконов*. Решение некоторых многомерных задач математической физики при помощи сеток. Дисс. МГУ, 1962.
- [96] *А.А. Самарский*. Экономичные разностные схемы для гиперболических систем уравнений со смешанными производными и их применение для уравнений упругости. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», 1965, т. 5, № 1.
- [97] *Г.И. Марчук*. Численные методы решения задач прогноза погоды и теории климата, 1965.
- [98] *В.Я. Гольдин*. Характеристическая разностная схема для нестационарного кинетического уравнения. «Докл. АН СССР», 1960, т. 133, № 4.
- [99] *K. Yosida*. Functional Analysis. Springer, 1965.
- [100] *В.П. Ильин*. О расщеплении разностных уравнений параболического и эллиптического типов.-«Сиб. мат. ж.», 1985, № 6.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
§ 1. Однородные схемы	6
П.1. Класс рассматриваемых задач. Задача Коши в банаховом пространстве	6
П.2. Однородные схемы	9
П.3. Примеры	17
П.4. Метод факторизации (прогонки)	19
П.5. Метод матричной факторизации	21
§ 2. Простейшие схемы в дробных шагах для интегрирования уравнений параболического типа.	26
П.1. Схема продольно-поперечной прогонки	26
П.2. Схема стабилизирующей поправки	30
П.3. Схема расщепления для уравнения теплопроводности без смешанной производной (ортогональная система координат)	32
П.4. Схема расщепления для уравнения теплопроводности со смешанной производной (произвольная система координат)	34
П.5. Схема факторизации разностного оператора	37
П.6. Схема приближенной факторизации оператора	38
П.7. Схема предиктор - корректор	40
П.8. Некоторые замечания по поводу схем с дробными шагами	43
П.9. Краевые условия в методе дробных шагов для уравнения теплопроводности	46
§ 3. Применение метода дробных шагов к гиперболическим уравнениям	57
П.1. Простейшие схемы для одномерных гиперболических уравнений	57
П.2. Однородные неявные схемы для уравнений гиперболического типа	60
П.3. Неявные схемы для многомерных гиперболических уравнений,	60
П.4. Схемы расщепления бегущего счета	64
П.5. Метод приближенной факторизации для волнового уравнения	66
П.6. Метод расщепления и мажорантные схемы	68
§ 4. Применение метода дробных шагов к краевым задачам для уравнений Лапласа и Пуассона	71
П.1. Связь между стационарными и нестационарными задачами	71
П.2. Схемы интегрирования нестационарных задач и итерационные схемы	73
П.3. Итерационные схемы для двумерного уравнения Лапласа	78
П.4. Итерационные схемы для трехмерного уравнения Лапласа	86
П.5. Итерационные схемы для эллиптического уравнения	90
П.6. Схемы с переменным шагом	95
П.7. Итерационные схемы, основанные на схемах интегрирования гиперболических уравнений	98
П.8. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона	100
П.9. Итерационные схемы с осреднением	101
П.10. Сведение схем неполной аппроксимации к схемам полной аппроксимации	103
§ 5. Краевые задачи теории упругости	106
П.1. Уравнения упругого равновесия и упругих колебаний	106
П.2. Краевые задачи теории упругости	108
П.3. Схемы интегрирования нестационарных уравнений упругости	109
П.4. Итерационные схемы решения краевых задач для бигармонического уравнения	110
П.5. Итерационные схемы для системы уравнений упругости в смещениях	113
П.6. Краевые условия в задачах упругости	114
§ 6. Схемы повышенной точности (с.п.т.)	118
П.1. Однородные схемы повышенной точности	118
П.2. Факторизованные схемы повышенной точности для уравнения теплопроводности	120
П.3. Решение задачи Дирихле с помощью с.п.т.	123
§ 7. Интегродифференциальные, интегральные, алгебраические уравнения	126
П.1. Кинетические уравнения	126
П.2. Алгебраические уравнения	128

§ 8. Некоторые задачи гидродинамики	130
П.1. Потенциальное обтекание контура	130
П.2. Потенциальное течение несжимаемой тяжелой жидкости со свободной границей (задача о водосливе)	132
П.3. Течение вязкой жидкости	135
П.4. Метод каналových течений	140
П.5. Метод предиктор - корректор (метод поправки)	143
П.6. Уравнения метеорологии	146
§ 9. Общие формулировки	148
П.1. Общая формулировка метода расщепления. Обоснование в коммутативном случае методом исключения	148
П.2. Обоснование метода расщепления в некоммутативном случае	151
П.3. Метод приближенной факторизации оператора	155
П.4. Метод стабилизирующей поправки	159
П.5. Метод аппроксимационной поправки	162
П.6. Метод стационарирования	163
§ 10. Метод слабой аппроксимации и построение решения задачи Коши в банаховом пространстве	166
П.1. Примеры	166
П.2. Слабая аппроксимация систем дифференциальных уравнений	170
П.3. Теоремы сходимости	179
Б и б л и о г р а ф и я	189