ТЕОРИЯ СОВМЕСТИМОСТИ
И МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ
НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ*

1. Известно, что методы интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, развитые в XVIII - XIX в. (построение решения с помощью метода огибающих или характеристических полос или метода Лагранжа - Шарпи), по своей природе являются чисто геометрическими. Однако эти методы имеют резко очерченную границу применения, будучи годными только для систем уравнения первого порядка с одной неизвестной функцией. Кроме предложенного Риманом [1] преобразования годографа, позволяющего сводить однородную квазилинейную систему из двух уравнений к линейной системе, нам неизвестны какие-либо методы интегрирования систем нелинейных уравнений. Задача нахождения общего интеграла систем нелинейных уравнений не поставлена даже в принципе, и мы в нашем докладе не будем ее касаться. Мы рассмотрим более частную, но, тем не менее, очень трудную задачу о выделении классов решений произвольной нелинейной системы и об уменьшении размерности пространства дифференциального уравнения. Задача эта имеет большое теоретическое и практическое значение.

В связи с этим следует остановиться на двух основных методах выделения частных решений.

Первый метод - я назову его физическим - состоит в наложении на решение системы дифференциальных уравнений ряда дополнительных требований типа начальных данных или краевых условий. На языке физики это означает, что, зная состояние некоторой материальной системы или поля на данный момент времени, мы должны определить состояние системы (поля) на все последующие моменты. На геометрическом языке это означает, что искомая интегральная поверхность S должна проходить через фиксированную поверхность Σ меньшей размерности (задача Коши). Как правило, задание поверхности Σ определяет однозначно S.

Так как общий интеграл отсутствует, то для заданной конкретной поверхности Σ мы можем тем или иным разностным методом определить с какой-то точностью поверхность S, не зная, правда, ничего о структуре общего решения. Тем самым на каждый конкретный вопрос дается конкретный ответ, но не больше.

Второй метод выделения решения - я назову его геометрическим - состоит также в наложении на решение дополнительных требований. Эти требования носят характер описания каких-то свойств решения, и по этим дополнительным свойствам решения мы определяем сразу некоторый класс точных решений. Ясно, что выделенный таким образом класс решений не может удовлетворять предложенным краевым условиям и начальным данным. Наоборот, приходится иногда по данному классу решений определять те физические условия, которым он должен удовлетворять.

Поэтому в литературе (см, обзор Неменьи [2]) такой метод называется иногда обратным. Мы считаем этот термин неудачным, так как он не говорит, каковы признаки, выделяющие решения, и каковы методы выделения решения.

В настоящее время существуют два четко сформулированных метода выделения решений.

I. Теоретико-групповая характеристика. Класс решений описывается некоторым групповым свойством или свойством симметрии. Указывается группа преобразований переменных, относительно которых инвариантно решение; отыскиваются соответствующие решения. На такой основе был получен ряд важных решений (так называемые автомодельные решения). Достаточно упомянуть имена Л.Д. Ландау, Я.Б. Зельдовича, Л.И. Седова, К.П. Станюковича, Л.В. Овсянникова. Наиболее полно с математической точки зрения этот подход представлен работами Овсянникова, Я не буду останавливаться на этом вопросе, так как он освещен в докладе Овсянникова [3]. Сделаю только два замечания.

1°. Полученные таким образом точные (автомодельные) решения, как правило, имеют вполне определенное физическое содержание. Однако большей частью класс автомодельных решений имеет небольшой произвол. Обычно задача нахождения автомодельных решений сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений, что означает константный произвол решения.

2°. Подход, основанный на групповых свойствах решения, имеет отношение ко второму методу выделений решений, о чем мы скажем несколько позже.

II. Дифференциальная характеристика решения. В наиболее общем виде этот метод может быть сформулирован так.

К системе дифференциальных уравнений

$$\Phi_i\left(x_j u_k, \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}, \ldots \frac{\partial^p u_\alpha}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_m^{\beta_m}}\right) = 0$$

$$I,\ k,\ \alpha = 1, \ldots, n;\ \ j,\ \beta = 1, \ldots\ m;\ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m = p \qquad (1)$$

присоединяется система дополнительных дифференциальных соотношений

$$F_3\left(x_j, u_k, \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}, \ldots \frac{\partial^q u_\alpha}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_m^{\beta_m}}\right) = 0. \qquad (2)$$

Требуется найти решение переопределенной системы (1), (1.2) . Задаваясь различным произволом класса решений, получаем различные условия на функции F_3, Соотношения (2) будем называть дифференциальными связями, q-порядком дифференциальной связи; решения переопределенной системы (1), (2) определяют

---

* Труды IV Всесоюз. мат. съезда. Л.: Наука, 1964. Т. 1,

класс решений (1) с дифференцианальной связью или дифференциальной характеристикой. Определение и исследование класса решений с дифференциальной характеристикой опирается в основном на анализ совместимости переопределенной системы. Главная особенность анализа совместимости, в отличие от обычно принятого в геометрии, заключается в том, что не исследуется заданная переопределенная система и определяется произвол решения, а напротив, исходя из произвола решения, находятся дифференциальные связи.

Мы можем придать геометрическую формулировку нашим определениям, пользуясь понятием продолженной системы. Обозначим

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}} = P_{i\alpha_1\cdots\alpha_m}, u_i = P_{i0}, \tag{3}$$

$\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k \leqslant r,\ r = \max(p,q)$.

Для величин $P_{i\alpha_1} \dots \alpha_m$ получим систему уравнений

$$\frac{\partial P_{i\alpha_1\cdots\alpha_m}}{\partial x_s} = P_{i\alpha_1\cdots\alpha_s\cdots\alpha_m} \tag{4}$$

и конечных соотношений

$$\Phi i\ (x_j, P_{k0}, P_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta_1} \dots {}_{\beta_m}) = 0,\ \beta_1 + \dots \beta_m = r. \tag{5}$$

Соотношения (5) получаются из (1) дифференцированием по всем переменным $x_1, \dots, x_m$ до получения производных порядка r Система (3), (4) называется продолженной. Тогда в пространстве переменная $P_{ia1\dots am}$ продолженной системы дифференциальные связи (2) определяют векторную поверхность o.

Задача ставится следующим образом: определить условия, которым должна удовлетворять поверхность o, для того чтобы содержать интегральные многообразия продолженной системы в указанном произволе.

Заметим, что дифференциальная связь всегда может быть сделана конечной связью, лишь бы продолженная система имела достаточно высокий порядок.

Чем больше произвол выделяемого класса, тем большие ограничения накладываются на дифференциальные связи, тем с большей легкостью они определяются. В некоторых простых случаях функции F_s определяются из алгебраических соотношений или из дифференциальных уравнений невысокого порядка в пространстве меньшей размерности.

Указанные два метода выделения решений - физический и геометрический – представляют собой два принципиально различных подхода к задаче интегрирования. В первом методе мы получаем конкретное решение, удовлетворяющее определенным начальным и краевым условиям, но не имеем представления о структуре решений; во втором методе, напротив, имея Представление о структуре решений, мы не можем, вообще говоря, удовлетворить заданным краевым условиям, т.е. получаем "формальные" решения. Имеется ли мостик между указанными методами? Можно ли вторым методом получать не только формальные решения, но и решать задачи с определенным физическим содержанием?

В этом направлении наиболее обещающими являются исследования типа "бегущих волн".

Рассмотрим однородную квазилинейную систему

$$\sum_{j,k} a_{ijk}\,(u_1, \dots u_m)\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0 \tag{6}$$

Назовем бегущей волной решение (6) непрерывно примыкающее к тривиальному решению

$$u_i = u_{i0} \tag{7}$$

через некоторую характеристическую поверхность S.

До сих пор остается открытым вопрос о том, являются ли бегущие волны, определенные таким образом, решением с дифференциальной характеристикой. Исследованные до сих пор примеры бегущих волн обладали дифференциальной и, более того, конечной характеристикой.

Перейдем теперь к обзору исследований по бегущим волнам, имея в виду приложение их в газовой динамике.

2. Уравнения газовой динамики невязкого нетеплопроводного газа в декартовых координатах имеют вид системы (6). Так, в случае политропного газа, выбрав в качестве неизвестных функций компоненты скорости u_1, u_2, u_3 и скорость звука c, а в качестве независимых переменных - эйлеровы

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{2}{\gamma - 1} c \frac{\partial c}{\partial xi} = 0$$

$$\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\partial c}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial c}{\partial x_k}\right)+c\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}=0 \qquad (8)$$

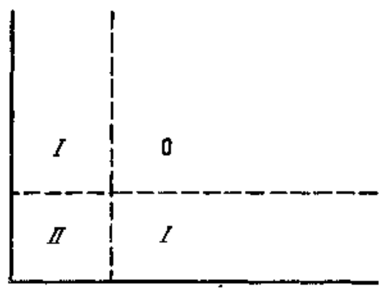
Мы видим, что коэффициенты уравнений (8) являются функциями от неизвестных величин u_1, u_2, u_3 и система (8) принадлежит к типу (6). Пространство переменных u_1, u_2, u_3, c будем называть пространством годографа. Будем говорить, что решение $u_i(x_k, t)$, $c(x_k, t)$ имеет вырожденный годограф, если $u_i(x_k, t)$, $c(x_k, t)$ связаны одной или несколькими функциональными зависимостями.

В работе [1] Риман описал класс бегущих волн в случае одномерного плоского течения. Ему принадлежит теорема: бегущая волна есть движение с вырожденным годографом. Величины u, c связаны соотношением

$$u \pm 2c / (\gamma - 1) = \text{const.} \qquad (9)$$

Дальнейшее развитие результатов Римана пошло по пути формального определения, т.е. рассмотрения движения с вырожденным годографом.

Назовем бегущей волной ранга r решение системы (6) с вырожденным годографом, для которого ранг функциональной матрицы $\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|$ равен r. В частности, волны ранга 1 называются простыми, волны ранга 2 - двойными и т. д. Естественно, что сначала были исследованы волны ранга 1. Этим исследованиям посвящены были работы Майера [4], Буземана [5], А.А. Никольского [6], Гизе [7], Бондера [8], Бурната [9] и автора [10]. Этот случай сейчас полностью исследован, и на нем я не буду останавливаться.



Исследование сильно усложняется при переходе к двойным волнам. Анализ двойных волн не закончен и по настоящее время. К этому направлению относятся работы А.А. Никольского [И], Гизе [7], О.С. Рыжова [12], Ю.Я. Погодина, В.А. Сучкова, Н.Н. Яненко [13], А.Ф. Сидорова, Н.Н. Яненко [14, 15], А.Ф. Сидорова [16], Ю. Бондера [17], Л.В. Комаровского [18]. В наиболее общей форме алгоритм нахождения бегущих волн сформулирован в работах [13, 14, 17].

3. Перейдем теперь к вопросу о связи между решениями с вырожденным годографом и бегущими волнами, определенными как решения, граничащие с тривиальными.

Почти все исследованные решения с вырожденным годографом являются бегущими волнами. Однако утверждать эквивалентйость этих понятий пока нет оснований. Укажем в качестве примеров из гидродинамики следующие течения с вырожденным годографом, которые являются бегущими волнами.

1°. Простые волны. Эти течения обладают следующим свойством: в фазовом пространстве $x_1, \ldots, x_m, t$ существует однопараметрическое семейство гиперплоскостей, вдоль которых все величины $u_1, \ldots, u_m, t$ постоянны. Ясно, что простые волны могут граничить с постоянным движением через одну из таких плоскостей.

2°. Двойные волны в задаче о двух поршнях. В работе В.А. Сучкова, Ю.Я. Погодина, автора [13] была рассмотрена следующая задача.

Покоящийся политропный газ заключен в квадрате $x_i > 0$, $i = 1,2$.

Плоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, его ограничивающие, начинают двигаться по закону

$x_i = f_i(t)$

т.е. остаются параллельными своему начальному положению. В газе возникает двойная волна *II*, которая граничит с областью покоя 0 через простые волны Римана *I* (рисунок).

4. Как видно из предыдущего, определение дифференциальной связи является первой основной задачей, за которой уже следует задача интегрирования получившейся системы меньшей размерности. При этом в зависимости от порядка связи и произвола решения мы можем получать различные классы решений. Здесь, конечно, возможна и необходима большая классификационная работа. Однако можно ожидать, что, даже получая широкие классы решений, мы приходим большей частью к формальным решениям, не связанным с какими-либо задачами физики или газовой динамики.

Следовательно, выбираемые дифференциальные связи должны быть таковы, чтобы выделяемые классы решений удовлетворяли каким-то физически определенным условиям.

Ясно, что все краевые задачи мы не можем решать методом дифференциальной связи.

Основной краевой задачей, которая соответствует методу дифференциальных связей, является задача примыкания.

Пусть D_0 есть область, в которой существует некоторое известное уже решение $u_0\ (x)$, удовлетворяющее дифференциальным связям, D_1 - область, примыкающая к D_0 через характеристическую поверхность s.
Тогда ищется решение $u_1(x)$, непрерывно переходящее в $u_0\ (x)$ через характеристическое многообразие s.
Задача о примыкании, выше сформулированная, может рассматриваться как задача Коши для характеристической поверхности. Как показывает пример задачи с двумя поршнями, ей можно придать и другую формулировку: пусть в областях D_1, D_2 определены решения $u_1\ (x)$, $u_2\ (x)$, удовлетворяющие дифференциальным связям. В области D, граничащей с D_1 , D_2 через характеристические поверхности s, s_2, следует определить решение $u(x)$, примыкающее непрерывно к $u_1\ (x)$, $u_2\ (x)$ через соответственно $s_1\ s_2$.
В этом случае мы приходим к задаче Гурса. В задаче о примыкании разграничивающей поверхности s вместо характеристической поверхности может быть ударный фронт. Тогда соответственно формулируются условия перехода через поверхость s. Возникающие при этом задачи рассмотрены А.Ф. Сидоровым [19].
Пока нет единого метода решения задачи о примыкании. Однако в случае простых волн, примыкающих к тривиальному решению, справедлива следующая теорема [20]: дифференциальные связи, характеризующие простые волны, являются инвариантными.
Как было определено в работе [20], связь (2) называется инвариантной, если для решений $u^+\ (x)$, $u^-\ (x)$, непрерывно примыкающих одно к другому через характеристическую поверхность s, справедливо

$$F_s\left(x_j u_k^+ \frac{\partial u_\alpha^+}{\partial x_\beta},\dots\frac{\partial^q u_\alpha^+}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_m^{\beta_m}}\right) = F_s(x_j, u_k^- \frac{\partial u_\alpha^-}{\partial x_\beta},\dots\frac{\partial^q u_\alpha^-}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_m^{\beta_m}} \qquad (10)$$

5. Между методом дифференциальной характеристики и теоретико-групповым подходом существует определенная связь. Частным видом автомодельных решений уравнений газовой динамики являются центрированные или конические течения. В одномерном случае справедлива теорема: огибающая однопараметрического семейства центрированных течений есть бегущая волна Римана. Известные классы бегущих волн содержат в себе подклассы центрированных волн [11, 13]. Л.В. Овсянникову [3] удалось показать, что простые волны можно выделить также групповой характеристикой. Вопрос об эквивалентности дифференциальной и групповой характеристик в общем случае остается пока открытым.

6. Заметим, что и другие задачи теории квазилинейных и нелинейных уравнений сводятся к исследованию совместности переопределенной системы уравнений. Таково, например, исследование законов сохранения систем квазилинейных уравнений, проведенное Б.Л. Рождественским [21].

7. Трудности аналитического исследования даже в случае простейших дифференциальных связей велики. Они прогрессивно возрастают при переходе к дифференциальным связям более высокого порядка и к более сложным дифференциальным уравнениям. Поэтому возникает необходимость реализации дифференциального алгебраического алгорифма на электронных вычислительных машинах. Этому вопросу посвящена статья В.А. Шурыгина и автора [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. *РИМАН Б.* Сочинения. М.: Гостехтеориздат, 1948.
2. *Неменьи* // Проблемы механики. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. С. 234-257.
3. *Овсянников Л.В.* // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Л., 1961.
4. *Meyer* // Forsch. Ver. Dt. Ing. Berlin, 1908. Bd. 62. S. 531-657.
5. *Busemann H.* // Luftfahrtforschung. 1942. Bd. 19, N 4. S. 137-144.
6. *Никольский А.А.* // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М., 1957. С. 34—38.
7. *Gize* // Quart. Appl. Math. 1951. Vol.9. P. 237-246.
8. *Bonder* // Arch. mech. stosow. 1956. Vol. 8, N 4. S. 647-670.
9. *Burnat* // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. 1959. Vol. 7, N 10.
10. *Яненко Н.Н.* // ДАН СССР. 1956. Т. 109, № 3. С. 44-47.
11. *Никольский А.А,* // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М., 1957. С. 39-42.
12. *Рыжов О.С.* // ПММ. 1957. Т. 21, вып. 4. С. 564-568.
13. *Погодин Ю.Я., Сучков В.А,, Яненко Н.Н.* // ПММ. 1958. Т. 22, вып. 2.
14. *Сидоров А. Ф., Яненко Н.Н.* // ДАН СССР. 1958. Т. 125, № 5.
15. *Сидоров А.Ф., Яненко Н.Н.* // Изв. вузов. Математика, 1959. № 1. С. 187-198.
16. *Сидоров А.Ф.* // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 5. С. 940-943.
17. *Бондер Ю.* // ПММ. 1960. Т. 24, вып. 6. С. 1079-1087.
18. *Комаровский Л.В.* // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 3. С. 491-495.
19. *Сидоров А.Ф. Il* Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Л., 1961.
20. *Яненко Н.Н.* // Изв. вузов. Математика, 1961. № 3. С. 185-194.
21. *Рождественский Б.Л.* // ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 3, С. 454- 457.
22. *Шурыгин В.А., Яненко Н.Н.* // Пробл. кибернетики. 1961. № 6. С. 33-43.